

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
ФГБОУ ВО
«ИРКУТСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Самостоятельная работа 1
по дисциплине «Сопротивление материалов»

Выполнил: Лушин М.А.,
студент гр. РТз-24-1

Проверил: Зеньков Е.В.

Иркутск, 2025 г

РАСЧЕТ СТУПЕНЧАТОГО СТЕРЖНЯ НА ПРОЧНОСТЬ ПРИ ЦЕНТРАЛЬНОМ РАСТЯЖЕНИИ И СЖАТИИ

Требуется (для расчетной схемы (рис. 1, а)):

- 1) построить эпюру продольных сил N ;
- 2) рассчитать диаметры d_1, d_2 ступенчатого стержня;
- 3) построить эпюру нормальных напряжений σ ;
- 4) построить эпюру перемещений d поперечных сечений стержня относительно неподвижной заделки.

Исходные данные:

$F_1 = 18 \text{ кН}$; $F_2 = 35 \text{ кН}$; интенсивность равномерно распределенной нагрузки $q = 50 \frac{\text{кН}}{\text{м}}$; $E = 1,7 \cdot 10^5 \text{ МПа}$; $[\sigma^p] = 100 \text{ МПа}$; $[\sigma^c] = 350 \text{ МПа}$.

Решение

1. Построение эпюры продольных сил N

Схема стержня в соответствии с данными задачи изображена на рис. 1, а). Разбиваем стержень на три силовых участка. В пределах каждого участка делаем произвольное поперечное сечение и рассматриваем равновесие каждой отсечённой части, начиная от свободного конца стержня. Положения сечений показаны на рис. 1, а).

Участок 1: $0 \leq z_1 \leq 0,2 \text{ м}$

$$N(z_1) - F_1 - q \cdot z_1 = 0, \quad N(z_1) = F_1 + q \cdot z_1$$

$$N(0) = F_1 = 18 \text{ кН (стержень растянут)}$$

$$N(0,2 \text{ м}) = 18 + 50 \cdot 0,2 = 28 \text{ кН (стержень растянут)}$$

Участок 2: $0 \leq z_2 \leq 0,5 \text{ м}$

$$N(z_2) - F_1 - q \cdot 0,2 + F_2 - q \cdot z_2 = 0, \quad N(z_2) = F_1 + q \cdot 0,2 - F_2 + q \cdot z_2$$

$$N(0) = F_1 + q \cdot 0,2 - F_2 = 18 + 50 \cdot 0,2 - 35 = -7 \text{ кН (стержень сжат)}$$

$$N(0,5 \text{ м}) = -7 + q \cdot 0,5 = -7 + 50 \cdot 0,5 = 18 \text{ кН (стержень растянут)}$$

Участок 3: $0 \leq z_3 \leq 0,3 \text{ м}$

$$N(z_3) - F_1 + F_2 - q \cdot 0,7 = 0, \quad N(z_3) = F_1 - F_2 + q \cdot 0,7$$

$$N(z_3) = 18 - 35 + 50 \cdot 0,7 = 18 \text{ кН (стержень растянут)}$$

На основании полученных значений строим эпюру продольных сил (рис. 1, б)).

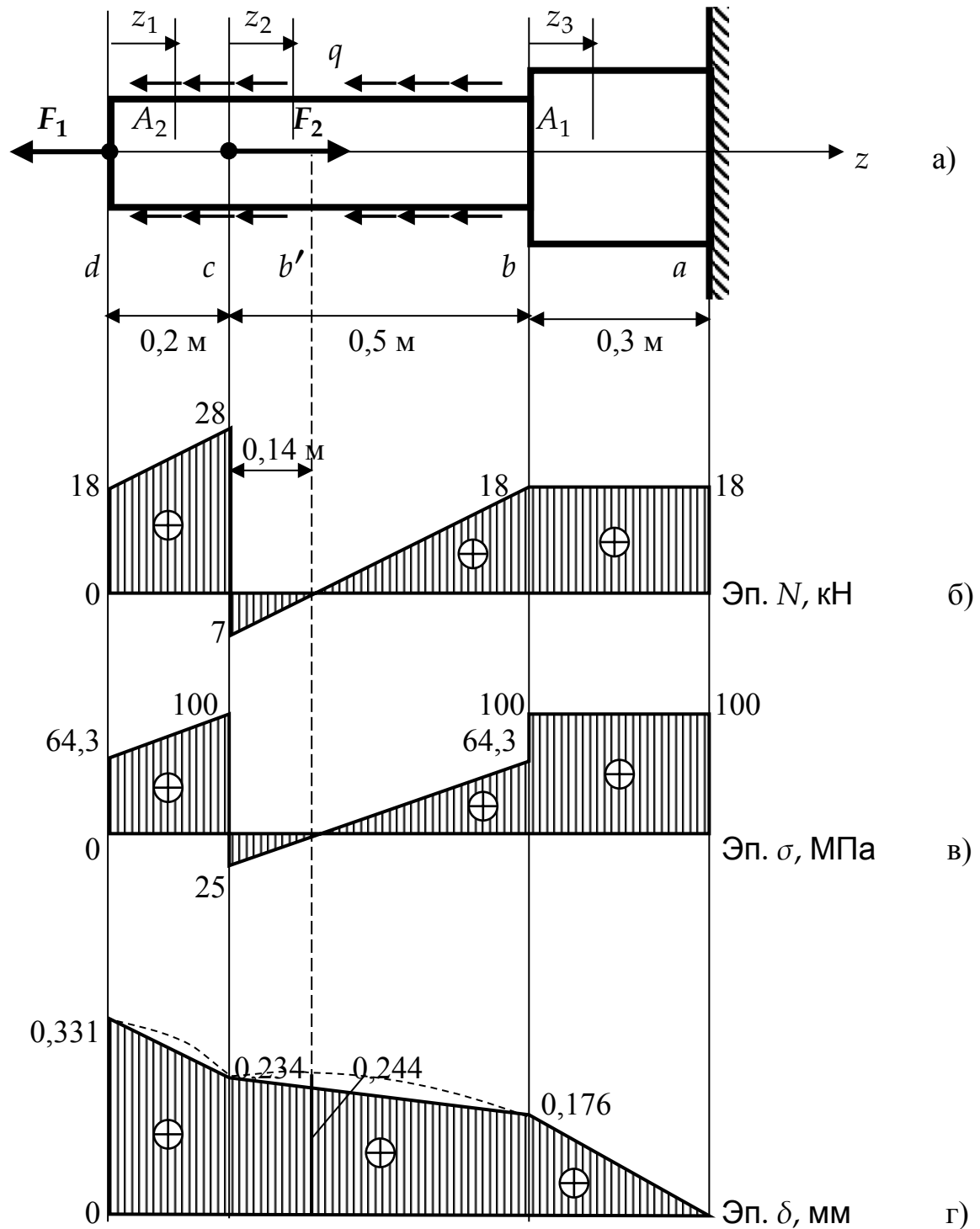


Рис. 1. Схема ступенчатого стержня для расчета на растяжение и сжатие и эпюры силы N , напряжений σ и перемещений δ .

2. Расчёт диаметров ступенчатого стержня.

По эпюре продольных сил для каждой из ступеней стержня определяем наибольшие по абсолютной величине растягивающие и сжимающие продольные силы.

Ступень II (участки 1 и 2):

$$|N_{max}^p| = 28 \text{ кН} - \text{растяжение}; \quad |N_{max}^c| = 7 \text{ кН} - \text{сжатие}$$

Из условия прочности при растяжении (сжатии) определяем площади поперечных сечений второй ступени по допускаемым напряжениям на растяжение и сжатие:

$$A_2^p = \frac{|N_{max}^p|}{[\sigma^p]} = \frac{28 \cdot 10^3}{100 \cdot 10^6} = 2,8 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 = 2,8 \text{ см}^2$$

$$A_2^c = \frac{|N_{max}^c|}{[\sigma^c]} = \frac{7 \cdot 10^3}{350 \cdot 10^6} = 2 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2 = 0,2 \text{ см}^2$$

Окончательно принимаем большую площадь:

$$A_2 = 2,8 \text{ см}^2; \quad d_2 = \sqrt{\frac{4A_2}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 2,8}{3,14}} = 1,9 \text{ см} = 19 \text{ мм}$$

Ступень I (участок 3):

$$|N_{max}^p| = 18 \text{ кН} - \text{растяжение}$$

$$A_1 = A_1^p = \frac{|N_{max}^p|}{[\sigma^p]} = \frac{18 \cdot 10^3}{100 \cdot 10^6} = 1,8 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 = 1,8 \text{ см}^2$$

$$d_1 = \sqrt{\frac{4A_1}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 1,8}{3,14}} = 1,5 \text{ см} = 15 \text{ мм}$$

3. Построение эпюры нормальных напряжений

Определяем нормальные напряжения на каждом участке стержня при выбранных площадях сечения стержня.

Участок 1: $0 \leq z_1 \leq 0,2 \text{ м}$

$$\sigma(z_1) = \frac{N(z_1)}{A_2}$$

$$\sigma(0) = \frac{N(0)}{A_2} = \frac{18 \cdot 10^3}{2,8 \cdot 10^{-4}} = 6,43 \cdot 10^7 \text{ Па} = 64,3 \text{ МПа}$$

$$\sigma(0,2) = \frac{N(0,2)}{A_2} = \frac{28 \cdot 10^3}{2,8 \cdot 10^{-4}} = 10^8 \text{ Па} = 100 \text{ МПа}$$

Участок 2: $0 \leq z_2 \leq 0,5 \text{ м}$

$$\sigma(z_2) = \frac{N(z_2)}{A_2}$$

$$\sigma(0) = \frac{N(0)}{A_2} = \frac{-7 \cdot 10^3}{2,8 \cdot 10^{-4}} = -2,5 \cdot 10^7 \text{ Па} = -25 \text{ МПа}$$

$$\sigma(0,5) = \frac{N(0,5)}{A_2} = \frac{18 \cdot 10^3}{2,8 \cdot 10^{-4}} = 6,43 \cdot 10^7 \text{ Па} = 64,3 \text{ МПа}$$

Участок 3: $0 \leq z_3 \leq 0,3 \text{ м}$

$$\sigma(z_3) = \frac{N(z_3)}{A_1} = \frac{18 \cdot 10^3}{1,8 \cdot 10^{-4}} = 10^8 \text{ Па} = 100 \text{ МПа}$$

По результатам расчёта строим эпюру нормальных напряжений (рис. 1, в)).

4. Построение эпюры перемещений.

Определяем абсолютные продольные деформации участков стержня. Удлинения силовых участков с постоянной продольной силой определяем по формуле:

$$\Delta l = \frac{Nl}{EA},$$

а участков с переменной силой – по формуле

$$\Delta l = \frac{1}{EA} \int_0^l N(z) dz.$$

Участок 1: $0 \leq z_1 \leq 0,2 \text{ м}$

$$\Delta l_1 = \frac{1}{EA_2} \int_0^{0,2 \text{ м}} N(z_1) dz_1 = \frac{1}{EA_2} \int_0^{0,2 \text{ м}} (F_1 + q \cdot z_1) dz_1 = \frac{F_1 \cdot 0,2 + \frac{q \cdot 0,2^2}{2}}{EA_2}$$

$$\Delta l_1 = \frac{18 \cdot 0,2 + \frac{50 \cdot 0,2^2}{2}}{1,7 \cdot 10^{11} \cdot 2,8 \cdot 10^{-4}} \cdot 10^3 = 9,7 \cdot 10^{-5} \text{ м} = 0,097 \text{ мм}$$

Участок 2: $0 \leq z_2 \leq 0,5 \text{ м}$

$$\Delta l_2 = \frac{1}{EA_2} \int_0^{0,5 \text{ м}} N(z_2) dz_2 = \frac{1}{EA_2} \int_0^{0,5 \text{ м}} (F_1 + q \cdot 0,2 - F_2 + q \cdot z_2) dz_2$$

$$\Delta l_2 = \frac{(F_1 + q \cdot 0,2 - F_2) \cdot 0,5 + \frac{q \cdot 0,5^2}{2}}{EA_2}$$

$$\Delta l_2 = \frac{-7 \cdot 0,5 + \frac{50 \cdot 0,5^2}{2}}{1,7 \cdot 10^{11} \cdot 2,8 \cdot 10^{-4}} \cdot 10^3 = 5,8 \cdot 10^{-5} \text{ м} = 0,058 \text{ мм}$$

Участок 3: $0 \leq z_3 \leq 0,3 \text{ м}$

$$\Delta l_3 = \frac{N(z_3) \cdot 0,3}{EA_1} = \frac{18 \cdot 10^3 \cdot 0,3}{1,7 \cdot 10^{11} \cdot 1,8 \cdot 10^{-4}} = 1,76 \cdot 10^{-4} \text{ м} = 0,176 \text{ мм}$$

Обозначаем сечения и определяем продольные перемещения сечений, расположенных на границах участков.

$$\delta_a = 0 \text{ (сечение жёстко закреплено)}$$

$$\delta_b = \delta_a + \Delta l_3 = 0,176 \text{ мм}$$

$$\delta_c = \delta_b + \Delta l_2 = 0,176 + 0,058 = 0,234 \text{ мм}$$

$$\delta_d = \delta_c + \Delta l_1 = 0,234 + 0,097 = 0,331 \text{ мм}$$

На участке 2 продольная сила меняет знак, следовательно, при $N(z_2) = 0$ на эпюре перемещений будет наблюдаться экстремум. Определяем соответствующую координату:

$$z_{\text{экс}} = -\frac{F_1 + q \cdot 0,2 - F_2}{q} = -\frac{-7}{50} = 0,14 \text{ м}$$

Перемещение экстремального сечения b' :

$$\delta_{b'} = \delta_b + \Delta l_{bb'}; \quad \Delta l_{bb'} = \Delta l_2 - \Delta l_{cb'}$$

$$\Delta l_{cb'} = \frac{-7 \cdot 0,14 + \frac{50 \cdot 0,14^2}{2}}{1,7 \cdot 10^{11} \cdot 2,8 \cdot 10^{-4}} \cdot 10^3 = -1,03 \cdot 10^{-5} \text{ м} = -0,01 \text{ мм}$$

$$\Delta l_{bb'} = 0,058 + 0,01 = 0,068 \text{ мм}; \quad \delta_{c'} = 0,176 + 0,068 = 0,244 \text{ мм}$$

По результатам расчёта строим эпюру продольных перемещений δ (рис. 1, г)).