

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Тульский государственный университет»

Институт горного дела и строительства
Кафедра «Строительство, строительные материалы и конструкции»

Утверждено на заседании кафедры
«Строительство, строительные материалы и
конструкции»

« 20 » января 2021 г., протокол № 5

Заведующий кафедрой

 А.А. Трещев

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
по выполнению расчетно-графической работы №1
по дисциплине (модулю)
«Современные методы расчета строительных конструкций»

основной профессиональной образовательной программы
высшего образования – программы бакалавриата

по направлению подготовки
08.03.01 Строительство

с направленностью (профилем)
Промышленное и гражданское строительство

Формы обучения: заочная

Идентификационный номер образовательной программы: 080301-05-21

Тула 2021 год

Разработчик методических указаний

Судакова И.А., доцент, к.т.н.
(ФИО, должность, ученая степень, ученое звание)


(подпись)

ВВЕДЕНИЕ

1 Общие замечания

При изучении дисциплин кафедры наибольшие трудности у студентов возникают при решении практических задач.

Вместе с тем именно решение задач в значительной степени способствует развитию инженерного мышления у студентов, приобретению ими необходимых навыков расчетов элементов инженерных конструкций. В настоящей методической разработке подробно рассмотрены решения задач по дисциплине «Современные методы расчета строительных конструкций», а также изложены требования по выполнению и оформлению РГР, предусмотренной рабочей программой курса для студентов.

1.2 Основные требования по выполнению РГР

1.2.1 Оформление титульного листа

РГР выполняется на стандартных листах бумаги с размерами 210 x 297 мм, скрепленных в тетрадь. Титульный лист оформляется в соответствии с требованиями ЕСКД. Все надписи на титульном листе располагаются в строго определенных местах, выполняются чертовым шрифтом или в компьютерном варианте.

Титульный лист содержит следующие надписи:

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Тульский государственный университет»
Институт горного дела и строительства
Кафедра «Строительство, строительные материалы и конструкции»

РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКАЯ РАБОТА

по дисциплине

«Современные методы расчета строительных конструкций»

по теме:

«РАСЧЕТ ПЛОСКИХ ШАРНИРНО-СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ»

Выполнил студент гр. _____ (Ф.И.О.) _____ (дата) _____ (подпись)

Проверил (науч. звание, должность) _____ (Ф.И.О.) _____ (дата) _____ (подпись)

Тула 20__ г.

1.2.2 Оформление расчетно-пояснительной записки

Расчетно-пояснительная записка должна быть достаточно краткой, без лишних подробных пояснений и теоретических выводов, имеющих в учебниках и других учебных пособиях, но не чересчур краткой, содержащей один только формулы и вычисления. В расчетно-пояснительной записке от начала до конца должна четко прослеживаться логическая связь выполняемых операций, а также должны быть отмечены основания для выполнения этих операций. Приведенные в настоящей методической разработке примеры решения отдельных задач могут послужить основой для составления записок.

Формулы, приводимые в записке, должны быть, как правило, записаны сначала в общем виде, а затем уже должна быть произведена подстановка исходных данных и выполнены необходимые вычисления. При подстановке исходных данных нужно внимательно следить

за соблюдением одинаковой размерности. После получения значения искомой (промежуточной или окончательной) величины обязательно проставляется ее размерность.

Все записи в расчетно-пояснительной записке ведутся чернилами на одной стороне листа писчей бумаги четкими разборчивым почерком.

На каждой странице оставляются поля: слева шириной 25 мм – для скрепления листов в тетрадь, и справа – 10мм.

Если у автора работы неразборчивый почерк, то записку он должен выполнять чертежным шрифтом.

Все страницы РГР должны быть последовательно пронумерованы в правой верхней части страницы арабскими цифрами. Нумерация страниц должна быть сквозной от титульного листа до последней страницы, включая чертежи (схемы). На титульном листе, который является первой страницей, номер страницы не ставится, хотя и подразумевается.

1.2.3 Выполнение графической части работы

Рисунки и чертежи в тексте пояснительной записки вычерчиваются в масштабе, с простановкой необходимых размеров. Эпюры внутренних усилий должны вычерчиваться строго под расчетной схемой (или рядом с ней). На расчетной схеме должны быть отмечены все сечения, для которых, определяются внутренние усилия; на эпюрах обязательно проставляются значения вычисленных характерных ординат. Эпюры заштриховываются тонкими линиями перпендикулярно оси элемента конструкции.

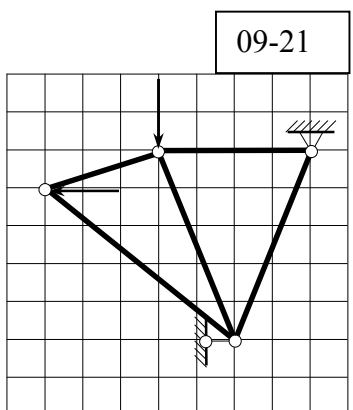
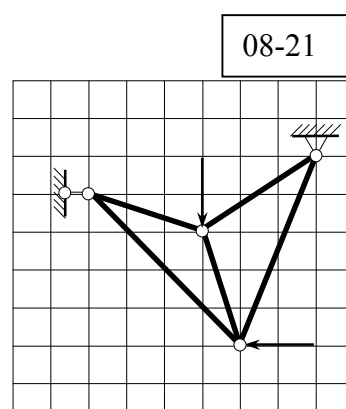
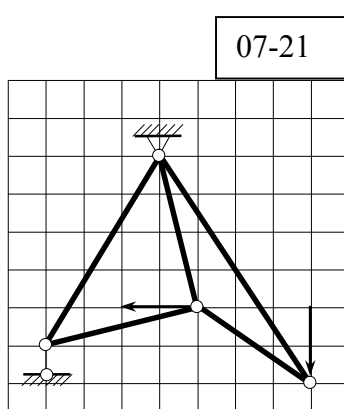
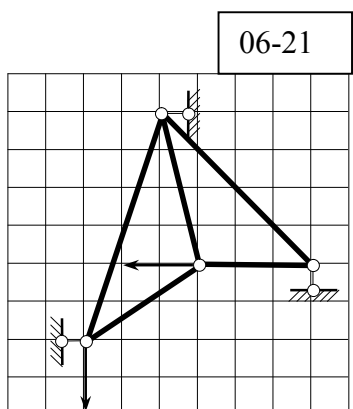
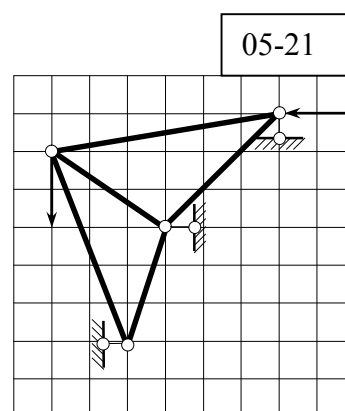
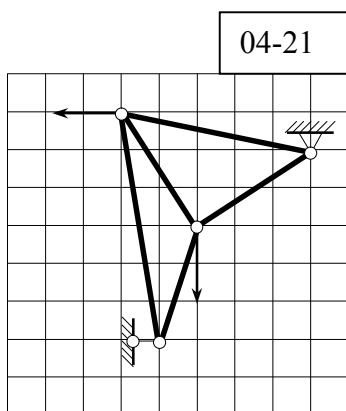
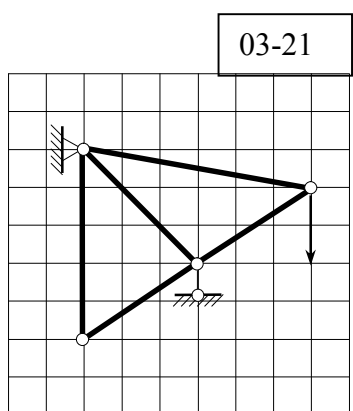
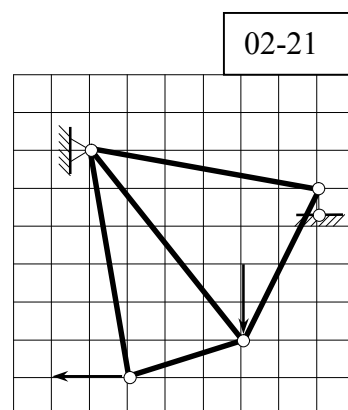
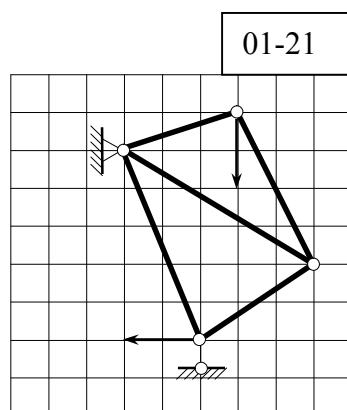
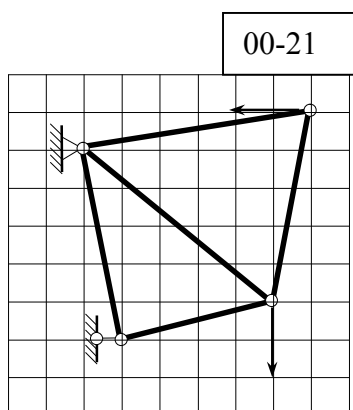
1.2.4 Защита РГР

РГР выполняется в течение семестра и оценивается после проверки работы преподавателем. Бальная оценка выставляется в соответствии с пунктом 7 рабочей программы по этой дисциплине.

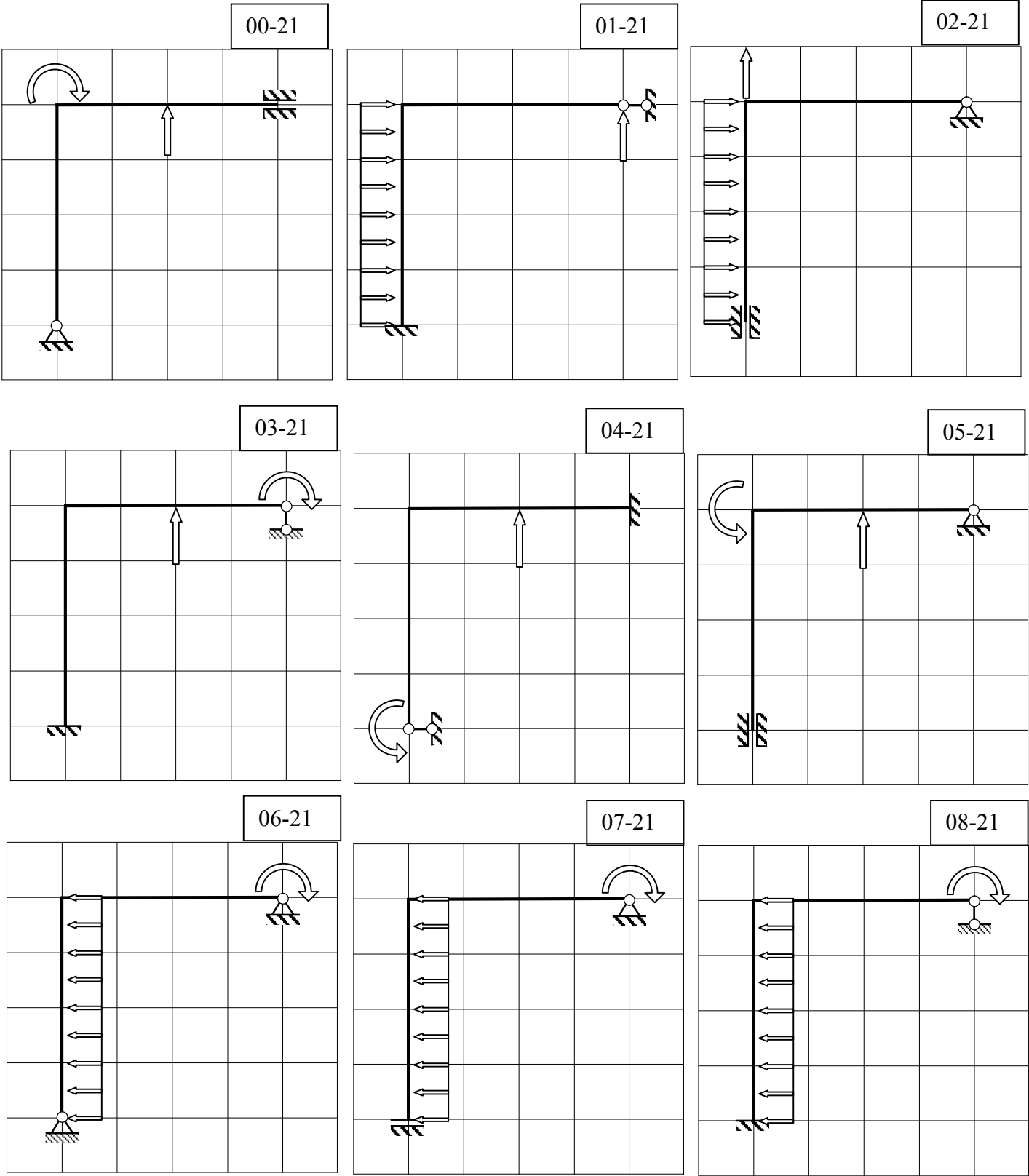
Каждым студентом РГР должна выполняться и сдаваться на проверку преподавателю в сроки, предусмотренные графиком работы студентов в текущем семестре.

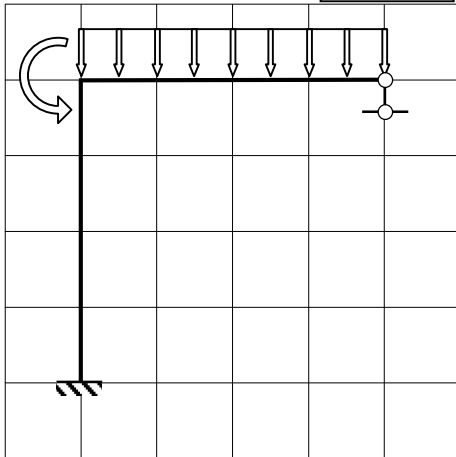
2. Задания для выполнения РГР (размеры ЗРС – каждая клеточка $a \times a$, внешние нагрузки принять любыми)

2.1. Задание для расчета фермы методом конечных элементов



2.2. Задание для расчета рамы методом конечных элементов





3. Решение и оформление типовых задач.

Расчет плоской фермы методом конечных элементов.

На рис.1 приведена ЗРС фермы. На этом примере требуется определить усилия в стержнях фермы методом конечных элементов.

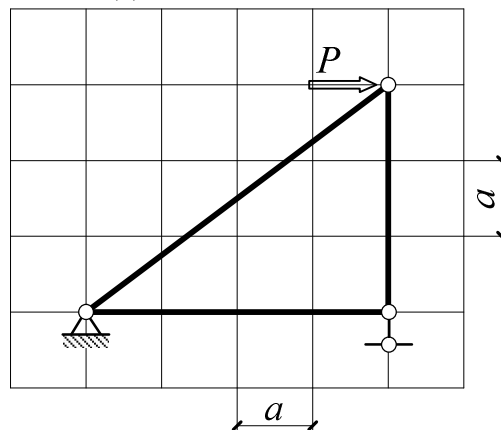


Рис.1. Заданная расчетная схема фермы

1. Разработка схемы дискретизации.

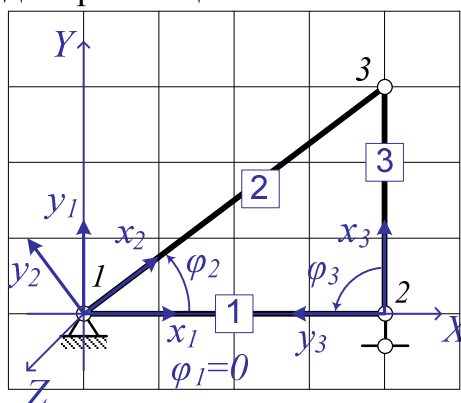


Рис.2. Схема дискретизации

1.1. Обозначение ГСК - глобальной системы координат XYZ . Начало координат находится в самой нижней и самой левой точке фермы. Ось X направлена вправо, Y - вверх, Z - смотрит на нас.

1.2. Нумерация узлов фермы (см. рис.2). Обычно слева направо, снизу вверх. В фермах с большим количеством узлов надо стремиться к тому, чтобы разность между номерами узлов одного конечного элемента была минимальной.

1.3. Нумерация КЭ - конечных элементов соответствует нумерации узлов фермы. Первым нумеруют КЭ, которые берут свое начало в точке 1. Первый элемент 1-2, второй - 1-3. Третий элемент 2-3.

1.4. Обозначение ЛСК для каждого КЭ - локальной системы координат x, y, z . Начало координат находится в начальном узле КЭ. Ось x направлена вдоль КЭ, y - против часовой стрелки под углом 90° к оси x , z - смотрит на нас.

1.5. Обозначение направляющих углов φ для каждого КЭ. Этот угол определяется от оси X ГСК против часовой стрелки до совмещения с осью x ЛСК каждого КЭ (см. рис.2).

2. Обработка узлов дискретизации в глобальной системе координат.

Таблица 1

Координаты узлов дискретизации			
№ узла	1	2	3
x, a	0	4	4
y, a	0	0	3

Определение вспомогательных величин проводят по формулам аналитической геометрии:

i - номер начального узла КЭ; j - номер конечного узла КЭ; $i < j$;

$$l_{ij} = \sqrt{(X_j - X_i)^2 + (Y_j - Y_i)^2}; \cos \varphi_{ij} = \frac{X_j - X_i}{l_{ij}}; \sin \varphi_{ij} = \frac{Y_j - Y_i}{l_{ij}}.$$

$$l_{12} = \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2} = \sqrt{(4a - 0)^2 + (0 - 0)^2} = 4a;$$

$$\cos \varphi_{12} = \frac{X_2 - X_1}{l_{12}} = \frac{4a - 0}{4a} = 1; \sin \varphi_{12} = \frac{Y_2 - Y_1}{l_{12}} = \frac{0 - 0}{4a} = 0.$$

$$l_{13} = \sqrt{(X_3 - X_1)^2 + (Y_3 - Y_1)^2} = \sqrt{(4a - 0)^2 + (3a - 0)^2} = 5a;$$

$$\cos \varphi_{13} = \frac{X_3 - X_1}{l_{13}} = \frac{4a - 0}{5a} = 0,8; \sin \varphi_{13} = \frac{Y_3 - Y_1}{l_{13}} = \frac{3a - 0}{5a} = 0,6.$$

$$l_{23} = \sqrt{(X_3 - X_2)^2 + (Y_3 - Y_2)^2} = \sqrt{(4a - 4a)^2 + (3a - 0)^2} = 3a;$$

$$\cos \varphi_{23} = \frac{X_3 - X_2}{l_{23}} = \frac{4a - 4a}{3a} = 0; \sin \varphi_{23} = \frac{Y_3 - Y_2}{l_{23}} = \frac{3a - 0}{3a} = 1.$$

Вычисления заносят в таблицу 2.

Таблица 2

Обработка узлов дискретизации					
№ КЭ	i	j	l_k, a	$\cos \varphi_k$	$\sin \varphi_k$

1	1	2	4	1	0
2	1	3	5	0,8	0,6
3	2	3	3	0	1

Матрицы преобразования для стержневого конечного элемента имеют вид:

$$(p)_k = \begin{pmatrix} \cos \varphi_k & 0 \\ \sin \varphi_k & 0 \\ 0 & \cos \varphi_k \\ 0 & \sin \varphi_k \end{pmatrix};$$

$$(p)_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; (p)_2 = \begin{pmatrix} 0,8 & 0 \\ 0,6 & 0 \\ 0 & 0,8 \\ 0 & 0,6 \end{pmatrix}; (p)_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Формирование матриц жесткости в глобальной системе координат.

В локальной системе координат матрица жесткости отдельного стержневого КЭ имеет вид:

$$[k_k^l] = \frac{E \cdot F}{l_k} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix},$$

где EF - жесткость конечного элемента на растяжение-сжатие (принимается одинаковой для всех элементов), тогда для каждого КЭ, подставляя данные из таблицы 2, получим:

$$[k_1^l] = \frac{EF}{4a} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}; [k_2^l] = \frac{EF}{5a} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}; [k_3^l] = \frac{EF}{3a} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Матрицы жесткости из локальной системы координат преобразовываются в глобальную систему координат по формуле:

$$[k_k^g] = (p)_k \cdot [k_k^l] \cdot (p)_k^T.$$

$$[k_1^g] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{EF}{4a} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{EF}{4a} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$[k_2^g] = \begin{pmatrix} 0,8 & 0 \\ 0,6 & 0 \\ 0 & 0,8 \\ 0 & 0,6 \end{pmatrix} \cdot \frac{EF}{5a} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,8 & 0,6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,8 & 0,6 \end{pmatrix} = \frac{EF}{5a} \begin{bmatrix} 0,64 & 0,48 & -0,64 & -0,48 \\ 0,48 & 0,36 & -0,48 & -0,36 \\ -0,64 & -0,48 & 0,64 & 0,48 \\ -0,48 & -0,36 & 0,48 & 0,36 \end{bmatrix}$$

;

$$[k_3^r] = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{EF}{3a} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{EF}{3a} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Формирование матрицы жесткости для ансамбля конечных элементов в ГСК.

Обозначим перемещения узлов фермы в ГСК. Для этого в каждом узле фермы обозначим по две степени свободы - горизонтальную и вертикальную. Пока значения этих перемещений неизвестны, они принимаются положительными, то есть направлены вдоль положительных полуосей ГСК. Так как на ферму наложены внешние связи, прикрепляющие ее к плоскости, то некоторые из этих перемещений отсутствуют. В точке 1 запрещены оба перемещения - горизонтальное и вертикальное, а в точке 2 - только вертикальное. Таким образом, получаем следующие перемещения фермы в ГСК: первое - горизонтальное в точке 2, второе - горизонтальное в точке 3 и третье - вертикальное в точке 3. Следует заметить, что в одной точке сначала нумеруется горизонтальное, а потом вертикальное перемещение.

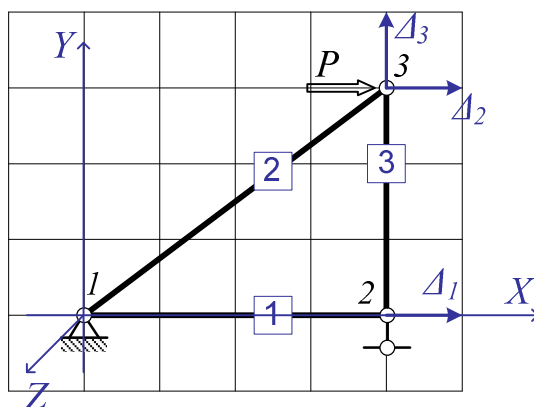
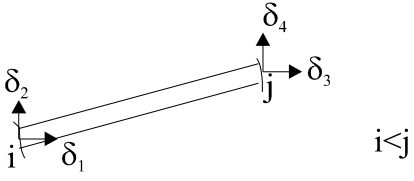


Рис. 3 Векторы перемещений в глобальной системе координат

Таблица 3

Матрица индексов ансамбля КЭ

№ КЭ				
	δ ₁	δ ₂	δ ₃	δ ₄
1	0	0	1	0
2	0	0	2	3
3	1	0	2	3

Формирование матрицы жесткости.

Матрица жесткости ансамбля КЭ имеет размер 3x3 (по числу независимых перемещений в матрице индексов):

$$[K] = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix}.$$

Элементы матрицы вычисляются по формулам:

$$K_{11} = k_{1,33}^r + k_{3,11}^r = \frac{EF}{4a}(1) + \frac{EF}{3a}(0) = 0,25 \frac{EF}{a};$$

$$K_{12} = k_{3,13}^r = \frac{EF}{3a}(0) = 0;$$

$$K_{13} = k_{3,14}^r = \frac{EF}{3a}(0) = 0;$$

$$K_{22} = k_{2,33}^r + k_{3,33}^r = \frac{EF}{5a}(0,64) + \frac{EF}{3a}(0) = 0,128 \frac{EF}{a};$$

$$K_{23} = k_{2,34}^r + k_{3,34}^r = \frac{EF}{5a}(0,48) + \frac{EF}{3a}(0) = 0,096 \frac{EF}{a};$$

$$K_{33} = k_{2,44}^r + k_{3,44}^r = \frac{EF}{5a}(0,36) + \frac{EF}{3a}(1) = 0,4053 \frac{EF}{a};$$

4. Разрешающие уравнения метода конечных элементов.

Для решения задачи методом конечных элементов с использованием стержневых конечных элементов разрешающая система уравнений имеет вид:

$$-[K] \cdot \{\Delta\} + \{P\} = \{0\}.$$

$$\{P\} = P \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} - \text{вектор внешних нагрузок.}$$

$$-\frac{EF}{a} \begin{bmatrix} 0,25 & 0 & 0 \\ 0 & 0,128 & 0,096 \\ 0 & 0,096 & 0,4053 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \end{Bmatrix} + P \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Решение СЛАУ

Переносим вектор внешних нагрузок в правую часть уравнения

$$\frac{EF}{a} \begin{bmatrix} 0,25 & 0 & 0 \\ 0 & 0,128 & 0,096 \\ 0 & 0,096 & 0,4053 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \end{Bmatrix} = P \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

и решаем систему линейных алгебраических уравнений:

$$\Delta_1 = 0; \Delta_2 = 9,5 \frac{Pa}{EF}; \Delta_3 = -2,25 \frac{Pa}{EF}.$$

5. Формирование матрицы узловых перемещений КЭ в ЛСК.

Так как перемещения в ЛСК связаны с перемещениями в ГСК, то потребуются составляющие векторов узловых перемещений в ГСК для каждого КЭ. Используя решение системы уравнений МКЭ с учетом данных таблицы индексов (табл.3), можно записать:

$$\{\delta_l^I\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \frac{Pa}{EF}; \{\delta_2^I\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 9,5 \\ -2,25 \end{Bmatrix} \frac{Pa}{EF}; \{\delta_3^I\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 9,5 \\ -2,25 \end{Bmatrix} \frac{Pa}{EF}.$$

$$\{\delta_l^II\} = (p)_l^T \cdot \{\delta_l^I\} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \frac{Pa}{EF} = \frac{Pa}{EF} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix};$$

$$\{\delta_2^II\} = (p)_2^T \cdot \{\delta_2^I\} = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,8 & 0,6 \end{pmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 9,5 \\ -2,25 \end{Bmatrix} \frac{Pa}{EF} = \frac{Pa}{EF} \begin{Bmatrix} 0 \\ 6,25 \end{Bmatrix};$$

$$\{\delta_3^II\} = (p)_3^T \cdot \{\delta_3^I\} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 9,5 \\ -2,25 \end{Bmatrix} \frac{Pa}{EF} = \frac{Pa}{EF} \begin{Bmatrix} 0 \\ -2,25 \end{Bmatrix};$$

Вычисление усилий:

$$\{N_l^II\} = [k_l^II] \cdot \{\delta_l^II\} = \frac{EF}{4a} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{Pa}{EF} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = P \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix};$$

$$\{N_2^II\} = [k_2^II] \cdot \{\delta_2^II\} = \frac{EF}{5a} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{Pa}{EF} \begin{Bmatrix} 0 \\ 6,25 \end{Bmatrix} = P \begin{Bmatrix} -1,25 \\ 1,25 \end{Bmatrix};$$

$$\{N_3^II\} = [k_3^II] \cdot \{\delta_3^II\} = \frac{EF}{3a} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{Pa}{EF} \begin{Bmatrix} 0 \\ -2,25 \end{Bmatrix} = P \begin{Bmatrix} 0,75 \\ -0,75 \end{Bmatrix}.$$

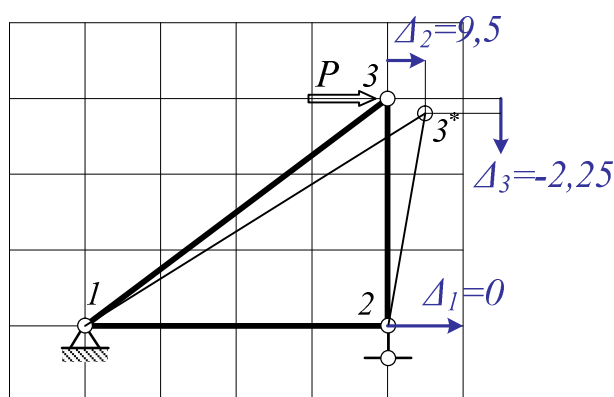


Рис.4. Схема деформирования заданной расчетной схемы

6. Проверка равновесия узлов фермы

Определим опорные реакции фермы от заданной внешней нагрузки (см. рис. 5)

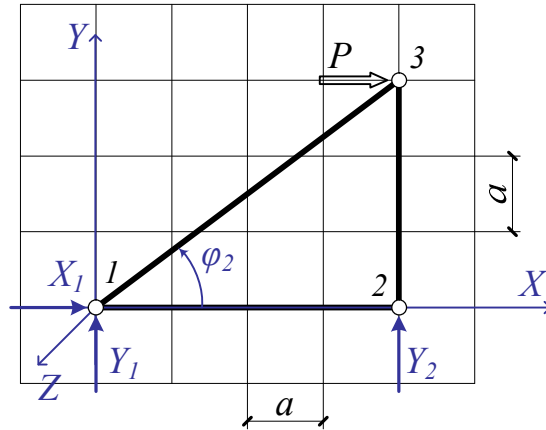


Рис.5. Опорные реакции заданной расчетной схемы

$$\begin{aligned} & ; X_1 = -P; \\ \sum m_{O1} &= -P \cdot 3a + Y_2 \cdot 4a = 0; Y_2 = 0,75P; \\ \sum m_{O2} &= -P \cdot 3a - Y_1 \cdot 4a = 0; Y_1 = -0,75P. \end{aligned}$$

Проверим равновесие узлов фермы методами строительной механики (см. рис. 6):

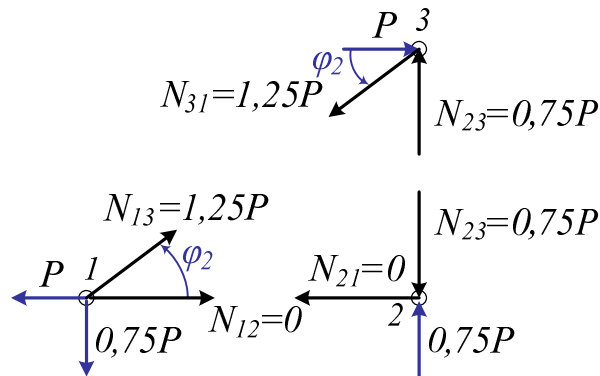


Рис.6. Равновесие узлов фермы

Узел 1.

$$\begin{aligned} \sum Y &= -0,75P + N_{13} \cdot \sin \varphi_2 = -0,75P + 1,25P \cdot 0,6 = 0; \\ -0,75P + 0,75P &= 0. \end{aligned} \quad ; -P + P = 0;$$

Узел 2.

$$\begin{aligned} \sum X &= -N_{21} = 0; \\ \sum Y &= 0,75P - N_{23} = 0,75P - 0,75P = 0. \end{aligned}$$

Узел 3.

$$\begin{aligned} \sum X &= P - N_{31} \cdot \cos \varphi_2 = P - 1,25P \cdot 0,8 = 0; P - P = 0; \\ \sum Y &= 0,75P - N_{31} \cdot \sin \varphi_2 = 0,75P - 1,25 \cdot 0,6 = 0; 0,75P - 0,75P = 0. \end{aligned}$$

Проверка выполняется.

ВЫВОД

Проверка полученных результатов показывает, что условия равновесия выполнены.

Характер перемещений узлов также соответствует представлению о поведении заданной расчётной схемы под действием внешней силы, направленной горизонтально.

Расчет плоской рамы методом конечных элементов.

На рис.1 приведена ЗРС рамы. На этом примере требуется определить внутренние усилия в раме методом конечных элементов.

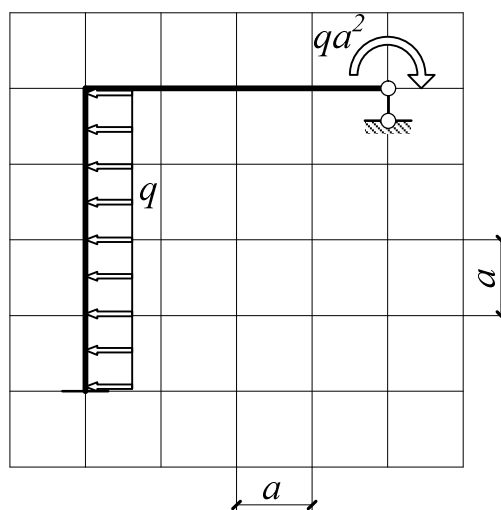


Рис.1. Заданная расчетная схема рамы.

1. Разработка схемы дискретизации.

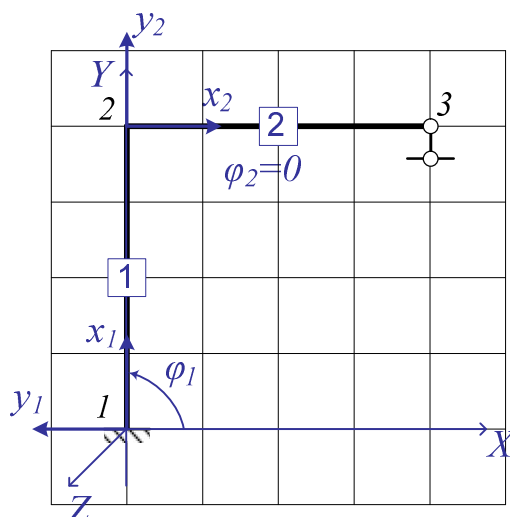


Рис.2. Схема дискретизации.

2. Обработка узлов дискретизации в глобальной системе координат.

Таблица 1

Координаты узлов дискретизации

№ узла	1	2	3
x, a	0	0	4
y, a	0	4	4

Определение вспомогательных величин проводят по формулам аналитической геометрии:

$$l_{ij} = \sqrt{(X_j - X_i)^2 + (Y_j - Y_i)^2};$$

$$\cos \varphi_{ij} = \frac{X_j - X_i}{l_{ij}}; \quad \sin \varphi_{ij} = \frac{Y_j - Y_i}{l_{ij}}.$$

Вычисления заносят в таблицу 2.

Таблица 2

Обработка узлов дискретизации

№ КЭ	i	j	l_k, a	$\sin \varphi_k$	$\cos \varphi_k$
1	1	2	4	1	0
2	2	3	4	0	1

Матрицы преобразования для балочного конечного элемента имеют вид:

$$(p)_k = \begin{pmatrix} -\sin \varphi_k & 0 & 0 & 0 \\ \cos \varphi_k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sin \varphi_k & 0 \\ 0 & 0 & \cos \varphi_k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$(p)_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad (p)_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Формирование матриц жесткости в глобальной системе координат.

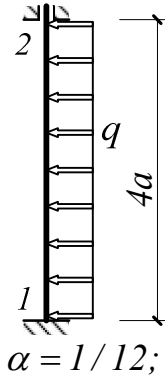
В локальной системе координат матрица жесткости для балочного конечного элемента записывается следующим образом (EJ - жесткость стержней на изгиб, принимается одинаковой для всех участков):

$$[k_k^n] = \frac{E \cdot J}{l_k^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix};$$

$$[k_1^n] = [k_2^n] = \frac{EJ}{(4a)^3} \begin{bmatrix} 12 & 6 \cdot 4a & -12 & 6 \cdot 4a \\ 6 \cdot 4a & 4 \cdot (4a)^2 & -6 \cdot 4a & 2 \cdot (4a)^2 \\ -12 & -6 \cdot 4a & 12 & -6 \cdot 4a \\ 6 \cdot 4a & 2 \cdot (4a)^2 & -6 \cdot 4a & 4 \cdot (4a)^2 \end{bmatrix} = \frac{EJ}{16a^3} \begin{bmatrix} 3 & 6a & -3 & 6a \\ 6a & 16a^2 & -6a & 8a^2 \\ -3 & -6a & 3 & -6a \\ 6a & 8a^2 & -6a & 16a^2 \end{bmatrix}$$

4. Вычисление реакций на внутрипролетную нагрузку, приложенную к КЭ.

Из ЗРС видно, что к первому КЭ приложена распределенная нагрузка. Обратившись к табличным эпюрам метода перемещений, можно определить значения элементов вектора реакций в виде:



$$\alpha = 1/12;$$

$$\gamma = 1/2;$$

$$M_1 = M_2 = \alpha q l^2 = \frac{1}{12} q (4a)^2 = 1,333 q a^2;$$

$$Q_1 = Q_2 = \gamma q l = \frac{1}{2} q \cdot 4a = 2qa.$$

$$\{S_{q,1}^n\} = \begin{Bmatrix} Q_1^n \\ M_1^n \\ Q_2^n \\ M_2^n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -2qa \\ -1,333qa^2 \\ -2qa \\ 1,333qa^2 \end{Bmatrix}; \quad \{S_{q,2}^n\} = \begin{Bmatrix} Q_2^n \\ M_2^n \\ Q_3^n \\ M_3^n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

5. Матрицы жесткости из локальной системы координат преобразовываются в глобальную систему координат по формуле:

$$[k_k^r] = (p)_k \cdot [k_k^n] \cdot (p)_k^T.$$

$$\begin{aligned} [k_I^r] &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{EJ}{16a^3} \begin{bmatrix} 3 & 6a & -3 & 6a \\ 6a & 16a^2 & -6a & 8a^2 \\ -3 & -6a & 3 & -6a \\ 6a & 8a^2 & -6a & 16a^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{EJ}{16a^3} \begin{pmatrix} -3 & -6a & 3 & -6a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6a & 16a^2 & -6a & 8a^2 \\ 3 & 6a & -3 & 6a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6a & 8a^2 & -6a & 16a^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{EJ}{16a^3} \begin{bmatrix} 3 & 0 & -6a & -3 & 0 & -6a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6a & 0 & 16a^2 & 6a & 0 & 8a^2 \\ -3 & 0 & 6a & 3 & 0 & 6a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6a & 0 & 8a^2 & 6a & 0 & 16a^2 \end{bmatrix} \\
[k_2^I] &= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \cdot \frac{EJ}{16a^3} \begin{bmatrix} 3 & 6a & -3 & 6a \\ 6a & 16a^2 & -6a & 8a^2 \\ -3 & -6a & 3 & -6a \\ 6a & 8a^2 & -6a & 16a^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \\
&= \frac{EJ}{16a^3} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 6a & -3 & 6a \\ 6a & 16a^2 & -6a & 8a^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -6a & 3 & -6a \\ 6a & 8a^2 & -6a & 16a^2 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \\
&= \frac{EJ}{16a^3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 6a & 0 & -3 & 6a \\ 0 & 6a & 16a^2 & 0 & -6a & 8a^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6a & 0 & 3 & -6a \\ 0 & 6a & 8a^2 & 0 & -6a & 16a^2 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

4. Матрицы реакций на внутрипролетную нагрузку в глобальной системе координат:

$$\{S_{q,l}^n\} = \begin{Bmatrix} Q_l^n \\ M_l^n \\ Q_2^n \\ M_2^n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -2qa \\ -1,333qa^2 \\ -2qa \\ 1,333qa^2 \end{Bmatrix};$$

$$\{S_{q,1}^{\Gamma}\} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2qa \\ -1,333qa^2 \\ -2qa \\ 1,333qa^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1,333a \\ 2 \\ 0 \\ 1,333a \end{pmatrix} qa;$$

$$\{S_{q,2}^{\Gamma}\} = \begin{pmatrix} Q_2^{\Gamma} \\ M_2^{\Gamma} \\ Q_3^{\Gamma} \\ M_3^{\Gamma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \{S_{q,2}^{\Gamma}\} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

5. Формирование матрицы жесткости для ансамбля КЭ в ГСК.

Обозначим перемещения узлов рамы в ГСК. Для этого в каждом узле рамы обозначим по три степени свободы - горизонтальную, вертикальную и угловую. Пока значения этих перемещений неизвестны, они принимаются положительными, то есть направлены вдоль положительных полуосей ГСК, поворот - против часовой стрелки. Так как на раму наложены внешние связи, прикрепляющие ее к плоскости, то некоторые из этих перемещений отсутствуют. В точке 1 запрещены три перемещения - горизонтальное, вертикальное и угловое, а в точке 3 - только вертикальное. Кроме этого, перемещениями, возникающими вследствие растяжения-сжатия КЭ пренебрегаем. Таким образом, получаем следующие перемещения рамы в ГСК: первое - горизонтальное в точке 2 и 3 (то есть эти перемещения будут одинаковыми), второе - угловое в точке 2 и третье - угловое в точке 3. Следует заметить, что в одной точке сначала нумеруется горизонтальное, потом вертикальное, а затем угловое перемещение.

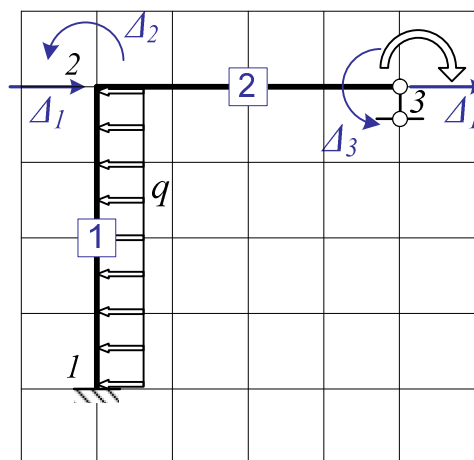


Рис.3. Векторы перемещений в глобальной системе координат.

Таблица 3

Матрица индексов ансамбля КЭ

№ КЭ						
	δ_1	δ_2	δ_3	δ_4	δ_5	δ_6
1	0	0	0	1	0	2
2	1	0	2	1	0	3

Формирование матрицы жесткости.

Матрица жесткости ансамбля конечных элементов имеет размер 3x3 (по числу независимых перемещений в матрице индексов):

$$[K] = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix}.$$

Матрица вычисляется по формулам:

$$K_{11} = k_{1,44}^{\Gamma} + k_{2,11}^{\Gamma} + k_{2,44}^{\Gamma} = \frac{EJ}{16a^3}(3) + 0 + 0 = 0,1875 \frac{EJ}{a^3};$$

$$K_{12} = k_{1,46}^{\Gamma} + k_{2,13}^{\Gamma} + k_{2,43}^{\Gamma} = \frac{EJ}{16a^3}(6a) + 0 + 0 = 0,375 \frac{EJ}{a^2};$$

$$K_{13} = k_{2,16}^{\Gamma} + k_{2,46}^{\Gamma} = 0 + 0 = 0;$$

$$K_{22} = k_{1,66}^{\Gamma} + k_{2,33}^{\Gamma} = \frac{EJ}{16a^3}(16a^2) + \frac{EJ}{16a^3}(16a^2) = 2 \frac{EJ}{a};$$

$$K_{23} = k_{2,36}^{\Gamma} = \frac{EJ}{16a^3}(8a^2) = 0,5a^2 \frac{EJ}{a};$$

$$K_{33} = k_{2,66}^{\Gamma} = \frac{EJ}{16a^3}(16a^2) = 1 \frac{EJ}{a}.$$

6. Формирование вектора реакций на внутрипролетную нагрузку:

$$S_{q,1} = S_{q,1(4)}^{\Gamma} + S_{q,2(1)}^{\Gamma} + S_{q,2(4)}^{\Gamma} = 2qa + 0 + 0 = 2qa;$$

$$S_{q,2} = S_{q,1(6)}^{\Gamma} + S_{q,2(3)}^{\Gamma} = 1,333qa^2 + 0 = 1,333qa^2;$$

$$S_{q,3} = S_{q,2(6)}^{\Gamma} = 0.$$

$$[S_q] = \begin{Bmatrix} 2 \\ 1,333a \\ 0 \end{Bmatrix} qa.$$

Разрешающие уравнения метода.

$$-[K] \cdot \{A\} - \{S_q\} + \{P\} = \{0\}.$$

$$\{P\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{Bmatrix} qa^2. \text{ - вектор внешних нагрузок.}$$

$$-\frac{EJ}{a^3} \begin{bmatrix} 0,1875 & 0,375a & 0 \\ 0,375a & 2a^2 & 0,5a^2 \\ 0 & 0,5a^2 & 1a^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 2 \\ 1,333a \\ 0 \end{Bmatrix} qa + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1a \end{Bmatrix} qa = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

7. Решение СЛАУ.

$$\frac{EJ}{a^3} \begin{bmatrix} 0,1875 & 0,375a & 0 \\ 0,375a & 2a^2 & 0,5a^2 \\ 0 & 0,5a^2 & 1a^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -2qa \\ -1,333qa^2 \\ -1qa^2 \end{Bmatrix}.$$

$$\Delta_1 = -17,00qa^4 / EJ;$$

$$\Delta_2 = 3,167qa^3 / EJ;$$

$$\Delta_3 = -2,5835qa^3 / EJ.$$

8. Формирование матрицы узловых перемещений КЭ в ЛСК.

Так как перемещения в ЛСК связаны с перемещениями в ГСК, то потребуются составляющие векторов узловых перемещений в ГСК для каждого КЭ. Используя решение системы уравнений МКЭ с учетом данных таблицы индексов (табл.3), можно записать:

$$\{\delta_l^{\Gamma}\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -17,000a \\ 0 \\ 3,1667 \end{Bmatrix} \frac{qa^3}{EJ}; \quad \{\delta_2^{\Gamma}\} = \begin{Bmatrix} -17,000a \\ 0 \\ 3,1667 \\ -17,000a \\ 0 \\ -2,5835 \end{Bmatrix} \frac{qa^3}{EJ}.$$

$$\{\delta_k^{\eta}\} = (p)_k^T \cdot \{\delta_k^{\Gamma}\} = 0;$$

$$\{\delta_l^{\eta}\} = (p)_l^T \cdot \{\delta_l^{\Gamma}\} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -17,000a \\ 0 \\ 3,1667 \end{Bmatrix} \frac{qa^3}{EJ} = \frac{qa^3}{EJ} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 17,000a \\ 3,1667 \end{Bmatrix}$$

;

$$\{\delta_2^{\pi}\} = (p)_2^T \cdot \{\delta_2^{\Gamma}\} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -17,000a \\ 0 \\ 3,1667 \\ -17,000a \\ 0 \\ -2,5835 \end{pmatrix} \frac{qa^3}{EJ} = \frac{qa^3}{EJ} \begin{pmatrix} 0 \\ 3,1667 \\ 0 \\ -2,5835 \end{pmatrix}.$$

9. Вычисление усилий:

$$\{S^{\pi}\} = [k^{\pi}] \cdot \{\delta^{\pi}\} + \{S_q^{\pi}\};$$

$$\{S_I^{\pi}\} = [k_I^{\pi}] \{\delta_I^{\pi}\} + \{S_{q,I}^{\pi}\} = \frac{EJ}{16a^3} \begin{bmatrix} 3 & 6a & -3 & 6a \\ 6a & 16a^2 & -6a & 8a^2 \\ -3 & -6a & 3 & -6a \\ 6a & 8a^2 & -6a & 16a^2 \end{bmatrix} \cdot \frac{qa^3}{EJ} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 17,000a \\ 3,1667 \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} -2qa \\ -1,333qa^2 \\ -2qa \\ 1,333qa^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -6,125a \\ 0 \\ -1,875 \end{pmatrix} qa;$$

$$\{S_2^{\pi}\} = [k_2^{\pi}] \{\delta_2^{\pi}\} + \{S_{q,2}^{\pi}\} = \frac{EJ}{16a^3} \begin{bmatrix} 3 & 6a & -3 & 6a \\ 6a & 16a^2 & -6a & 8a^2 \\ -3 & -6a & 3 & -6a \\ 6a & 8a^2 & -6a & 16a^2 \end{bmatrix} \cdot \frac{qa^3}{EJ} \begin{pmatrix} 0 \\ 3,1667 \\ 0 \\ -2,5835 \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,2187 \\ 1,875a \\ -0,2187 \\ -1,000 \end{pmatrix} qa;$$

Деформированное состояние ЗРС, отвечающее полученному решению, приведено на рис.4.

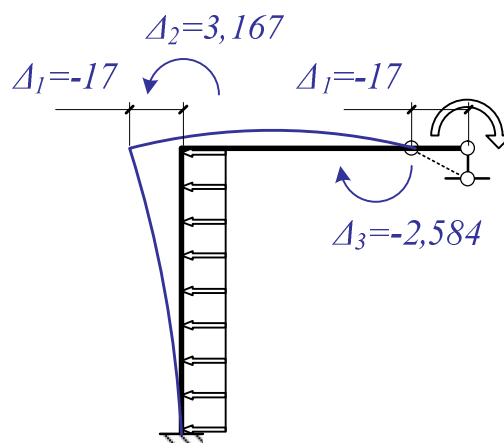


Рис.4. Схема перемещений.

На рис. 5 показан результат построения эпюр.

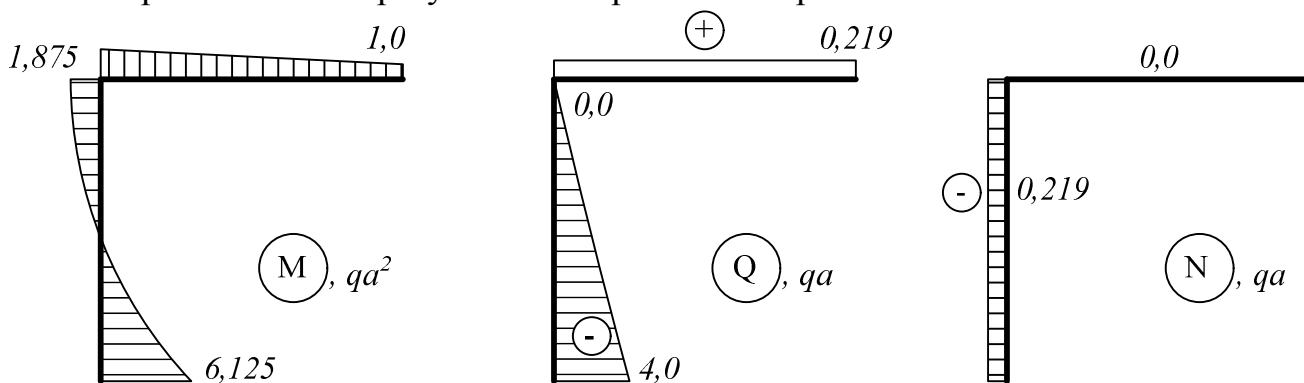
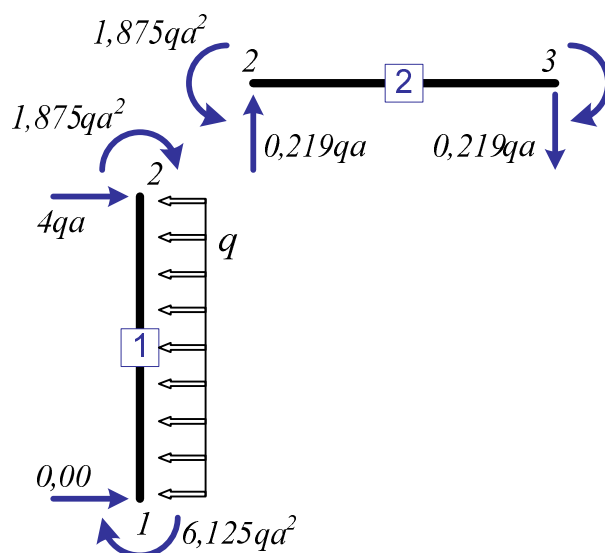


Рис.5.

10. Контроль проведенных построений осуществляется проверкой условий равновесия узлов ЗРС и ее произвольной части.



ВЫВОД

Проверка полученных результатов показывает, что условия равновесия выполнены. Характер перемещений узлов также соответствует представлению о поведении ЗРС рамы под действием сил.

5. Библиографический список

1. **Теличко, Г.Н.** Тульский государственный университет. Основы строительной механики плоских стержневых систем : Учебник для высш. и сред. учеб. заведений / Г.Н. Теличко; ТулГУ. – 2-е изд., испр. и доп. – Тула, 2004.– 440с. : ил. – (Навстречу 75-летию юбилею ТулГУ). – Библиогр. в конце кн. – ISBN 5-7679-0451-0 /в пер./ : 120.00.