

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное агентство по образованию
Южно-Уральский государственный университет

624.04(07)
С605

Соломин В.И., Шлейков И.Б.

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

Учебное пособие для решения задач

Челябинск
Издательство ЮУрГУ
2006

УДК 624.04(076.1)
С605

Одобрено
учебно-методической комиссией
архитектурно-строительного факультета

Рецензенты:
В.А. Жилкин, Б.И. Шлейков.

Соломин В.И.
С605 Строительная механика: учебное пособие по решению задач/
Соломин В.И., Шлейков И.Б. – Челябинск: Изд. ЮУрГУ, 2006. – 76 с.

ISBN 5-696-02702-4

Пособие содержит задания на курсовые работы по строительной механике статически неопределимых систем: методу сил и методу перемещений. Даны расчетные схемы балок и рам при трех воздействиях: нагрузка, вращение температуры и заданные смещения. Студент должен при всех воздействиях построить эпюры внутренних силовых факторов и найти перемещения указанных сечений. Приведены примеры решения задач.

Пособие предназначено для студентов строительных специальностей всех форм обучения.

УДК 624.04(076.1)

ISBN 5-696-02702-4

© Издательство ЮУрГУ, 2006

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	4
МЕТОД СИЛ	
1. Расчет балки методом сил. Исходные данные, схемы балок	5
2. Пример расчета балки методом сил	6
3. Расчет рамы методом сил. Исходные данные, схемы рам	14
4. Пример расчета рамы методом сил	17
5. Контрольные вопросы по методу сил	30
МЕТОД ПЕРЕМЕЩЕНИЙ	
6. Расчет балки методом перемещений, Исходные данные, схемы балок	31
7. Пример расчета балки методом перемещений	32
8. Расчет рамы методом перемещений. Исходные данные, схемы рам	41
9. Пример расчета рамы методом перемещений	45
10. Контрольные вопросы по методу перемещений	60
ПРИЛОЖЕНИЯ	
Эпюры изгибающих моментов в однопролетных статически неопределимых балках	61
Использование матриц при решении систем канонических уравнений	62
Список рекомендуемой методической литературы	65

ВВЕДЕНИЕ

Пособие предназначено для студентов строительных специальностей, изучающих курс строительной механики статически неопределимых систем.

Его цель помочь студентам в усвоении методов сил и перемещений и приобрести при этом необходимые навыки определения усилий и перемещений в статически неопределимых системах.

Пособие содержит задания на курсовые работы, включающие балки и рамы, которые требуется рассчитать методами сил и перемещений на действия: нагрузок, приращений температуры, заданных смещений. При этом студент должен построить эпюры внутренних силовых факторов, возникающих при каждом из воздействий, а также определить линейные и угловые перемещения заданных сечений. К каждому типу задач, включенных в задания, приводятся примеры их решения.

В приложении к пособию даны некоторые формулы и таблицы, необходимые для выполнения расчетов, элементарные сведения по матричным вычислениям и список рекомендуемой методической литературы.

Пособие может быть использовано на практических занятиях по строительной механике, при промежуточном контроле знаний студентов, а также на зачетах и экзаменах.

МЕТОД СИЛ

1. Расчет балки методом сил. Исходные данные, схемы балок

Для одной из заданных схем балок, изображенных на рис. 1.1–1.24 требуется:

- изобразить расчетную схему, основную и эквивалентную системы;
- изобразить основную систему, деформированную единичной и заданными нагрузками отдельно. Показать на этих рисунках перемещения, входящие в канонические уравнения;
- построить эпюры внутренних силовых факторов, возникающих от нагрузки, изменения температуры и заданного смещения опор. Расчет на действие нагрузки выполнить при двух разных основных системах;
- найти линейное и угловое перемещения сечения k при всех трех воздействиях;
- изобразить балку, деформированную каждым из трех воздействий отдельно.

Принять: жесткость балки EI , высоту поперечного сечения $h = 0,1 L$, коэффициент теплового расширения α – постоянными по длине балки; податливость упругих опор равной $\lambda = L^3/EI$. Другие данные принять по табл. 1.1.

Таблица 1.1

Номер варианта	1	2	3	4	5	6	7
F , кН	2	3	4	2	2	4	3
q , кН/м	1	2	4	3	2	1	4
M , кН·м	4	5	4	6	2	4	3
L , м	2	4	1	4	2	3	5
Δ , м	0,01	0,02	0,03	0,02	0,01	0,05	0,04
φ , рад	0,1	0,3	0,2	0,4	0,2	0,1	0,3
t , °C	10	20	30	20	40	10	20

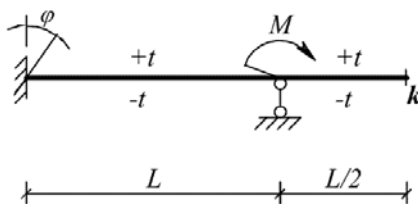


Рис. 1.1

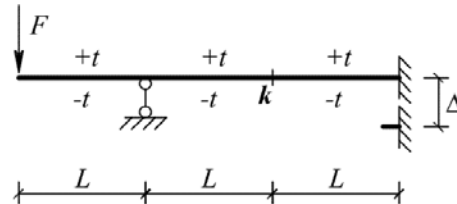


Рис. 1.2

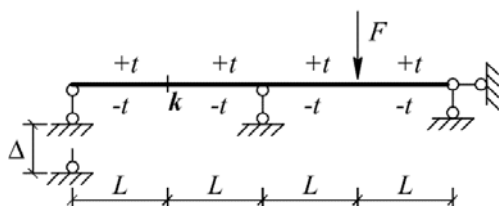


Рис. 1.3

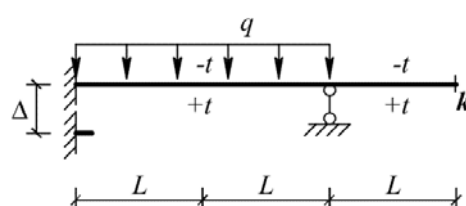


Рис. 1.4

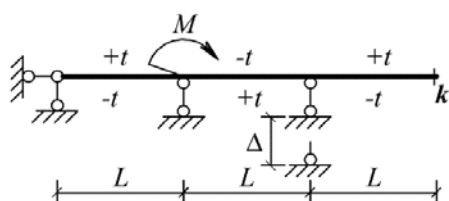


Рис. 1.5

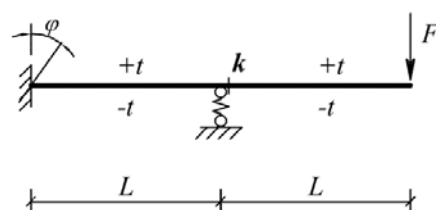


Рис. 1.6

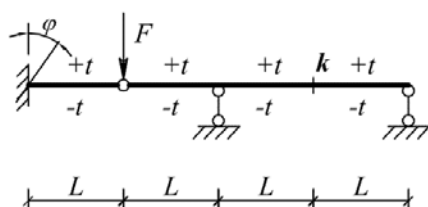


Рис. 1.7

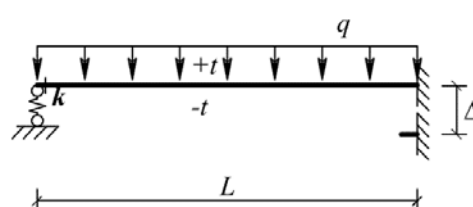


Рис. 1.8

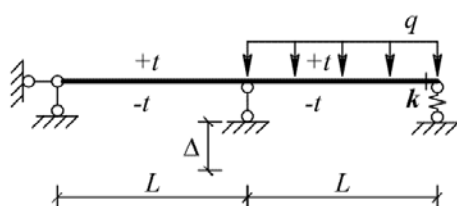


Рис. 1.9

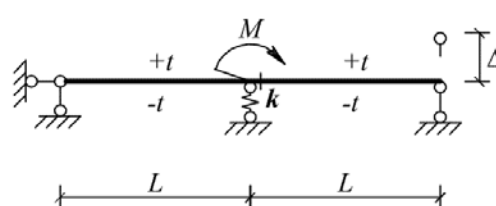


Рис. 1.10

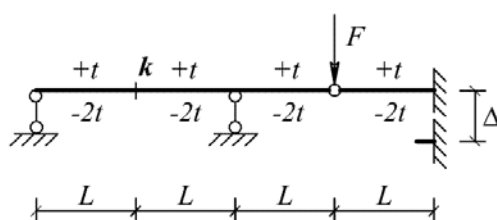


Рис. 1.11

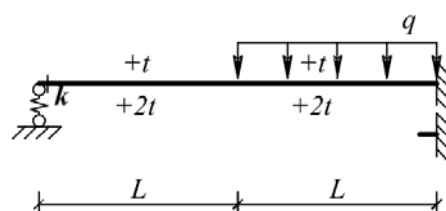


Рис. 1.12

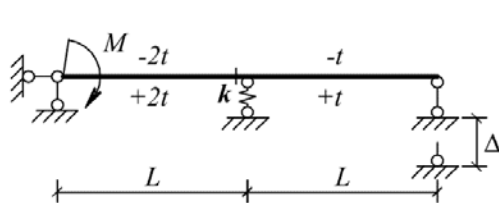


Рис. 1.13

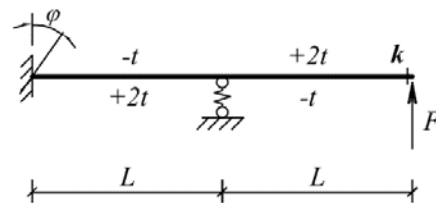


Рис. 1.14

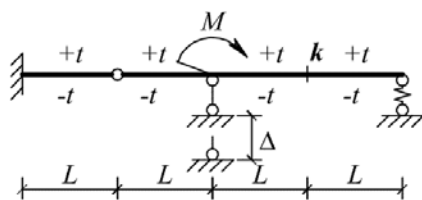


Рис. 1.15

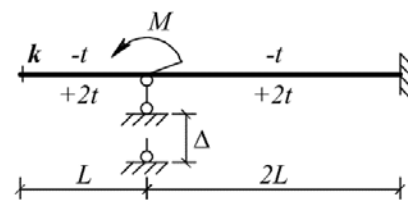


Рис. 1.16

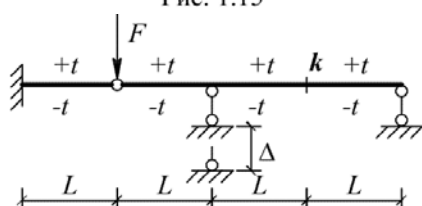


Рис. 1.17

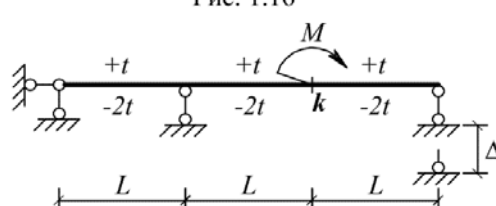


Рис. 1.18

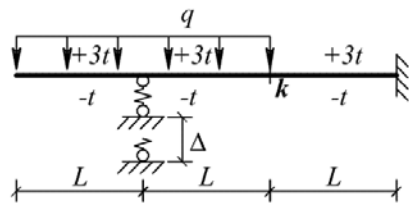


Рис. 1.19

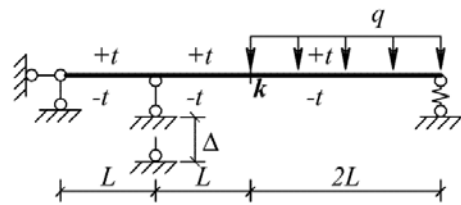


Рис. 1.20

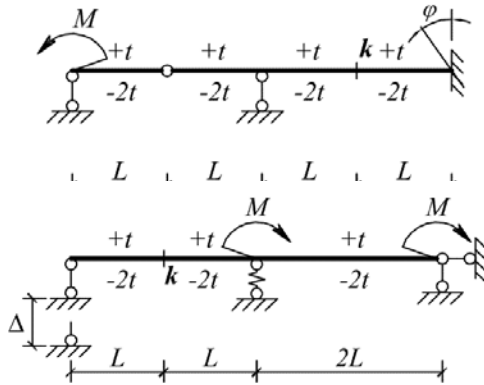


Рис. 1.23

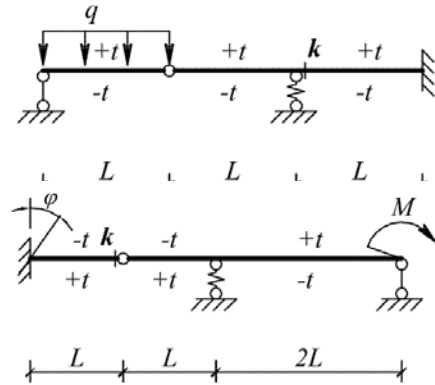


Рис. 1.24

2. Пример расчета балки методом сил

2.1. Расчет на действие нагрузки

Расчетная схема балки представлена на рис. 2.1.1.

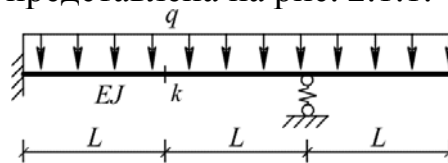


Рис. 2.1.1

Определение усилий

Основная и эквивалентная системы изображены на рис. 2.1.2 и 2.1.3 соответственно.

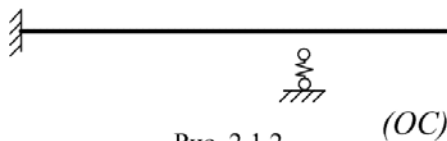


Рис. 2.1.2

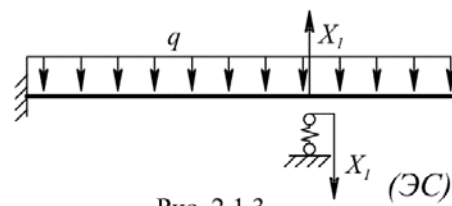


Рис. 2.1.3

Вид деформированной основной системы от единичного и силового воздействия представлен на рис. 2.1.4 и 2.1.5 соответственно, эпюры (M_1) и (M_F) – на рис. 2.1.6, 2.1.7.

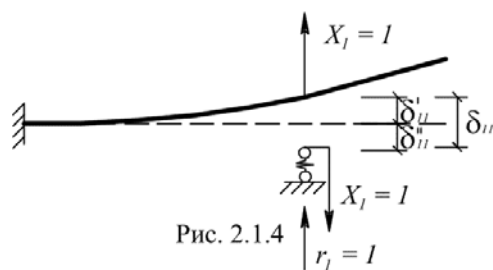


Рис. 2.1.4

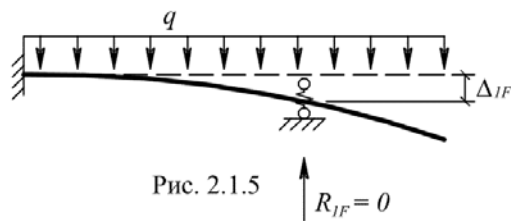


Рис. 2.1.5

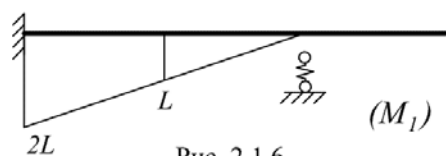


Рис. 2.1.6

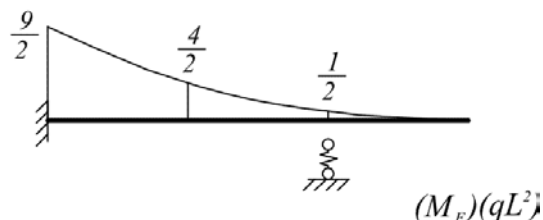


Рис. 2.1.7

В качестве неизвестных приняты силы взаимодействия (X_1) между балкой и пружиной. Они определяются из условия равенства нулю относительного перемещения точек балки и пружины, расположенных в месте их контакта. Каноническое уравнение в этом случае имеет вид:

$$\delta_{11} \cdot X_1 + \Delta_{1F} = 0.$$

$$\delta_{11} = \delta_{11}^I + \delta_{11}^{II} = \frac{L^3}{EJ} \left(2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 \right) + 1 \cdot 1 \cdot \frac{L^3}{EJ} = \frac{11}{3} \frac{L^3}{EJ},$$

$$\delta_{11}^I = (M_1)(M_1), \quad \delta_{11}^{II} = R_1 \cdot R_1 \cdot \lambda,$$

$$\Delta_{1F} = (M_F)(M_1) = -\frac{2L}{6EJ} \cdot \left(2L \cdot \frac{9}{2} qL^2 + 4L \cdot \frac{4}{2} qL^2 \right) = -\frac{17}{3} \frac{qL^4}{EJ},$$

$$X_1 = \frac{17}{11} qL.$$

Построение окончательных эпюр $(M)^F$ и $(Q)^F$ представлено на рис. 2.1.8–2.1.11. $(M)^F = (M_1) \cdot X_1 + (M_F)$.

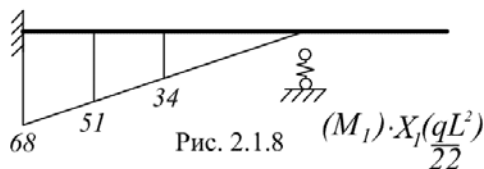


Рис. 2.1.8

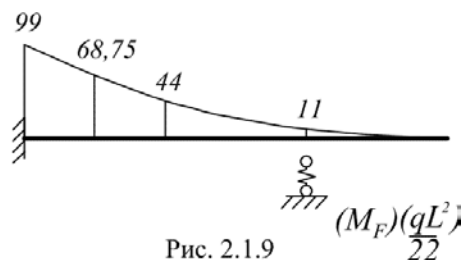


Рис. 2.1.9

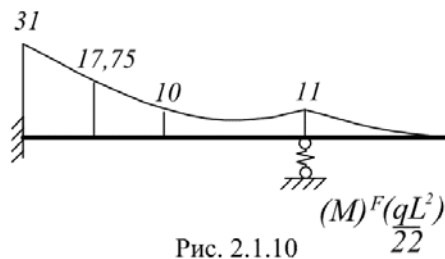


Рис. 2.1.10

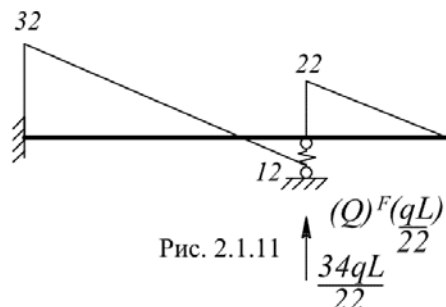
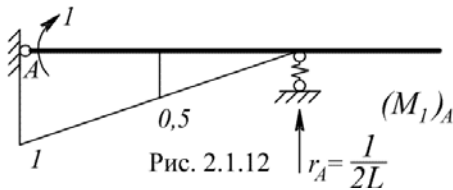


Рис. 2.1.11

Кинематическая проверка

Найдем угол поворота сечения А, который по условию должен быть равен нулю.



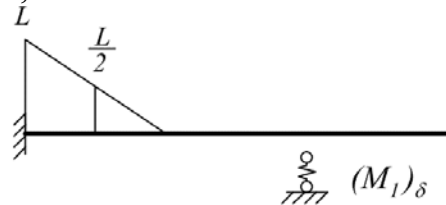
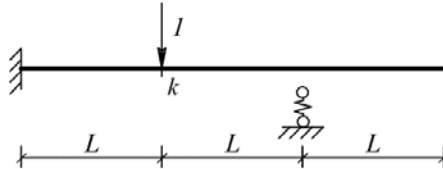
$$\begin{aligned}\varphi_A &= (\dot{I})^F \cdot (M_1)_A + R_F \cdot r_A \cdot \lambda = \\ &= -\frac{2L}{6EJ} (31 \cdot 1 + 4 \cdot 10 \cdot 0.5) \frac{qL^2}{22} + \\ &+ \frac{34qL}{22} \cdot \frac{1}{2L} \cdot \frac{L^3}{EJ} = 0.\end{aligned}$$

Проверка подтверждает правильность решения.

Определение перемещений сечения k

Вертикальное перемещение δ_{kF}

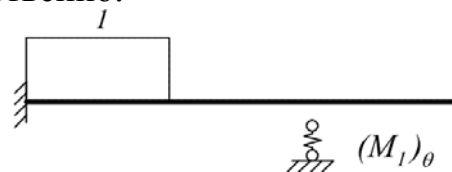
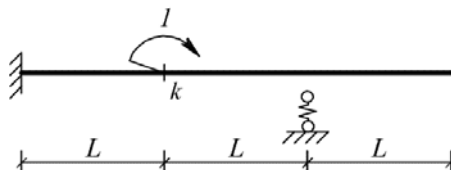
Единичные загрузке и эпюра $(M_1)_\delta$ для определения вертикального перемещения сечения k представлены на рис. 2.1.13, 2.1.14 соответственно.



$$\delta_{kF} = (M)^F \cdot (M_1)_\delta = \frac{L}{6EJ} \left(\frac{31}{22} \cdot 1 + 4 \cdot \frac{17,75}{22} \cdot \frac{1}{2} \right) \cdot qL^3 = 0,504 \frac{qL^4}{EJ}.$$

Угол поворота θ_{kF}

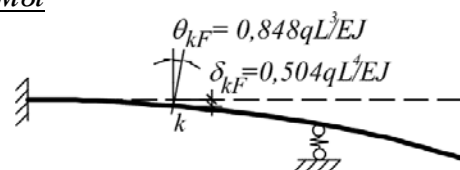
Единичные загрузке и эпюра $(M_1)_\theta$ для определения угла поворота сечения k представлены на рис. 2.1.15, 2.1.16 соответственно.



$$\theta_{kF} = \frac{I}{6EJ} (M)^F \cdot (M_1)_\theta = \frac{L}{6EJ} \left(\frac{31}{22} + 4 \cdot \frac{17,75}{22} + \frac{10}{22} \right) \cdot qL^2 = 0,848 \frac{qL^3}{EJ}.$$

Построение деформированной схемы рамы

Деформированная схема балки представлена на рис. 2.1.17.



2.2. Расчет на температурное воздействие

Расчетная схема балки представлена на рис. 2.2.1.

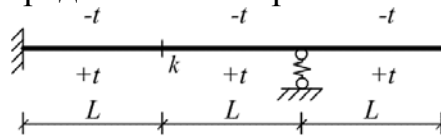


Рис. 2.2.1

Определение усилий

Основная и эквивалентная системы изображены на рис. 2.2.2 и 2.2.3 соответственно.

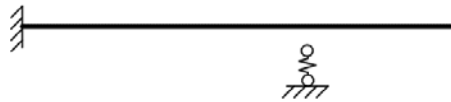


Рис. 2.2.2

(OC)

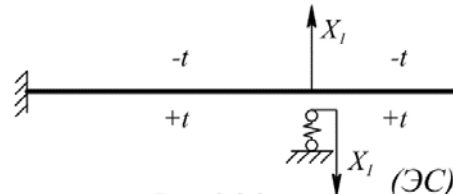


Рис. 2.2.3

(ЭС)

Вид деформированной основной системы от единичного и температурного воздействия представлен на рис. 2.1.4 и 2.2.4 соответственно, эпюра (M_1) – на рис. 2.1.6.

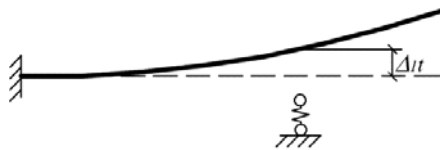


Рис. 2.2.4

Как и в предыдущем случае (п.п. 2.1), поскольку взаимное перемещение верхней точки пружины и примыкающей к ней точки на оси балки равно нулю, получаем каноническое уравнение:

$$\delta_{11} \cdot X_1 + \Delta_{1t} = 0.$$

$$\delta_{11} = \frac{11}{3} \frac{L^3}{EJ} \text{ (как в п.2.1).}$$

Перемещения Δ_{1t} , возникающие от температурного воздействия, найдем по формуле: $\Delta_{1t} = \sum \alpha \cdot t_0 \cdot \omega_{N_1} + \sum \frac{\alpha \cdot \Delta t}{h} \cdot \omega_{M_1}$.

Поскольку в данном случае продольных сил нет, а на эпюре (M_1) только один участок, получаем: $\Delta_{1t} = \frac{\alpha \cdot 2t}{0,1L} \cdot 2L \cdot 2L \cdot \frac{1}{2} = 40\alpha tL$.

Подставляя соответствующие значения в каноническое уравнение, находим:

$$X_1 = -\frac{120}{11} \frac{\alpha t E J}{L^2}.$$

Окончательные эпюры (M)^t и (Q)^t представлено на рис. 2.2.5, 2.2.6.

$$(M)^t = (M_1) \cdot X_1.$$

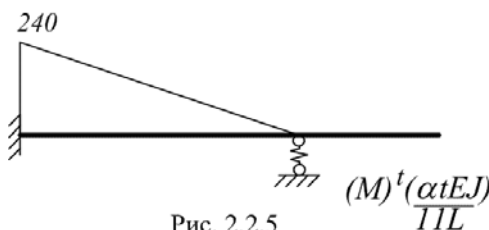


Рис. 2.2.5

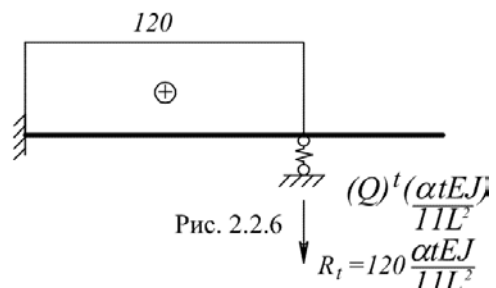


Рис. 2.2.6

Кинематическая проверка

Найдем угол поворота сечения А (рис. 2.1.12), который по условию должен быть равен нулю.

$$\varphi_A = (\dot{I})^t \cdot (M_1)_A + \sum \frac{\alpha \cdot \Delta t}{h} \cdot \omega_{(M_1)_A} + R_t \cdot R_A \cdot \lambda, = -\frac{1}{EJ} \cdot \frac{240}{11} \cdot \frac{\alpha t EJ}{L} \cdot \frac{2L}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{\alpha 2t}{0,1L} \cdot 1 \cdot 2L \cdot \frac{1}{2} - \frac{120}{11} \cdot \frac{\alpha t EJ}{L^2} \cdot \frac{1}{2L} \cdot \frac{L^3}{EJ} = 0.$$

Проверка подтверждает правильность решения.

Определение перемещений сечения k

Вертикальное перемещение δ_{kt}

Единичное нагружение и эпюра $(M_1)_\delta$ для определения вертикального перемещения сечения k представлены на рис. 2.1.13, 2.1.14 соответственно.

$$\delta_{kt} = (M)^t (M_1)_\delta + \frac{\alpha \cdot \Delta t}{h} \omega_{(M_1)_\delta} = \frac{1}{EJ} \cdot \frac{L^2}{2} \cdot \frac{120 \alpha t EJ}{11L} \cdot \left(\frac{2}{3} + 1\right) - \frac{\alpha \cdot 2t}{0,1L} \cdot \frac{L^2}{2} = -0,909 \alpha t L.$$

Угол поворота θ_{kt}

Единичное нагружение и эпюра $(M_1)_\theta$ для определения угла поворота сечения k представлены на рис. 2.1.15, 2.1.16 соответственно.

$$\theta_{kt} = (M_t)(M_1)_\theta + \frac{\alpha \Delta t}{h} \omega_{(M_1)_\theta} = \frac{1}{EJ} \cdot 1 \cdot L \cdot \frac{180}{11} \cdot \frac{\alpha t EJ}{L} - \frac{\alpha 2t}{0,1L} \cdot 1 \cdot L = -3,636 \alpha t.$$

Построение деформированной схемы рамы

Деформированная схема балки представлена на рис. 2.2.7.

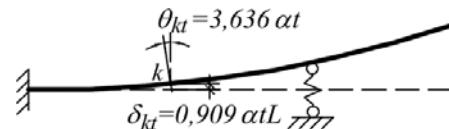


Рис. 2.2.7

2.3. Расчет на кинематическое воздействие

Расчетная схема балки представлена на рис. 2.3.1.

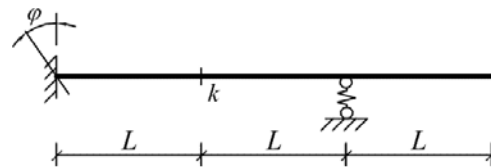
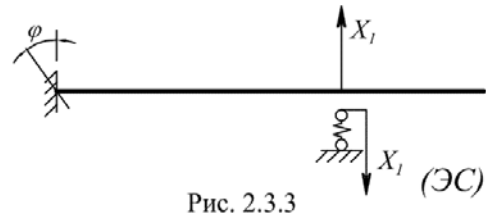
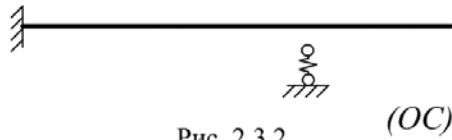


Рис. 2.3.1

Определение усилий

Основная и эквивалентная системы изображены на рис. 2.3.2 и 2.3.3 соответственно.



Вид деформированной основной системы от единичного и кинематического воздействия представлен на рис. 2.1.4 и 2.3.4 соответственно, эпюра (M_1) – на рис. 2.1.6.

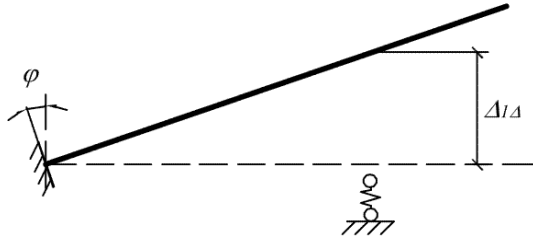


Рис. 2.3.4

Как и в предыдущих случаях (п.п. 2.1, 2.2), поскольку взаимное перемещение верхней точки пружины и примыкающей к ней точки на оси балки равно нулю, получаем каноническое уравнение:

$$\delta_{11} \cdot X_1 + \Delta_{1\Delta} = 0.$$

$$\delta_{11} = \frac{11}{3} \frac{L^3}{EJ} \text{ (как в п. 2.1).}$$

Перемещения $\Delta_{1\Delta}$, возникающие от кинематического воздействия, найдем по формуле: $\Delta_{1\Delta} = -\sum R_i \Delta_i = -(-2L \cdot \varphi) = 2L\varphi$.

Подставляя соответствующие значения в каноническое уравнение, находим:

$$X_1 = -\frac{6EJ\varphi}{11L^2}.$$

Окончательные эпюры $(M)^\Delta$ и $(Q)^\Delta$ представлено на рис. 2.3.5, 2.3.6.

$$(M)^\Delta = (M_1) \cdot X_1.$$

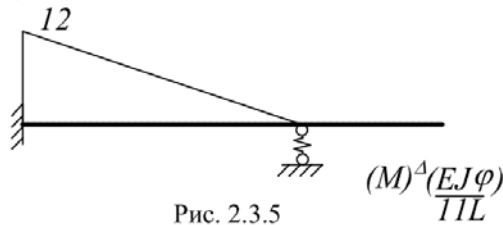


Рис. 2.3.5

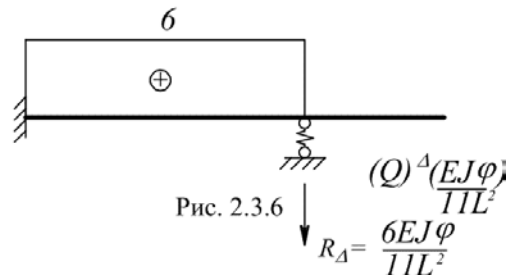


Рис. 2.3.6

Кинематическая проверка

Найдем угол поворота сечения А (рис. 2.1.12), который по условию должен быть равен нулю.

$$\varphi_A = (M)^\Delta (M_1)_A - \sum R_i \cdot \Delta_i + R_A \cdot r_A \cdot \lambda = -\frac{1}{EJ} \cdot \frac{12}{11} \cdot \frac{EJ}{L} \cdot \varphi \cdot 2L \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} + \varphi - \frac{6}{11} \cdot \frac{EJ}{L^2} \cdot \varphi \cdot \frac{1}{2L} = 0.$$

Проверка подтверждает правильность решения.

Определение перемещений сечения k

Вертикальное перемещение $\delta_{k\Delta}$

Единичные загрузка и эпюра $(M_1)_\delta$ для определения вертикального перемещения сечения k представлены на рис. 2.1.13, 2.1.14 соответственно.

$$\delta_{k\Delta} = (M)^\Delta (M_1)_\delta - \sum R_i \Delta_i = \frac{1}{EJ} L \cdot L \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{11} \frac{EJ}{L} \varphi (1 + \frac{2}{3}) - L \cdot \varphi = -0,545L \cdot \varphi.$$

Угол поворота $\theta_{k\Delta}$

Единичные загрузения и эпюра $(M_1)_\theta$ для определения угла поворота сечения k представлены на рис. 2.1.15, 2.1.16 соответственно.

$$\theta_{k\Delta} = (M)^\Delta (M_1)_\theta - \sum R_i \Delta_i = \frac{1}{EJ} \cdot 1 \cdot L \cdot \frac{9}{11} \cdot \frac{EJ}{L} \cdot \varphi - 1 \cdot \varphi = -0,182\varphi.$$

Построение деформированной схемы рамы

Деформированная схема балки представлена на рис. 2.2.7.

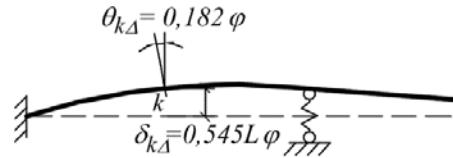


Рис. 2.1.17

3. Расчет рамы методом сил. Исходные данные, схемы рам

Для одной из заданных схем рам, изображенных на рис. 3.1–3.24 требуется:

- изобразить расчетную схему, основную и эквивалентную системы;
- изобразить основную систему, деформированную единичными и заданными воздействиями. Показать на этих рисунках перемещения, входящие в канонические уравнения;
- построить эпюры внутренних силовых факторов, возникающих от нагрузки, изменения температуры и заданного смещения опор;
- сделать статические и кинематические проверки полученных решений;
- найти полное линейное и угловое перемещения сечения k при всех трех воздействиях;
- изобразить раму, деформированную каждым из трех воздействий отдельно.

Принять: изгибную жесткость стоек рамы равной EI , жесткость горизонтальных элементов и нижних частей стоек в схемах на рис. 3.16 и 3.18 равной $2EI$; высоту поперечного сечения $h = 0,1 L$, коэффициент теплового расширения α – одинаковыми для всех стержней; центр тяжести поперечного сечения – в середине его высоты, $\varphi = \Delta/2L$. Другие данные принять по табл. 3.1.

Таблица 3.1

Номер варианта	1	2	3	4	5	6	7
F , кН	4	6	8	4	2	3	5
q , кН/м	2	1	2	3	1	2	3
L , м	6	4	8	4	6	5	4
Δ , м	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,02	0,01
$t_{вн}$, °C	10	15	20	18	22	20	18
$t_{нар}$, °C	–30	–35	–20	–22	–28	–40	–22

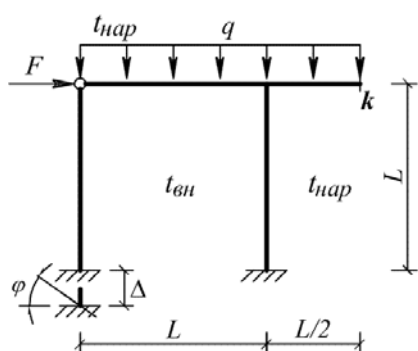


Рис. 3.1

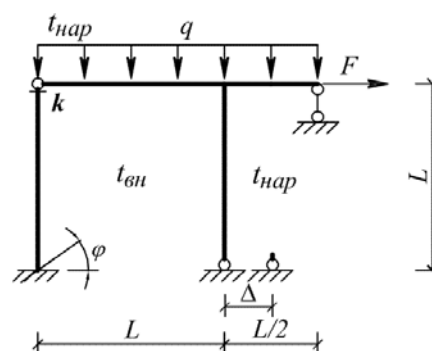


Рис. 3.2

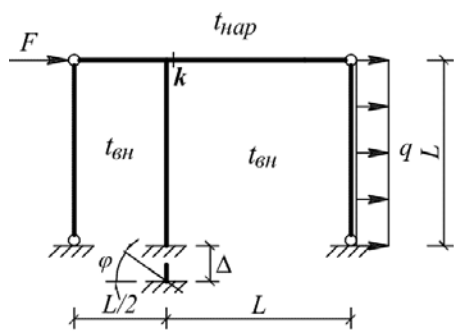


Рис. 3.3

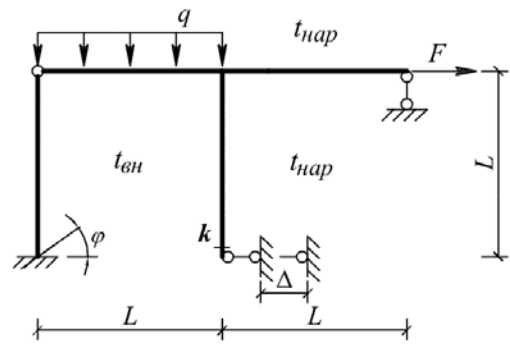


Рис. 3.4

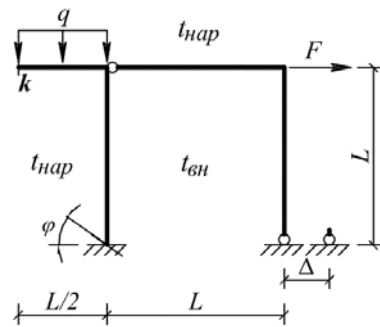


Рис. 3.5

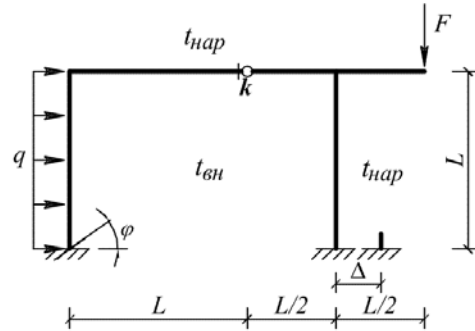


Рис. 3.6

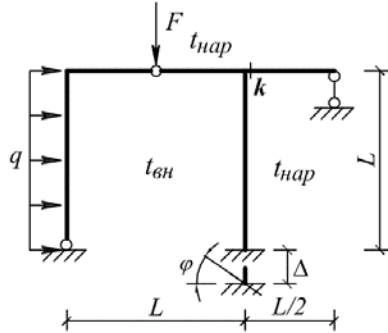


Рис. 3.7

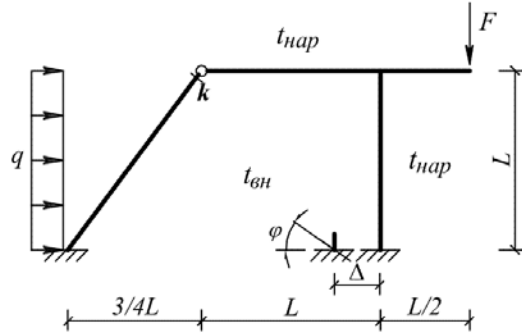


Рис. 3.8

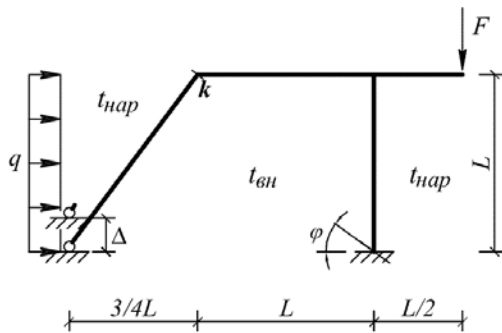


Рис. 3.9

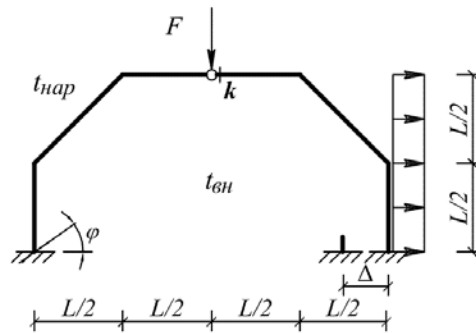


Рис. 3.10

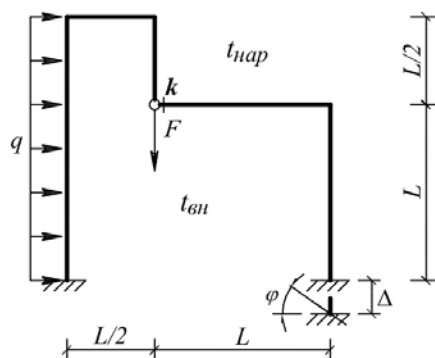


Рис. 3.11

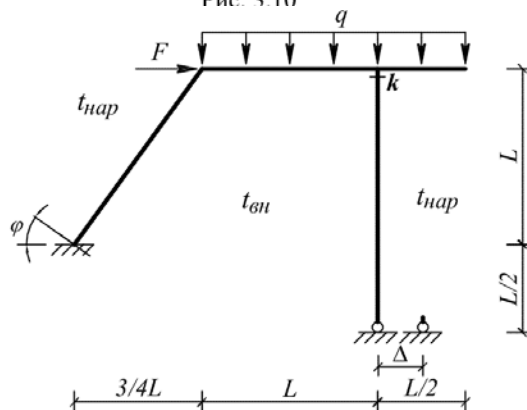


Рис. 3.12

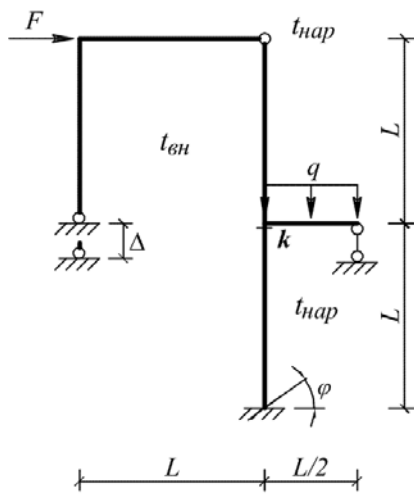


Рис. 3.13

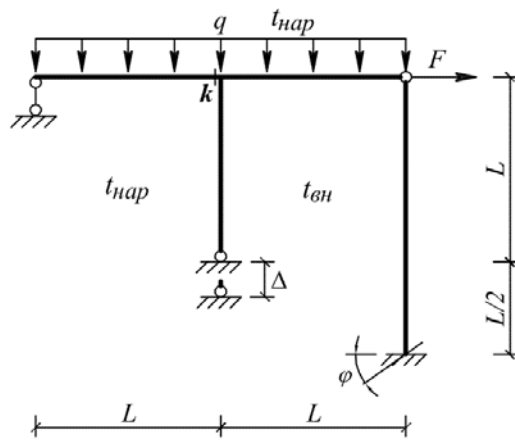


Рис. 3.14

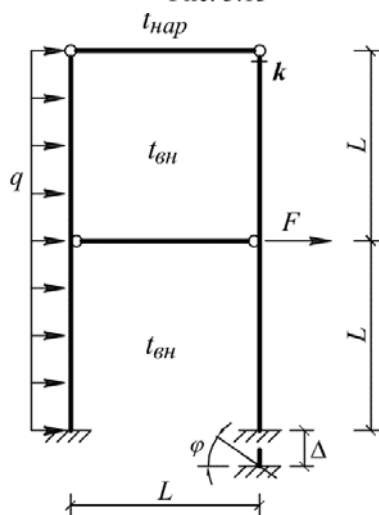


Рис. 3.15

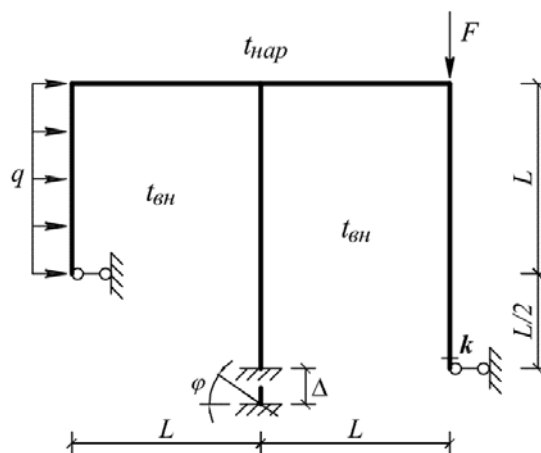


Рис. 3.16

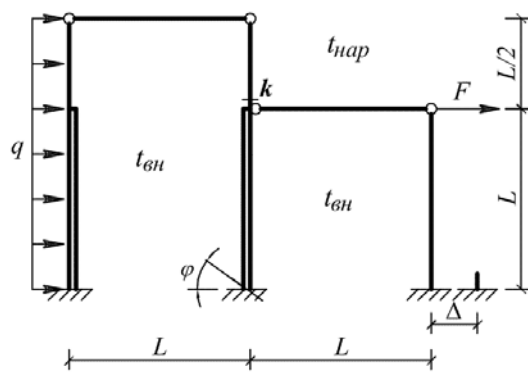


Рис. 3.17

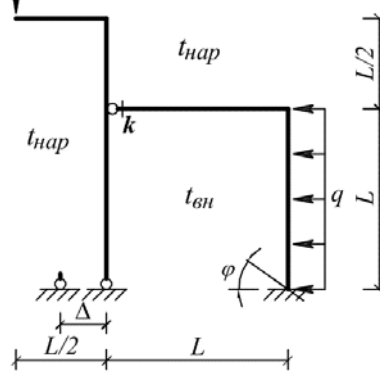


Рис. 3.18

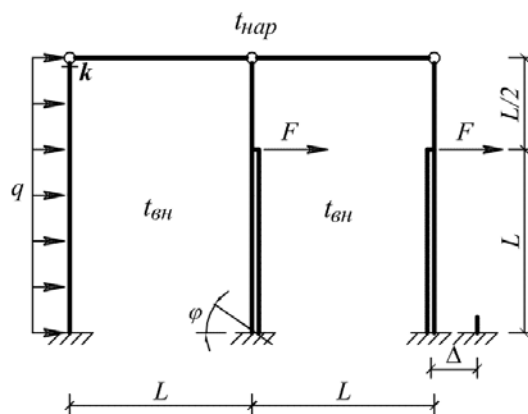


Рис. 3.19

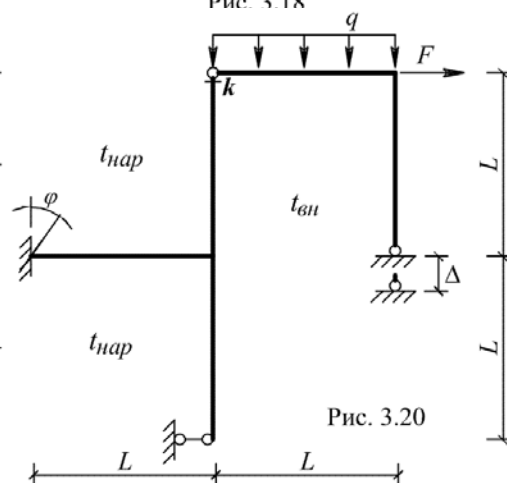


Рис. 3.20

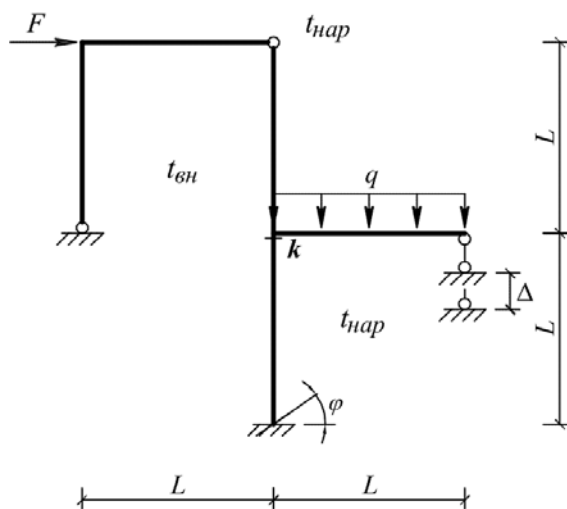


Рис. 3.21

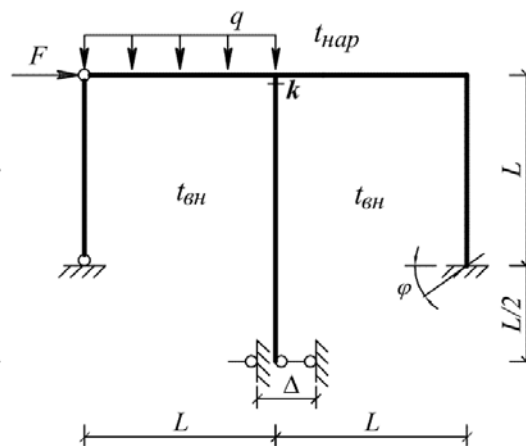


Рис. 3.22

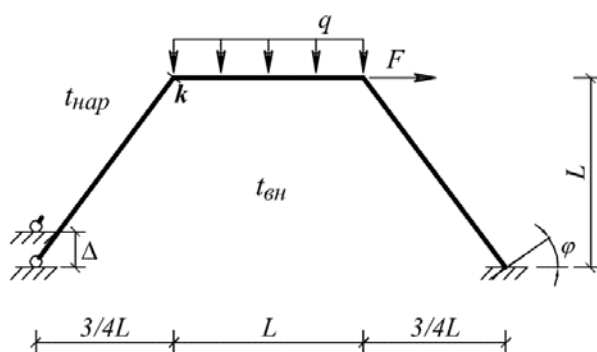


Рис. 3.23

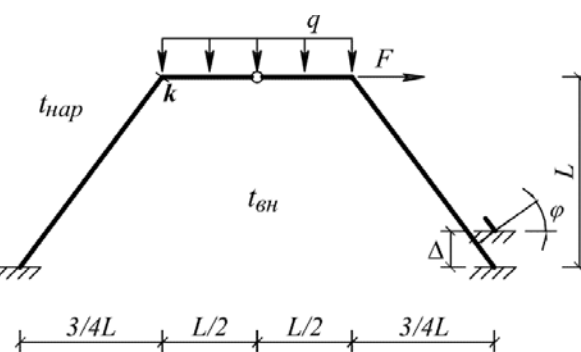


Рис. 3.24

4. Пример расчета рамы методом сил

Расчетная схема рамы представлена на рис. 4.1, основная и эквивалентная системы – на рис. 4.2, 4.3 соответственно.

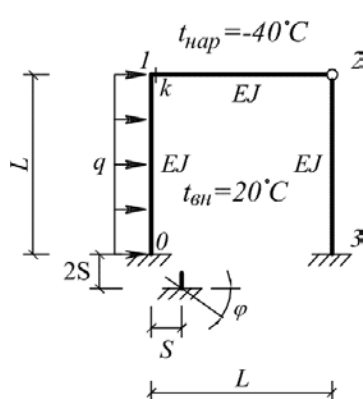


Рис. 4.1

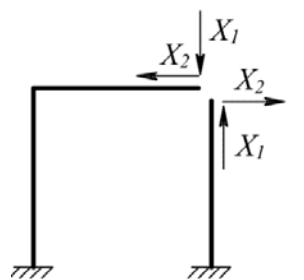


Рис. 4.2

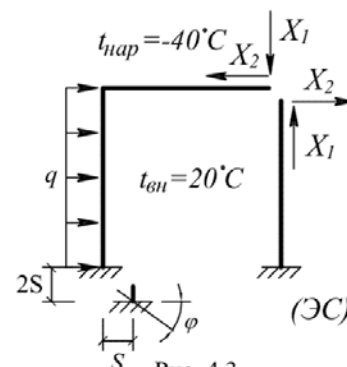


Рис. 4.3

Силы X_1 и X_2 определяются из условий отсутствия взаимного перемещения концов стержней, сходящихся в шарнире (узел 2). Эти условия записываются в форме канонических уравнений метода сил:

$$\begin{aligned}\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_1 &= 0, \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_2 &= 0.\end{aligned}\quad (4.1)$$

В первом уравнении написано, что перемещение по вертикали, а во втором – по горизонтали равны нулю.

Свободные члены уравнений Δ_1 и Δ_2 определяются от каждого воздействия отдельно.

4.1. Определение коэффициентов канонических уравнений

Определение δ_{ik}

Вид деформированной основной системы от единичных воздействий представлен на рис. 4.1.1 и 4.1.2, эпюры (M_1) и (M_2) – на рис. 4.1.3, 4.1.4 соответственно.

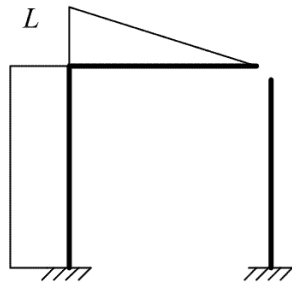
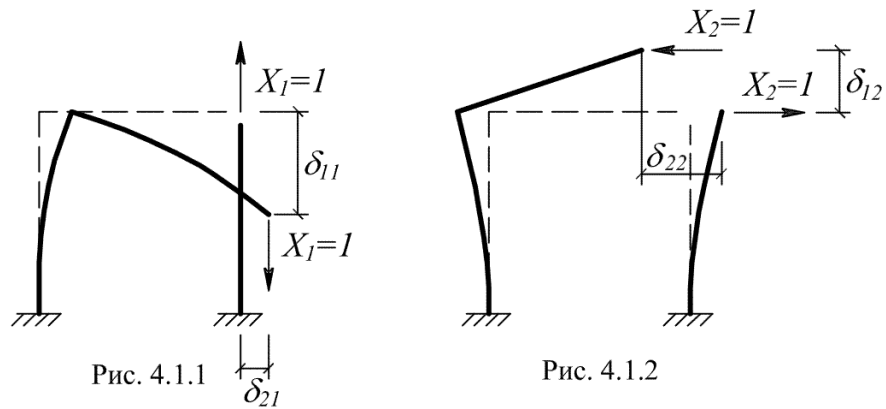


Рис. 4.1.3 (M_1)

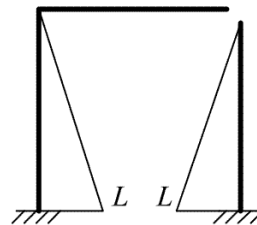


Рис. 4.1.4 (M_2)

$$\delta_{11} = (M_1)(M_1) = \frac{1}{EJ} (L \cdot L \cdot L + L \cdot L \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} L) = \frac{4}{3} \cdot \frac{L^3}{EJ},$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = (M_1)(M_2) = -\frac{1}{EJ} (L \cdot L \cdot \frac{1}{2} L) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{L^3}{EJ},$$

$$\delta_{22} = (M_2)(M_2) = \frac{1}{EJ} (L \cdot L \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} L \cdot 2) = \frac{2}{3} \cdot \frac{L^3}{EJ}.$$

Проверка правильности вычисления коэффициентов выполняется с помощью суммарной единичной эпюры (M_S) , представленной на рис. 4.1.5.

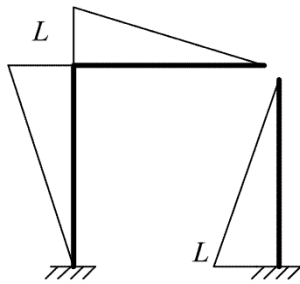


Рис. 4.1.5

(M_s)

Определение свободных членов Δ_1 и Δ_2 от силового воздействия

$$\sum \delta_{ik} = \frac{L^3}{EJ} \left(\frac{2}{3} - 2 \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \right) = \frac{L^3}{EJ}.$$

$$(M_s)(M_s) = \frac{1}{EJ} \left(L \cdot L \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} L \cdot 3 \right) = \frac{L^3}{EJ}.$$

δ_{ik} вычислены верно.

Вид деформированной основной системы от силового воздействия представлен на рис. 4.1.6, эпюры (M_F) – на рис. 4.1.7.

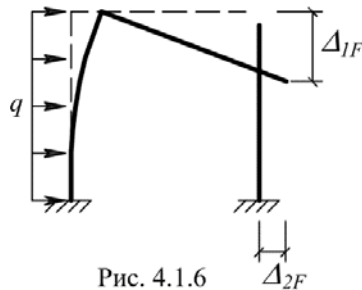


Рис. 4.1.6

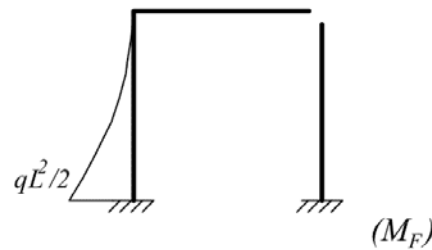


Рис. 4.1.7

$$\Delta_{1F} = (M_F)(M_1) = \frac{1}{EJ} \cdot \frac{qL^2}{2} \cdot L \cdot \frac{1}{3} \cdot L = \frac{ql^4}{6EJ},$$

$$\Delta_{2F} = (M_F)(M_2) = \frac{-1}{EJ} \cdot \frac{qL^2}{2} \cdot L \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} L = -\frac{ql^4}{8EJ}.$$

Проверка правильности вычисления коэффициентов выполняется с помощью суммарной единичной эпюры (M_s), представленной на рис. 4.1.5.

$$\sum \Delta_{iF} = \frac{ql^4}{EJ} \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{8} \right) = \frac{ql^4}{24EJ}, \quad (M_F)(M_s) = \frac{1}{EJ} \cdot \frac{qL^2}{2} \cdot L \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} L = \frac{qL^4}{24EJ}.$$

Δ_{1F} и Δ_{2F} вычислены верно.

Определение свободных членов Δ_1 и Δ_2 от температурного воздействия

Вид деформированной основной системы от температурного воздействия представлен на рис. 4.1.8, единичные эпюры (N_1) и (N_2) – на рис. 4.1.9, 4.1.10 соответственно.

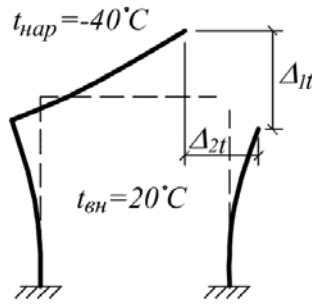


Рис. 4.1.8

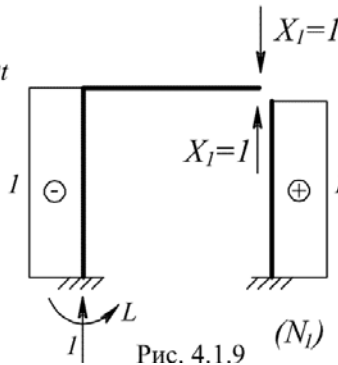


Рис. 4.1.9

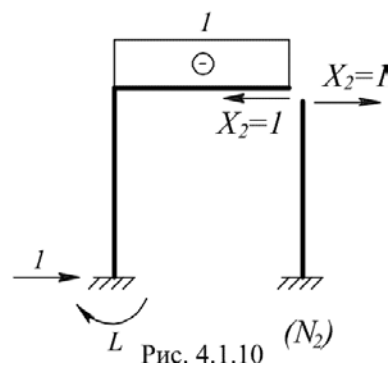


Рис. 4.1.10

В этом случае формула для определения перемещений имеет вид:

$$\delta = \sum \alpha t_0 \omega_{N1} + \sum \frac{\alpha \Delta t}{h} \omega_{M1}.$$

В нашем примере получаем:

$$\Delta_{1t} = \alpha \left[\frac{20 - 40}{2} (-1 \cdot L + 1 \cdot L) + \frac{20 + 40}{0,1L} \left(-L^2 - \frac{L^2}{2} \right) \right] = -900\alpha L,$$

$$\Delta_{2t} = \alpha \left[\frac{20 - 40}{2} (-1 \cdot L) + \frac{20 + 40}{0,1L} \left(L \cdot L \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \right) \right] = 610\alpha L$$

Определение свободных членов Δ_1 и Δ_2 от кинематического воздействия

Вид деформированной основной системы от кинематического воздействия представлен на рис. 4.1.11.

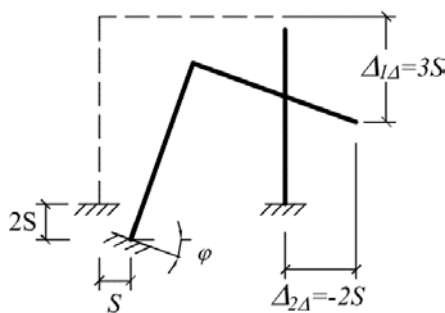


Рис. 4.1.11

В этом случае формула для определения перемещений имеет вид:

$$\delta = -\sum R_i \Delta_i.$$

В нашем примере получаем:

$$\Delta_{1\Delta} = -(-1 \cdot 2S - L \cdot \frac{S}{L}) = 3S,$$

$$\Delta_{2\Delta} = -(1 \cdot S - L \cdot \frac{S}{L}) = -2S.$$

4.2. Определение неизвестных усилий X_1 и X_2

Чтобы найти эти силы необходимо решить систему уравнений (4.1), которую для краткости запишем в матричной форме:

$$AX + B = 0, \tag{4.2.1}$$

$$\text{где } A = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{bmatrix} = \frac{L^3}{EJ} \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \end{bmatrix}.$$

Матрица B и, как следствие, матрица X зависят от вида воздействия, в то время как матрица A остается неизменной.

Для решения уравнения (4.2.1) можно пойти следующими путями.

1. Троекратное решение системы уравнений второго порядка (поскольку в нашем примере три вида нагружений).

Так, при действии нагрузки матрица B имеет вид:

$$B_F = \begin{bmatrix} \frac{qL^2}{6EJ} \\ -\frac{qL^2}{8EJ} \end{bmatrix} \quad \text{и тогда уравнение (4.2.1) будет таким} \quad \frac{L^3}{EJ} \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{1F} \\ X_{2F} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{qL^4}{6EJ} \\ -\frac{qL^4}{8EJ} \end{bmatrix} = 0.$$

Перемножив матрицы A и X , после упрощений получаем

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} X_{1F} - \frac{1}{2} X_{2F} + \frac{qL}{6} &= 0, \\ -\frac{1}{2} X_{1F} + \frac{4}{3} X_{2F} - \frac{qL}{8} &= 0. \end{aligned}$$

Решив эту систему уравнений, находим: $X_{1F} = -\frac{21}{276} qL$, $X_{2F} = -\frac{36}{276} qL$.

При температурном воздействии:

$$B_t = \begin{bmatrix} 900\alpha L \\ -610\alpha L \end{bmatrix} \quad \text{уравнение (4.2.1) получает вид} \quad \frac{L^3}{EJ} \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{1t} \\ X_{2t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 900\alpha L \\ -610\alpha L \end{bmatrix} = 0.$$

$$\begin{aligned} \text{Откуда} \quad \frac{2}{3} X_{1t} - \frac{1}{2} X_{2t} + 900\alpha \frac{EJ}{L^2} &= 0, \\ -\frac{1}{2} X_{1t} + \frac{4}{3} X_{2t} - 610\alpha \frac{EJ}{L^2} &= 0. \end{aligned}$$

Решив систему, находим: $X_{1t} = 461,7\alpha \frac{EJ}{L^2}$, $X_{2t} = -568,7\alpha \frac{EJ}{L^2}$.

При расчете на смещения S и φ :

$$B_\Delta = \begin{bmatrix} -3S \\ 2S \end{bmatrix} \quad \text{Уравнение (4.2.1) получает вид} \quad \frac{L^3}{EJ} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{4}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{1\Delta} \\ X_{2\Delta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 900\alpha L \\ -610\alpha L \end{bmatrix} = 0.$$

$$\begin{aligned} \text{Откуда} \quad \frac{2}{3} X_{1\Delta} - \frac{1}{2} X_{2\Delta} - \frac{EJ}{L^3} \cdot 3S &= 0, \quad X_{1\Delta} = -1,565 \frac{EJ}{L^3} S, \\ -\frac{1}{2} X_{1\Delta} - \frac{4}{3} X_{2\Delta} + \frac{EJ}{L^3} \cdot 2S &= 0. \quad X_{2\Delta} = 1,826 \frac{EJ}{L^3} S. \end{aligned}$$

2. Можно избежать тоекратного решения системы уравнений, если воспользоваться матрицей A^{-1} , обратной матрице A (см. Приложение 2).

Неизвестные в этом случае находятся по формуле (2) Приложения 2:

$$X = -A^{-1} \cdot B,$$

$$\text{здесь } A^{-1} = \frac{1}{\text{Det}A} \frac{L^3}{EJ} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{4}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{3} \end{bmatrix}, \quad \text{Det}A = \begin{vmatrix} \frac{2}{3} \frac{L^3}{EJ} & -\frac{1}{2} \frac{L^3}{EJ} \\ -\frac{1}{2} \frac{L^3}{EJ} & \frac{4}{3} \frac{L^3}{EJ} \end{vmatrix} = \frac{23}{36} \frac{L^6}{(EJ)^2}.$$

Следовательно

$$A^{-1} = \frac{36}{23} \frac{EJ}{L^3} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{4}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{3} \end{bmatrix}; \quad X = \begin{bmatrix} X_{1F} & X_{1t} & X_{1\Delta} \\ X_{2F} & X_{2t} & X_{2\Delta} \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} \frac{qL^4}{6EJ} & -900\alpha L & 3S \\ -\frac{qL^4}{8EJ} & 610\alpha L & -2S \end{bmatrix}.$$

$$\text{Получаем } X = \begin{bmatrix} X_{1F} & X_{1t} & X_{1\Delta} \\ X_{2F} & X_{2t} & X_{2\Delta} \end{bmatrix} = -\frac{36}{23} \frac{EJ}{L^3} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{4}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{qL^4}{6EJ} - 900\alpha L + 3S \\ -\frac{qL^4}{8EJ} + 610\alpha L - 2S \end{bmatrix}.$$

Откуда, после перемножения матриц, находим неизвестные

$$X = -\frac{36}{23} \frac{EJ}{L^3} \begin{bmatrix} \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{qL^4}{6EJ} - \frac{1}{2} \cdot \frac{qL^4}{8EJ} \right) & \left(-\frac{2}{3} \cdot 900\alpha L + \frac{1}{2} \cdot 610\alpha L \right) & \left(\frac{2}{3} \cdot 3S - \frac{1}{2} \cdot 2S \right) \\ \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{qL^4}{6EJ} - \frac{4}{3} \cdot \frac{qL^4}{8EJ} \right) & \left(-\frac{1}{2} \cdot 900\alpha L + \frac{4}{3} \cdot 610\alpha L \right) & \left(\frac{1}{2} \cdot 3S - \frac{4}{3} \cdot 2S \right) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{21}{276} qL & 461,7\alpha \cdot \frac{EJ}{L^2} & -1,565 \cdot \frac{EJ}{L^3} S \\ \frac{36}{276} qL & -568,7\alpha \cdot \frac{EJ}{L^2} & 1,826 \cdot \frac{EJ}{L^3} S \end{bmatrix}.$$

3. Если использовать возможности математической системы Matlab никакие вычисления "вручную" не потребуются.

Запишем уравнение $AX + B = 0$ в развернутом виде, умножив его на $\frac{EJ}{L^3}$.

$$\begin{bmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \cdot X + \begin{bmatrix} \frac{ql}{6} & -900\alpha \frac{EJ}{L^2} & 3S \cdot \frac{EJ}{L^3} \\ -\frac{ql}{8} & 610\alpha \frac{EJ}{L^2} - 2S \cdot \frac{EJ}{L^3} \end{bmatrix} = 0.$$

Или в десятичных дробях

$$\begin{bmatrix} 1,333 & -0,5 \\ -0,5 & 0,6667 \end{bmatrix} \cdot X + \begin{bmatrix} 0,1667ql & -900\alpha \frac{EJ}{L^2} & 3S \cdot \frac{EJ}{L^3} \\ -0,125ql & 610\alpha \frac{EJ}{L^2} & -2S \cdot \frac{EJ}{L^3} \end{bmatrix} = 0.$$

Обозначим $\bar{A} = \begin{bmatrix} 1,333 & -0,5 \\ -0,5 & 0,6667 \end{bmatrix}$ и $\bar{B} = \begin{bmatrix} 0,1667 & -900 & 3 \\ -0,125 & 610 & -2 \end{bmatrix}$.

Теперь обращаемся к Matlab и получаем X (рис. 4.2.1).

```

MATLAB Command Window
File Edit Options Windows Help
>> A,B,X=-A\B

A =

    1.33300000000000    -0.50000000000000
   -0.50000000000000     0.66670000000000

B =

    1.0e+002 *

    0.00166700000000   -9.00000000000000    0.03000000000000
   -0.00125000000000    6.10000000000000   -0.02000000000000

X =

    1.0e+002 *

   -0.00076151627864    4.61914627755804   -0.01565809643828
    0.00130379760114   -5.68535602403027    0.01825551489555

```

Рис. 4.2.1

Чтобы получить эту матрицу в окончательном виде вспомним, что первый ее столбец имеет множитель qL , второй $-\alpha \frac{EJ}{L^2}$, а третий $-\alpha \frac{EJ}{L^3} S$. Заметим, кроме того, что $0,0076151 \approx \frac{21}{276}$, а $0,13037 \approx \frac{36}{276}$.

Итак,
$$X = \begin{bmatrix} -\frac{21}{276}qL & 461,9\alpha \frac{EJ}{L^2} & -1,565\frac{EJ}{L^3} S \\ \frac{36}{276}qL & -568,5\alpha \frac{EJ}{L^2} & 1,826\frac{EJ}{L^3} S \end{bmatrix}.$$

Незначительные расхождения в результатах объясняются погрешностями ручного счета.

4.3. Построение эпюр, проверка решения, определение перемещений от силового воздействия

Построение эпюр

Построение окончательной эпюры $(M)^F$, т.е. эпюры моментов, возникающих от нагрузки q , представлено на рис. 4.3.1–4.3.4.

$$(M)^F = (M_1)X_{1F} + (M_2)X_{2F} + (M_F). \quad X_{1F} = -\frac{21}{276}qL, \quad X_{2F} = \frac{36}{276}qL.$$

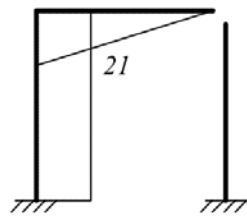


Рис. 4.3.1 $(M_1) \cdot X_{1F} (qL^2)$

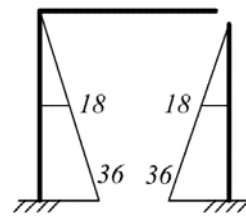


Рис. 4.3.2 $(M_2) \cdot X_{2F} (qL^2)$

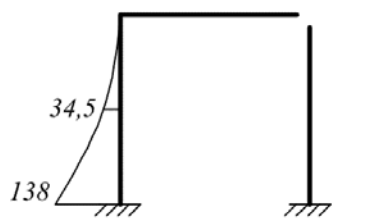


Рис. 4.3.3 $(M_F) (qL^2)$

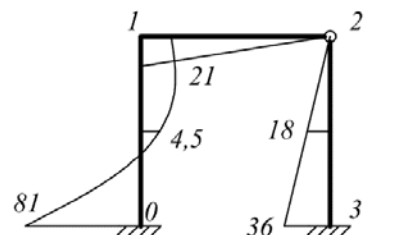


Рис. 4.3.4 $(M)^F (qL^2)$

Чтобы построить эпюру $(Q)^F$ найдем поперечные силы в каждом стержне отдельно (рис. 4.3.5–4.3.7).

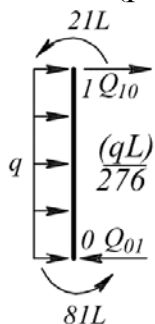


Рис. 4.3.5

$$\sum M_0 = qL \cdot \frac{L}{2} - 102 \cdot \frac{qL^2}{276} + Q_{10} \cdot L = 0, \quad Q_{10} = -\frac{36}{276}qL,$$

$$\sum M_1 = qL \cdot \frac{L}{2} + 102 \cdot \frac{qL^2}{276} - Q_{01} \cdot L = 0, \quad Q_{01} = \frac{240}{276}qL.$$

$$\text{Проверка: } \sum X = qL - (36 + 240) \cdot \frac{1}{276}qL = 0.$$

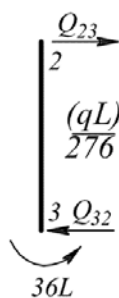


Рис. 4.3.6

$$\sum X = 0 \Rightarrow Q_{23} = Q_{32}.$$

$$Q_{23} = 36 \frac{qL^2}{276} / L = \frac{36}{276}qL.$$

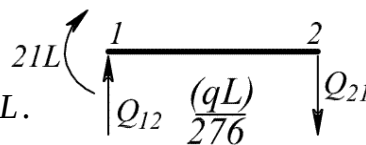


Рис. 4.3.7

$$\sum Y = 0 \Rightarrow Q_{12} = Q_{21}.$$

$$Q_{12} = -\frac{21}{276}qL^2 / L = -\frac{21}{276}qL.$$

Окончательная эпюра $(Q)^F$ представлена на рис. 4.3.8.

Когда поперечные силы найдены, из условий равновесия узлов рамы определяются продольные силы (рис. 4.3.9, 4.3.10).

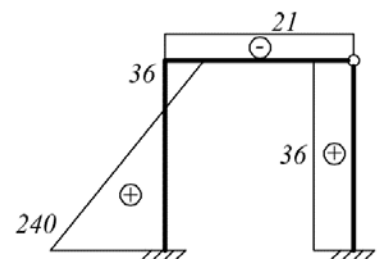


Рис. 4.3.8 $(Q)^F (qL)$

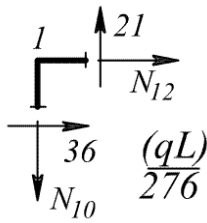


Рис. 4.3.9

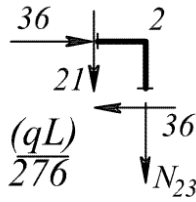


Рис. 4.3.10

$$\sum X = 0 \Rightarrow N_{12} = -\frac{36}{276}qL,$$

$$\sum Y = 0 \Rightarrow N_{10} = \frac{21}{276}qL.$$

$$\sum Y = 0 \Rightarrow N_{23} = -\frac{21}{276}qL.$$

Окончательная эпюра $(N)^F$ представлена на рисунке 4.3.11.

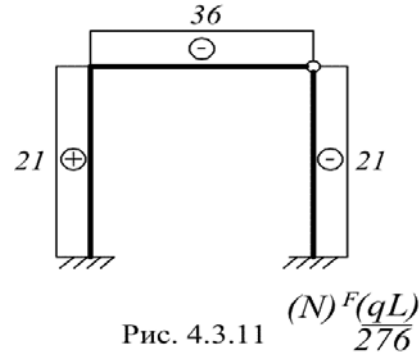


Рис. 4.3.11

Кинематическая проверка

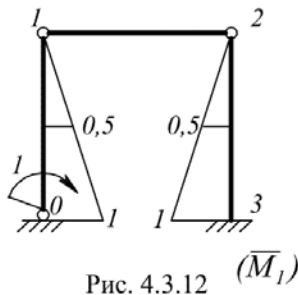


Рис. 4.3.12

Найдем угол поворота сечения на левой опоре (рис. 4.3.13), который по условию должен быть равен нулю.

$$\varphi_0 = (M)^F (\bar{M}_1) = \frac{L}{6EJ} \cdot \frac{qL^2}{276} (-81 \cdot 1 + 4 \cdot 4,5 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot 18 \cdot \frac{1}{2} + 36 \cdot 1) = 0.$$

Проверка подтверждает правильность решения.

Проверка равновесия рамы в целом (рис. 4.3.13)

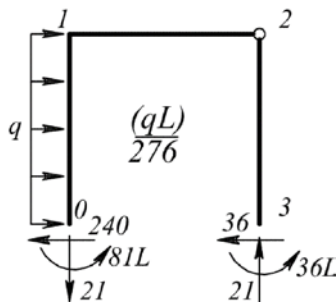


Рис. 4.3.13

$$X = qL - (240 + 36) \frac{qL}{276} = 0,$$

$$\sum Y = (21 - 21) \frac{qL}{276} = 0,$$

$$\sum M_0 = \frac{qL^2}{2} - 21 \cdot \frac{qL}{276} \cdot L - (81 + 36) \frac{qL^2}{276} = 0.$$

Условия равновесия выполняются.

Можно сделать и другие статические проверки, например равновесие части рамы, равенства нулю изгибающего момента в шарнире (узел 2) и т.п.

Определение перемещений сечения k

Линейное перемещение δ_{kF}

Единичная эпюра $(M_1)_\delta$ для определения линейного перемещения сечения k представлена на рис. 4.3.14.

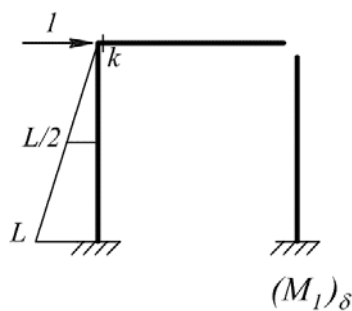


Рис. 4.3.14

$$\delta_{kF} = (M)^F \cdot (M_1)_\delta = \frac{L}{6EJ} \cdot \frac{qL^2}{276} (81 \cdot L - 4 \cdot 4,5 \cdot \frac{L}{2}) = 0,0435 \frac{qL^4}{EJ}.$$

Поскольку принято, что длины стержней при силовом нагружении не изменяются, то горизонтальное перемещение сечения k является его полным перемещением.

Угол поворота θ_{kF}

Единичная эпюра $(M_1)_\theta$ для определения угла поворота сечения k представлена на рис. 4.3.15.

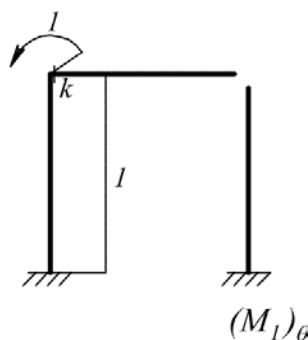


Рис. 4.3.15

$$\theta_{kF} = (M)^F (M_1)_\theta = \frac{L}{6EJ} \frac{qL^2}{276} (-81 + 4 \cdot 4,5 + 21) = -0,0254 \frac{qL^3}{EJ}.$$

Построение деформированной схемы рамы

Деформированная схема рамы представлена на рис. 4.3.16.

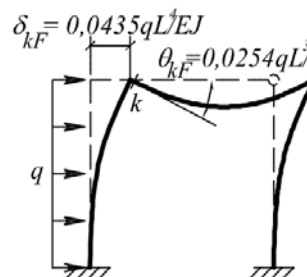


Рис. 4.3.16

4.4. Построение эпюр, проверка решения, определение перемещений от температурного воздействия

Построение эпюр

Построение окончательной эпюры $(M)^t$ представлено на рис. 4.4.1–4.4.3.

$$(M)^t = (M_1)X_{1t} + (M_2)X_{2t}$$

$$X_{1t} = 461,7\alpha \frac{EJ}{L^2}, \quad X_{2t} = -568,7\alpha \frac{EJ}{L^2}.$$

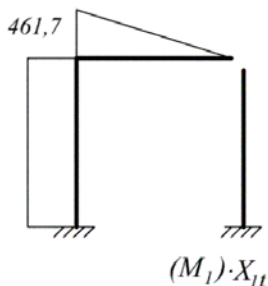


Рис. 4.4.1

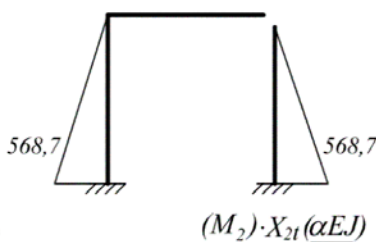


Рис. 4.4.2

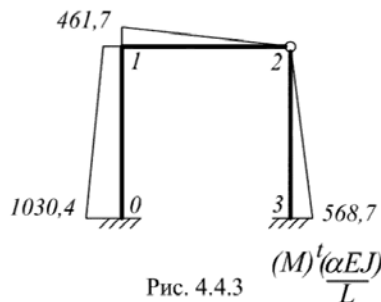


Рис. 4.4.3

Правила построения эпюр (Q) и (N) подробно рассмотрены в разделе 4.3. Пользуясь этими правилами строим эпюры (Q)^t и (N)^t – рис. 4.4.4, 4.4.5.

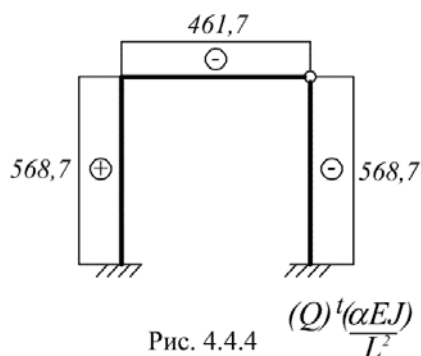


Рис. 4.4.4

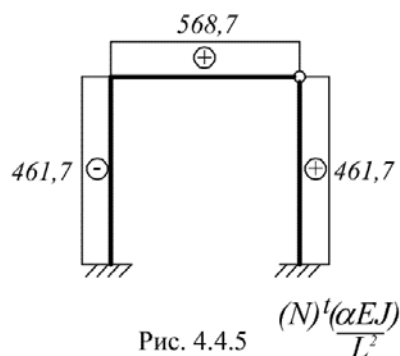
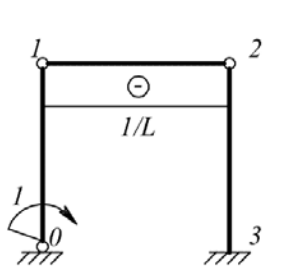


Рис. 4.4.5

Кинематическая проверка

Найдем угол поворота сечения на левой опоре (рис. 4.3.13), который по условию должен быть равен нулю. Дополнительная эпюра ($\bar{N}_1$), необходимая для нахождения угла поворота, представлена на рис. 4.4.6.



$$\begin{aligned} \varphi_0 &= (M)^t (\bar{M}_1) + \sum \alpha t_0 \omega_{\bar{N}_1} + \sum \frac{\alpha \Delta t}{h} \omega_{\bar{M}_1} = \\ &= -\frac{1}{6EJ} (1030,4 \cdot 1 + 4 \cdot \frac{1030,4 + 461,7}{2} \cdot \frac{1}{2} + 568,7 + 4 \cdot \frac{568,7}{2} \cdot \frac{1}{2}) \alpha \frac{EJ}{L} + \\ &+ \alpha \cdot \frac{20 - 40}{2} \cdot (-\frac{1}{L} \cdot L) + \alpha \frac{20 + 40}{0,1L} \cdot \frac{1 \cdot L}{2} \cdot 2 = 0. \end{aligned}$$

Рис. 4.4.6

($\bar{N}_1$) Проверка подтверждает правильность решения.

Проверка равновесия рамы в целом (рис. 4.4.7)

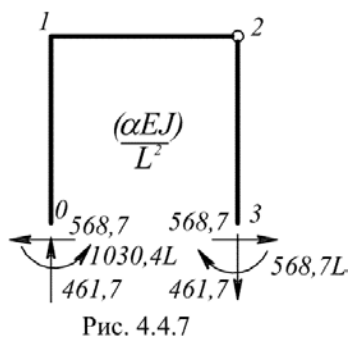


Рис. 4.4.7

$$1. \sum X = 0, \quad 2. \sum Y = 0,$$

$$\sum M_2 = 461,7 \cdot L + 568,7 \cdot L - 568,7 \cdot L - 1030,4 \cdot L + 568,7 \cdot L = 0.$$

Условия равновесия выполняются.

Определение перемещений сечения k

Линейное перемещение δ_{kt}

Единичные эпюры (M_1)_δ и (N_1)_δ для определения линейного перемещения сечения k представлены на рис. 4.3.14 и 4.4.8 соответственно.

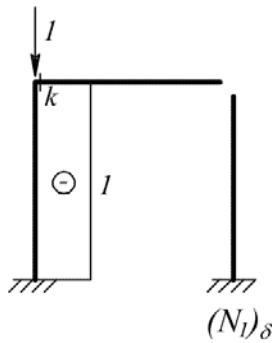


Рис. 4.4.8

Перемещения определяются по формуле

$$\delta = (M)^t (M_1) + \sum \alpha t_0 \omega_{N1} + \sum \frac{\alpha \Delta t}{h} \omega_{M1}.$$

$$\delta_{kt}^{\hat{a}} = \frac{1}{6EJ} (1030,4L \cdot L + 4 \cdot \frac{1030,4L + 461,7L}{2} \cdot \frac{L}{2}) \alpha \frac{EJ}{L^2} + \frac{\alpha \cdot 60}{0,1L} (-\frac{L^2}{2}) = 120,4\alpha L.$$

$$\delta_{kt}^{\hat{a}} = \alpha(-10)(-1 \cdot L) = 10\alpha L.$$

Полное линейное перемещение $\delta_{kt} = \sqrt{(\delta_{kt}^{\hat{a}})^2 + (\delta_{kt}^{\hat{b}})^2} = 120,8\alpha L.$

Угол поворота θ_{kt}

Единичная эпюра $(M_1)_0$ для определения угла поворота сечения k представлена на рис. 4.3.15.

$$\theta_{kt} = \frac{L}{6EJ} (1030,4 \cdot 1 + 4 \cdot \frac{1030,4 + 461,7}{2}) \alpha \frac{EJ}{L} = 669,1\alpha.$$

Построение деформированной схемы рамы

Деформированная схема рамы представлена на рис. 4.4.9.

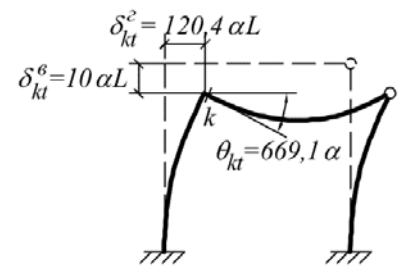


Рис. 4.4.9

4.5. Построение эпюр, проверка решения, определение перемещений от кинематического воздействия

Построение эпюр

Построение окончательной эпюры $(M)^{\Delta}$ представлено на рис. 4.5.1–4.5.3.

$$(M)^{\Delta} = (M_1)X_{1\Delta} + (M_2)X_{2\Delta}.$$

$$X_{1\Delta} = -1,565 \frac{EJ}{L^3} S, \quad X_{2\Delta} = 1,826 \frac{EJ}{L^3} S.$$

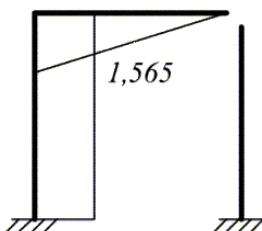


Рис. 4.5.1 $(M_1) \cdot X_{1\Delta} (\frac{EJ}{L^2} S)$

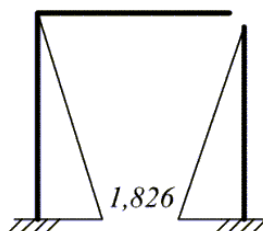


Рис. 4.5.2 $(M_2) \cdot X_{2\Delta} (\frac{EJ}{L^2} S)$

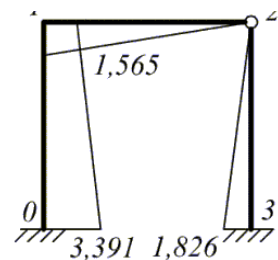


Рис. 4.5.3 $(M)^{\Delta} (\frac{EJ}{L^2} S)$

Эпюры $(Q)^{\Delta}$ и $(N)^{\Delta}$ представлены на рис. 4.5.4, 4.5.5.

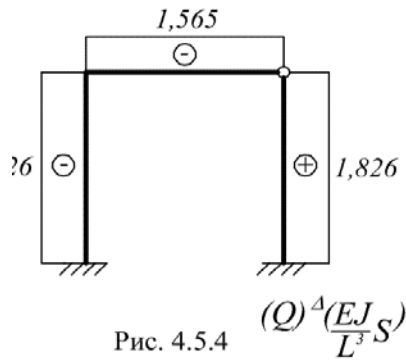


Рис. 4.5.4

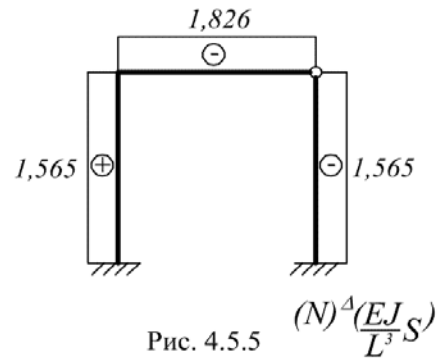


Рис. 4.5.5

Кинематическая проверка

Найдем угол поворота сечения на левой опоре (рис. 4.3.13), который по условию должен быть равен нулю.

$$\varphi_0 = (M)^A (\bar{M}_1) - \sum R_i \Delta_i = \frac{L^2}{6EJ} \cdot \frac{EJ}{L^3} \cdot S (3,391 \cdot 1 + 4 \cdot \frac{3,391 + 1,565}{2} \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot 1,826 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + 1,826) -$$

$$- (\frac{1}{L} \cdot S + \frac{S}{L} \cdot 1) = 0.$$

Проверка подтверждает правильность решения.

Проверка равновесия рамы в целом (рис. 4.5.6)

Очевидно, что $\sum X = 0$ и $\sum Y = 0$.

$$\sum M_1 = 3,391L \cdot \frac{EJ}{L^3} - 1,826 \cdot L \cdot \frac{EJ}{L^3} \cdot S - 1,565 \cdot \frac{EJ}{L^3} \cdot S \cdot L = 0.$$

Условия равновесия выполняются.

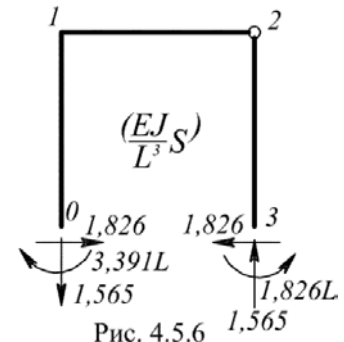


Рис. 4.5.6

Определение перемещений сечения k

Линейное перемещение $\delta_{k\Delta}$

Единичная эпюра $(M_1)_\delta$ для определения линейного перемещения сечения k представлена на рис. 4.3.14.

Перемещения определяются по формуле $\delta = (M)^A (M_1) - \sum R_i \Delta_i$.

$$\delta_k^{\hat{a}} = -\frac{L}{6EJ} (3,391 \cdot L + 4 \cdot 2,478 \cdot \frac{L}{2}) \frac{EJ}{L^2} \cdot S - (-L \cdot \varphi - 1 \cdot S) = (-1,391 + 2) = 0,609S = 0,00609L.$$

$$\delta_{kt}^e = 2S = 0,02L - \text{по условию.}$$

$$\delta_{kt} = \sqrt{(\delta_{kt}^{\hat{a}})^2 + (\delta_{kt}^e)^2} = 0,0209 \text{ м.}$$

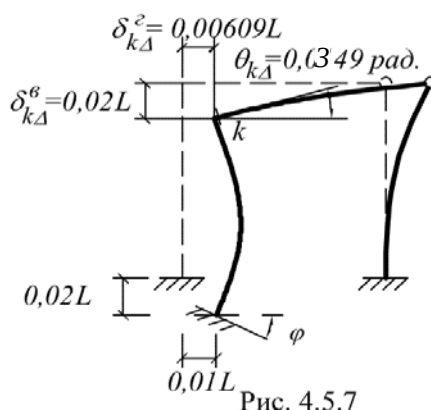
Угол поворота $\theta_{k\Delta}$

Единичная эпюра $(M_1)_\theta$ для определения угла поворота сечения k представлена на рис. 4.3.15.

$$\theta_k = (M)^A (M_1)_\theta - \sum R_i \Delta_i = -\frac{1}{EJ} \cdot 1 \cdot L \cdot 2,478 \frac{EJ}{L^2} \cdot S - (1 \cdot \varphi) = -0,0249 - 0,01 = -0,0349 \text{ рад.}$$

Построение деформированной схемы рамы

Деформированная схема рамы представлена на рис. 4.5.7



5. Контрольные вопросы по методу сил

1. Какая система называется статически неопределимой? Как найти степень статической неопределимости?
2. Что принимается за неизвестные метода сил? Что такое основная и эквивалентная системы метода сил?
3. Как вы понимаете идею метода сил?
4. Как с помощью суммарной единичной эпюры проверить правильность коэффициентов канонических уравнений?
5. Как определяются свободные члены канонических уравнений при расчете на температурные воздействия, на заданные смещения?
6. Каков физический смысл и особенности канонических уравнений метода сил?
7. Каков физический смысл коэффициентов при неизвестных и свободных членов в канонических уравнениях?

МЕТОД ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

6. Расчет балки методом перемещений, Исходные данные, схемы балок

Для одной из заданных схем балок, изображенных на рис. 6.1–6.24 требуется:

а) изобразить расчетную схему, основную систему и эквивалентную системы;
 б) изобразить основную систему, деформированную единичным и заданными воздействиями. Показать на этих рисунках величины, входящие в канонические уравнения;

с) построить эпюры внутренних силовых факторов, возникающих от нагрузки, изменения температуры и заданного смещения опор;

д) найти линейное и угловое перемещения сечения k при всех трех воздействиях;

е) изобразить балку, деформированную каждым из трех воздействий отдельно.

Принять: жесткость балки EI , высоту поперечного сечения $h = 0,1 L$, коэффициент теплового расширения α – постоянными по длине балки; жесткость податливых связей равной $k = EI/L^3$ (податливость – $\lambda = L^3/EI$), $\varphi = \Delta/L$. Другие данные принять по табл. 6.1.

Таблица 6.1

Номер варианта	1	2	3	4	5	6	7
F , кН	4	4	6	8	4	6	4
q , кН/м	2	1	2	3	1	2	3
M , кН·м	2	3	2	1	4	2	6
L , м	2	4	6	4	2	2	4
Δ , м	0,01	0,02	0,03	0,04	0,01	0,02	0,03
t , °C	10	5	15	10	5	10	15

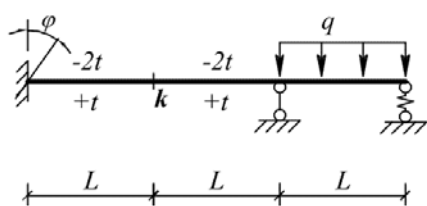


Рис. 6.1

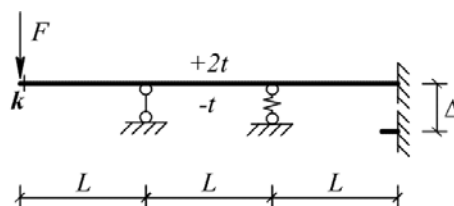


Рис. 6.2

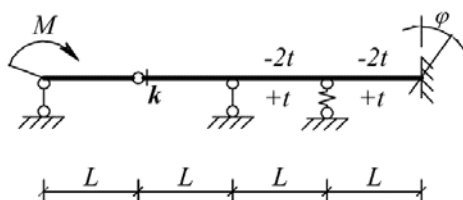


Рис. 6.3

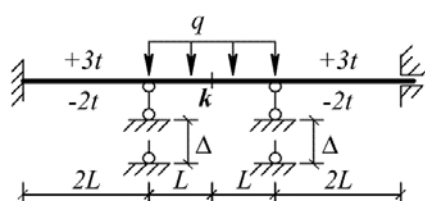


Рис. 6.4

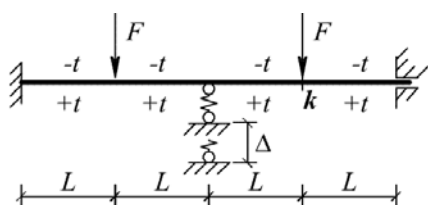


Рис. 6.5

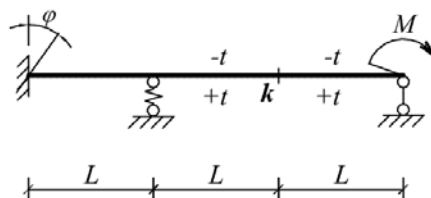


Рис. 6.6

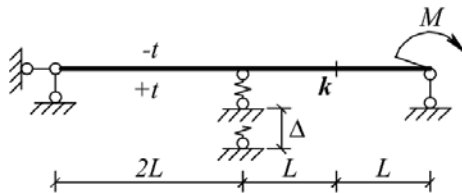


Рис. 6.7

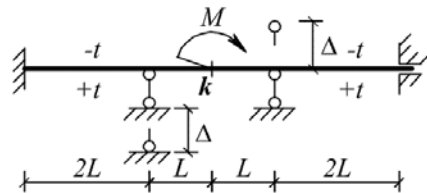


Рис. 6.8

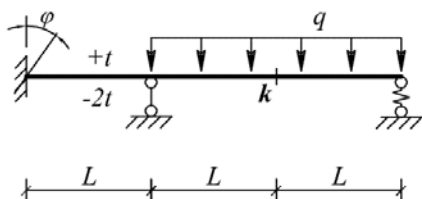


Рис. 6.9

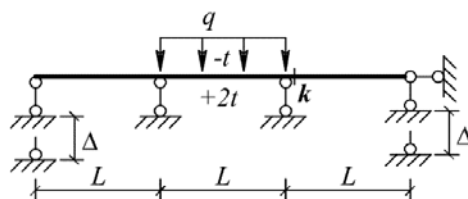


Рис. 6.10

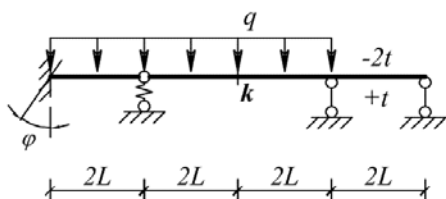


Рис. 6.11

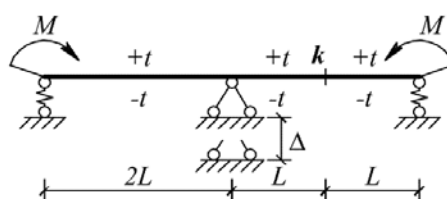


Рис. 6.12

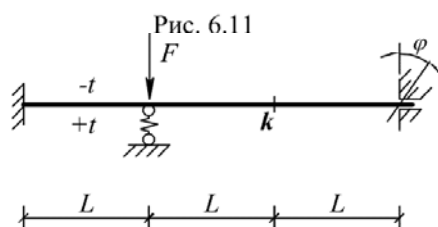


Рис. 6.13

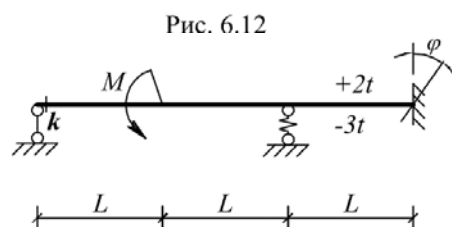


Рис. 6.14

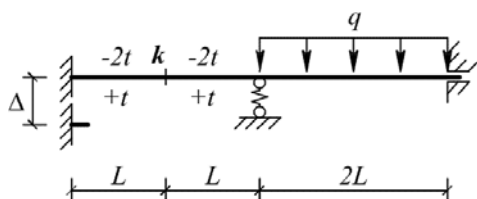


Рис. 6.15

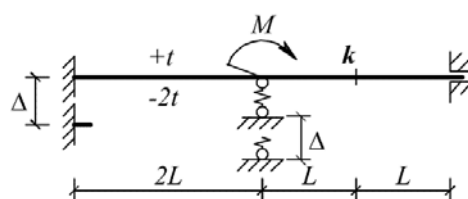


Рис. 6.16

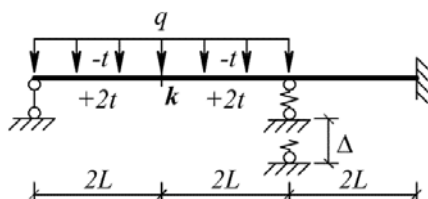


Рис. 6.17

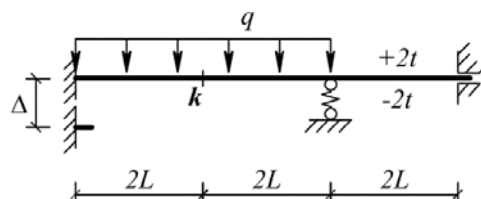


Рис. 6.18

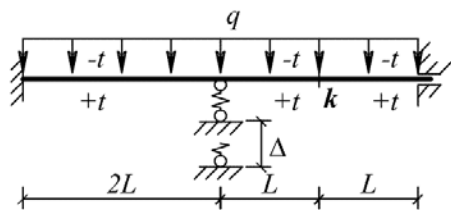


Рис. 6.19

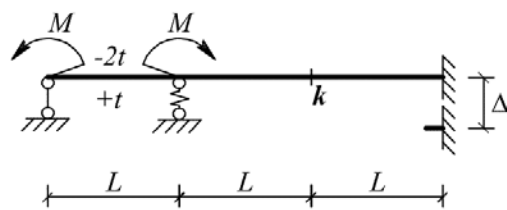


Рис. 6.20

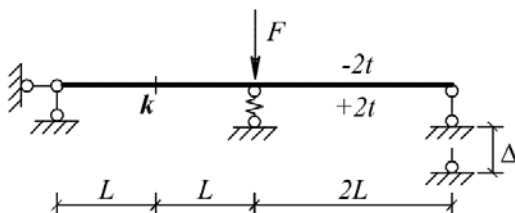


Рис. 6.21

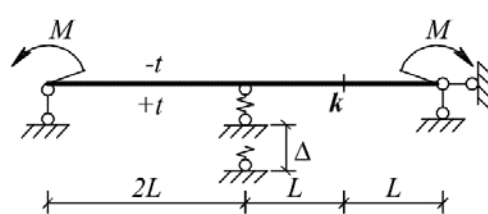


Рис. 6.22

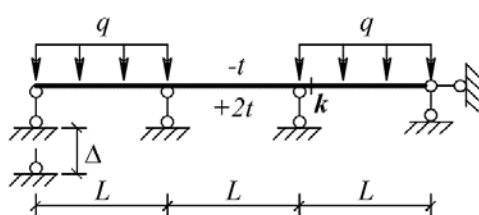


Рис. 6.23

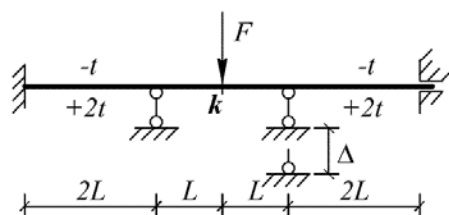


Рис. 6.24

7. Пример расчета балки методом перемещений

Расчетная схема балки представлена на рис. 7.1, основная система – на рис. 7.2.

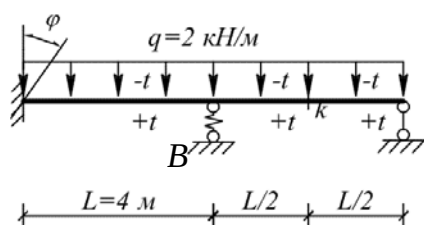


Рис. 7.1

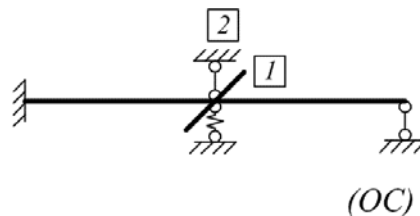


Рис. 7.2

В качестве неизвестных здесь приняты: Z_1 – угол поворота узла B и Z_2 – вертикальное перемещение этого узла. Они определяются из условий равенства нулю реакций в дополнительных связях $\boxed{1}$ и $\boxed{2}$, которые записываются в форме канонических уравнений метода перемещений:

$$\begin{aligned} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + R_1 &= 0, \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + R_2 &= 0. \end{aligned} \quad (7.1)$$

В первом уравнении написано, что реакция (момент) в первой связи равна 0, во втором – реакция (усилие) во второй связи равна 0.

7.1. Определение коэффициентов канонических уравнений

Изгибающие моменты и поперечные силы, возникающие в стержнях основной системы, определяются по таблицам Приложения 1.

Определение r_{ik}

Схема деформирования и эпюра моментов от единичного смещения *первой* связи (поворот узла на $Z_1 = 1$) представлены на рис. 7.1.1 и 7.1.2 соответственно. Схемы определения реакций во введенных связях – на рис. 7.1.3, 7.1.4.

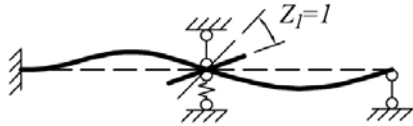


Рис. 7.1.1

Определение r_{11}

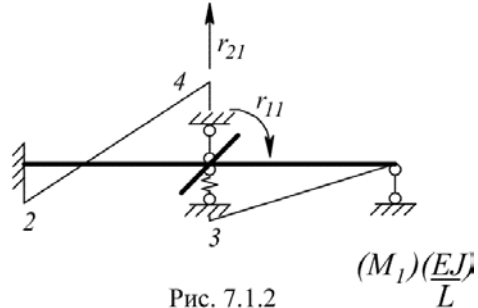


Рис. 7.1.2

Определение r_{21}

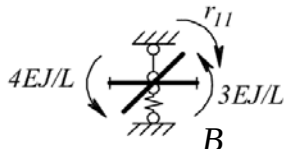


Рис. 7.1.3

$$\sum M_B = 0,$$

$$r_{11} = \frac{7EJ}{4} = 1,75EJ.$$

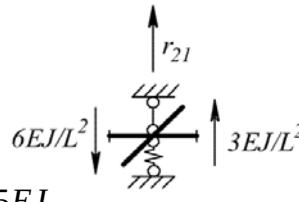


Рис. 7.1.4

$$\sum Y = 0,$$

$$r_{21} = 3 \frac{EJ}{16} = 0,1875EJ.$$

Схема деформирования и эпюра моментов от единичного смещения *второй* связи (линейное перемещение на $Z_2 = 1$) представлены на рис. 7.1.5 и 7.1.6 соответственно. Схемы определения реакций во введенных связях – на рис. 7.1.7, 7.1.8.

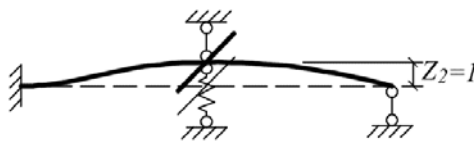


Рис. 7.1.5

Определение r_{12}

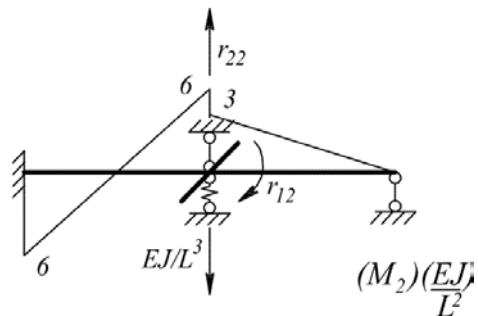


Рис. 7.1.6

Определение r_{22}

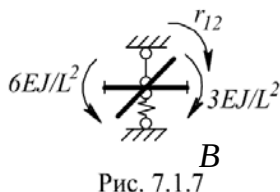


Рис. 7.1.7

$$\sum M_B = 0,$$

$$r_{12} = \frac{3EJ}{16} = 0,1875EJ.$$

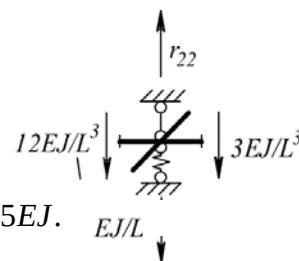


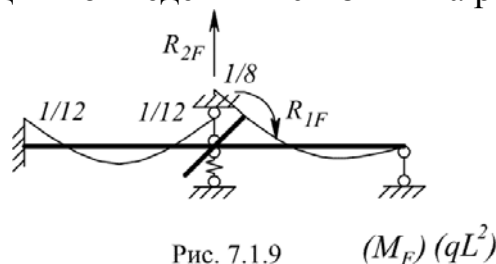
Рис. 7.1.8

$$\sum Y = 0,$$

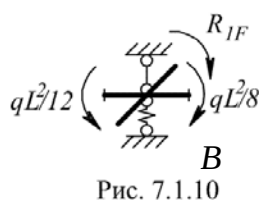
$$r_{22} = \frac{16EJ}{64} = 0,25EJ.$$

Определение свободных членов R_1 и R_2 от силового воздействия

Эпюра моментов в ОС от силового воздействия представлена на рис. 7.1.9. Схемы определения реакций во введенных связях – на рис. 7.1.10, 7.1.11.



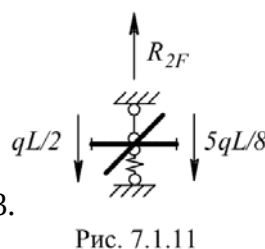
Определение R_{1F}



$$\sum M_B = 0,$$

$$R_{1F} = -\frac{qL^2}{24} = -1,333.$$

Определение R_{2F}

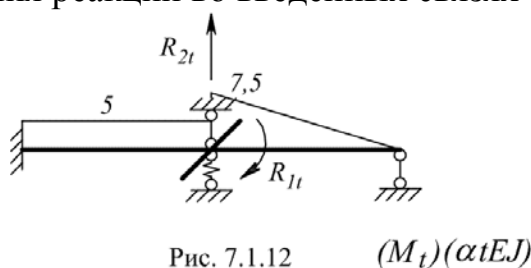


$$\sum Y = 0,$$

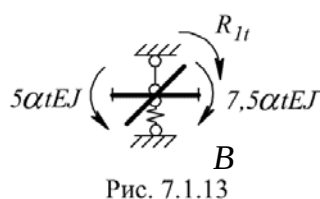
$$R_{2F} = \frac{9}{8}qL = 9.$$

Определение свободных членов R_1 и R_2 от температурного воздействия

Эпюра моментов в ОС от температурного воздействия представлена на рис. 7.1.12. Схемы определения реакций во введенных связях – на рис. 7.1.13, 7.1.14.



Определение R_{1t}



$$\sum M_B = 0,$$

$$R_{1t} = -2,5\alpha t EJ.$$

Определение R_{2t}

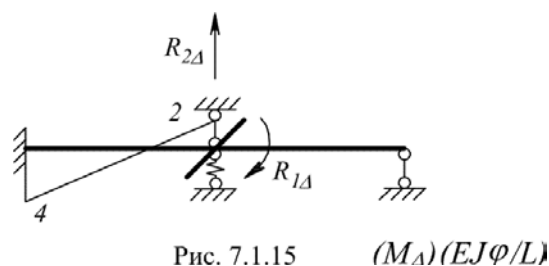


$$\sum Y = 0,$$

$$R_{2t} = 1,875\alpha t EJ.$$

Определение свободных членов R_1 и R_2 от кинематического воздействия

Эпюра моментов в ОС от кинематического воздействия представлена на рис. 7.1.15. Схемы определения реакций во введенных связях – на рис. 7.1.16, 7.1.17.



Определение $R_{1\Delta}$

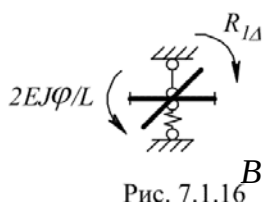


Рис. 7.1.16

$$\begin{aligned}\sum M_B &= 0, \\ R_{1\Delta} &= \frac{2EJ}{L} \varphi = \\ &= 0,0075EJ.\end{aligned}$$

Определение $R_{2\Delta}$

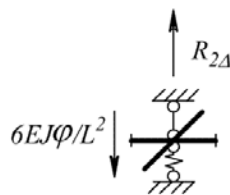


Рис. 7.1.17

$$\begin{aligned}\sum Y &= 0, \\ R_{2\Delta} &= \frac{6EJ}{16} \cdot 0,015 = \\ &= 0,005625EJ.\end{aligned}$$

7.2. Определение неизвестных Z_1 и Z_2

Запишем канонические уравнения (7.1) в матричной форме

$$A \cdot Z + B = 0,$$

(7.2.1)

где

$$\begin{aligned}A &= \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix} = EJ \begin{bmatrix} 1,75 & 0,1875 \\ 0,1875 & 0,25 \end{bmatrix}, \quad Z = \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{bmatrix} \\ B &= \begin{bmatrix} R_{1F} & R_{1t} & R_{1\Delta} \\ R_{2F} & R_{2t} & R_{2\Delta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1,333 & -2,5\alpha t & 0,0075 \\ 9 & 1,875\alpha t & 0,005625 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Таким образом, уравнение (7.2.1) приобретает вид

$$\begin{bmatrix} 1,75 & 0,1875 \\ 0,1875 & 0,25 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1,333/EJ & -2,5\alpha t & 0,0075 \\ 9/EJ & 1,875\alpha t & 0,005625 \end{bmatrix} = 0.$$

Решение этого уравнения приведено на рис. 7.2.1 в распечатке рабочей страницы Matlab.

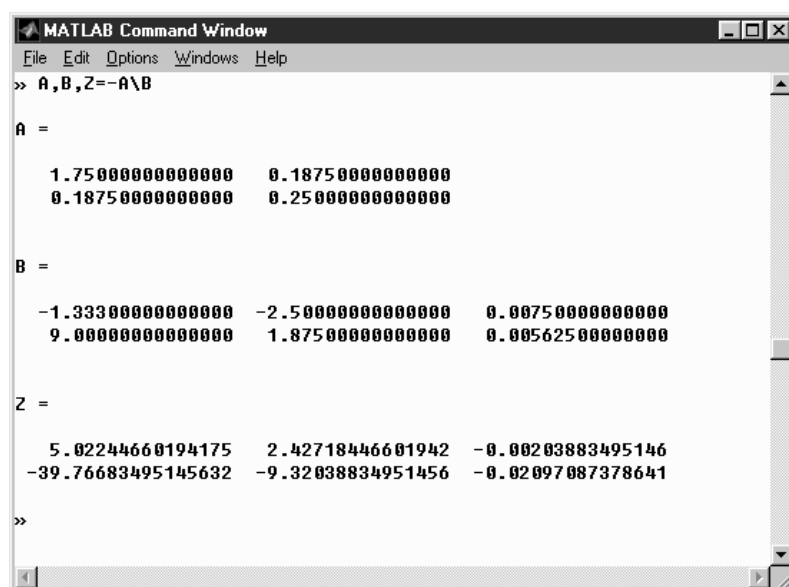


Рис. 7.2.1

Получено:

$$Z = \begin{bmatrix} 5,022/EJ & 2,427\alpha t & -0,002038 \\ -39,77/EJ & -9,320\alpha t & -0,02097 \end{bmatrix}.$$

7.3. Построение эпюр, проверка решения, определение перемещений от силового воздействия

Построение эпюр

Построение окончательных эпюр $(M)^F$ и $(Q)^F$ представлено на рис. 7.3.1–7.3.4.

$$(M)^F = (M_1)Z_{1F} + (M_2)Z_{2F} + (M_F).$$

$$Z_{1F} = 5,022 \frac{1}{EJ}, \quad Z_{2F} = -39,77 \frac{1}{EJ}.$$

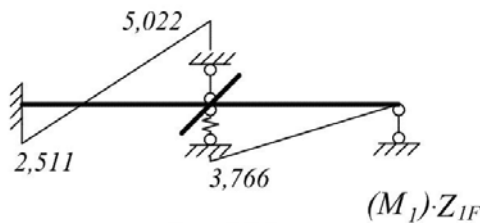


Рис. 7.3.1

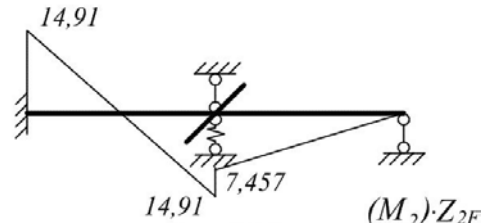


Рис. 7.3.2

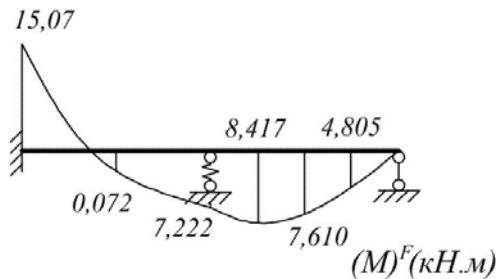


Рис. 7.3.3

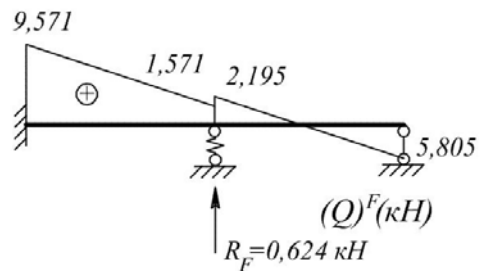


Рис. 7.3.4

Кинематическая проверка

Найдем взаимный угол поворота сечений в узле В (рис. 7.3.5), который по условию должен быть равен нулю.

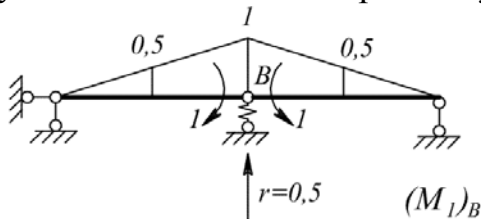


Рис. 7.3.5

$$\begin{aligned} \theta_B &= (M)^F (\dot{I}_1)_A + R_F \cdot r \cdot \lambda = \\ &= -\frac{4}{6EJ} \left(4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0,072 + 1 \cdot 7,222 + 1 \cdot 7,222 + \right. \\ &\quad \left. + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 7,610 \right) \cdot \alpha t EJ + 0,624 \cdot 0,5 \cdot \frac{4^3}{EJ} = 0. \end{aligned}$$

Проверка подтверждает правильность решения.

Проверка равновесия балки в целом

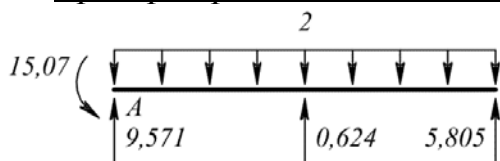


Рис. 7.3.6

$$\sum Y = 2 \cdot 8 - 9,571 - 0,624 - 5,805 = 0,$$

$$\sum M_A = 2 \cdot 8 \cdot 4 - 15,07 - 0,624 \cdot 4 - 5,805 \cdot 8 = 0.$$

Условия равновесия выполняются.

Определение перемещений сечения k

Вертикальное перемещение δ_{kF}

Единичные загрузке и эпюра $(M_1)_\delta$ для определения вертикального перемещения сечения k представлены на рис. 7.3.7.

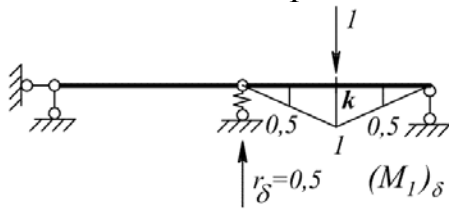


Рис. 7.3.7

$$\begin{aligned}\delta_{kF} &= (M)^F (M_1)_\delta + R_F \cdot r_\delta \cdot \lambda = \\ &= \frac{2}{6EJ} \left(4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 8,417 + 1 \cdot 7,61 + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4,805 \right) + \\ &+ 0,624 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{EJ} = \frac{33,85}{EJ} (\text{м}).\end{aligned}$$

Угол поворота θ_{kF}

Единичные загрузке и эпюра $(M_1)_\theta$ для определения угла поворота сечения k представлены на рис. 7.3.8.

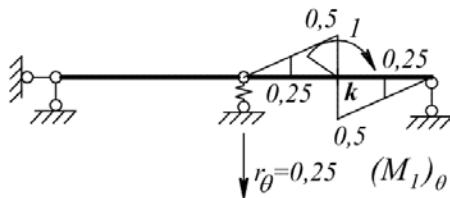


Рис. 7.3.8

$$\begin{aligned}\theta_{kF} &= (M)^F (M_1)_\theta + R_F \cdot r_\theta \cdot \lambda = \\ &= \frac{2}{6EJ} \left(-4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 8,417 - \frac{1}{2} \cdot 7,61 + 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot 4,805 \right) - \\ &- 0,624 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{4^3}{EJ} = -\frac{11,19}{EJ} (\text{рад}).\end{aligned}$$

Построение деформированной схемы балки

Для более качественного построения деформированной схемы балки найдем дополнительно вертикальное перемещение узла В.

$$\delta_{BF} = R_F \cdot 1 \cdot \lambda = 0,624 \cdot \frac{64}{EJ} = \frac{40,13}{EJ} (\text{м}).$$

Деформированная схема балки изображена на рисунке 7.3.9.

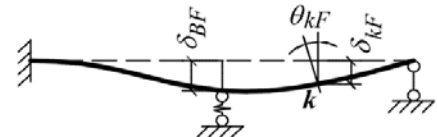


Рис. 7.3.9

7.4. Построение эпюр, проверка решения, определение перемещений от температурного воздействия

Построение эпюр

Построение окончательных эпюр $(M)^t$ и $(Q)^t$ представлено на рис. 7.4.1–7.4.4.

$$(M)^t = (M_1)Z_{1t} + (M_2)Z_{2t} + (M_t).$$

$$Z_{1t} = 2,427\alpha t, \quad Z_{2t} = -9,320\alpha t.$$

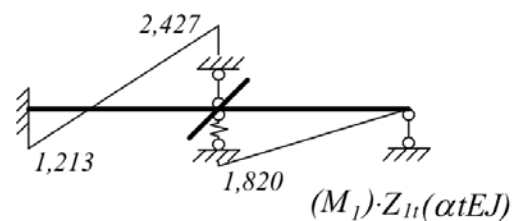


Рис. 7.4.1

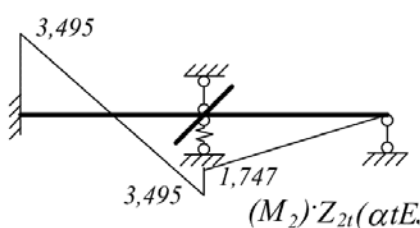


Рис. 7.4.2

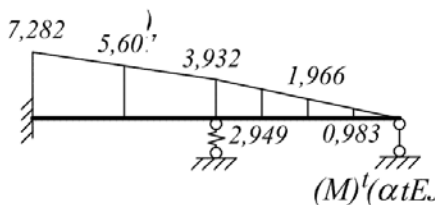


Рис. 7.4.3

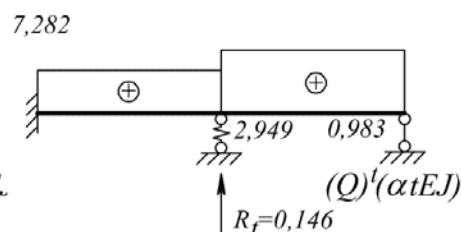


Рис. 7.4.4

Кинематическая проверка

Найдем взаимный угол поворота сечений в узле В (рис. 7.3.5), который по условию должен быть равен нулю.

$$\begin{aligned}\theta_B &= (M)^t (I_1)_A + \sum \frac{\alpha \Delta t}{h} \omega_{(M)_A} + R_t \cdot r \cdot \lambda = \\ &= \frac{4}{6EJ} \left(4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 5,607 + 1 \cdot 3,932 + 1 \cdot 3,932 + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1,966 \right) \alpha t E J + \left(-1 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} \right) + 0,146 \cdot 0,25 \alpha t E J \frac{4^3}{EJ} = 0.\end{aligned}$$

Проверка подтверждает правильность решения.

Проверка равновесия балки в целом

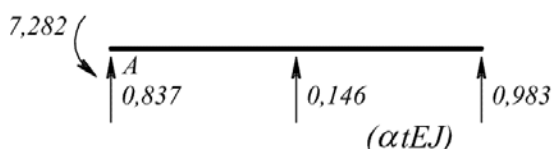


Рис. 7.4.5

$$\sum Y = 0,836 + 0,146 - 0,983 = 0,$$

$$\sum M_A = 7,282 + 0,146 \cdot 4 - 0,983 \cdot 8 = 0.$$

Условия равновесия выполняются.

Определение перемещений сечения k

Вертикальное перемещение δ_k

Единичные загрузке и эпюра $(M_1)_\delta$ для определения вертикального перемещения сечения k представлены на рис. 7.3.7.

$$\begin{aligned}\delta_{kt} &= (M)^t (M_1)_\delta + \sum \frac{\alpha \Delta t}{h} \omega_{N_{1\delta}} + R_t \cdot r_\delta \cdot \lambda = \\ &= -\frac{8}{6EJ} \left(4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2,949 + 1 \cdot 1,966 + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0,983 \right) + \alpha t E J + \frac{\alpha 2t}{0,4} 1 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 + 0,146 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{64}{EJ} \alpha t E J = 10,74 \alpha t (\text{м}).\end{aligned}$$

Угол поворота θ_k

Единичные загрузке и эпюра $(M_1)_\theta$ для определения угла поворота сечения k представлены на рис. 7.3.8.

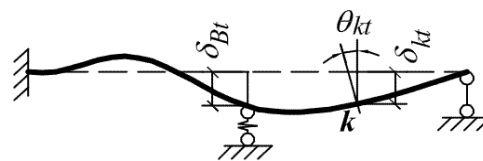
$$\begin{aligned}\theta_{kt} &= (M)^t (M_1)_\theta + \sum \frac{\alpha \Delta t}{h} \omega_{M_\theta} + R_t \cdot r_\theta \cdot \lambda = \\ &= \frac{2}{6EJ} \left(4 \cdot \frac{1}{4} \cdot 2,949 + \frac{1}{2} \cdot 1,966 - \frac{1}{2} \cdot 1,966 - 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot 0,983 \right) \alpha t E J + 0 - 0,146 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{64}{EJ} \alpha t E J = -1,681 \alpha t (\text{рад}).\end{aligned}$$

Построение деформированной схемы балки

Для более качественного построения деформированной схемы балки найдем дополнительно вертикальное перемещение узла В.

$$\delta_{Bt} = R_t \cdot 1 \cdot \lambda = 0,146 \alpha t EJ \cdot \frac{64}{EJ} = 38,4 \alpha t (\text{и}).$$

Деформированная схема балки изображена на рисунке 7.4.6.



7.5. Построение эпюр, проверка решения, определение перемещений от кинематического воздействия

Построение эпюр

Построение окончательных эпюр $(M)^t$ и $(Q)^t$ представлено на рис. 7.5.1–7.5.4.

$$(M)^\Delta = (M_1)Z_{1\Delta} + (M_2)Z_{2\Delta} + (M_\Delta).$$

$$Z_{1\Delta} = -0,002038, Z_{2\Delta} = -0,0297.$$

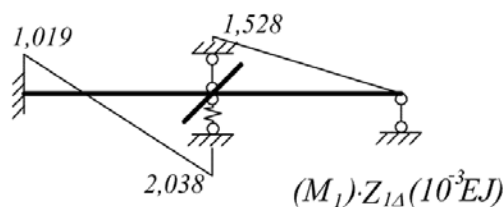


Рис. 7.5.1

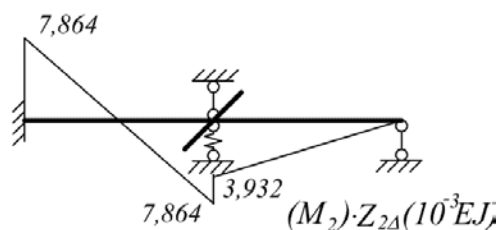


Рис. 7.5.2

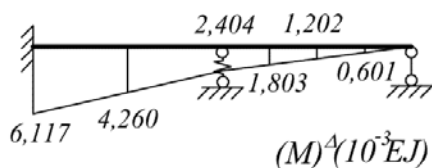


Рис. 7.5.3

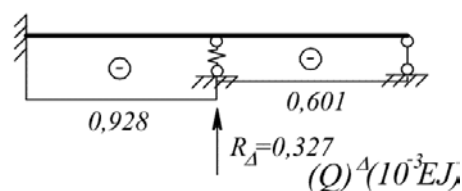


Рис. 7.5.4

Кинематическая проверка

Найдем взаимный угол поворота сечений в узле В (рис. 7.3.5), который по условию должен быть равен нулю.

$$\theta_B = (M)^\Delta (M_1) + R_\Delta \cdot r \cdot \lambda =$$

$$= -\frac{4}{6EJ} \left(4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4,260 + 2,404 \cdot 1 \cdot 2 + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1,202 \right) \cdot 10^{-2} EJ + 0,323 \cdot 0,5 \cdot 10^{-3} EJ \cdot \frac{64}{EJ} = 0.$$

Проверка подтверждает правильность решения.

Проверка равновесия балки в целом

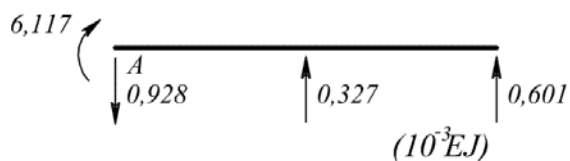


Рис. 7.5.5

$$\sum Y = (0,327 + 0,601 - 0,928) \cdot 10^{-3} EJ = 0,$$

$$\sum M_A = (0,117 - 0,327 \cdot 4 - 0,601 \cdot 8) \cdot 10^{-3} EJ = 0.$$

Условия равновесия выполняются.

Определение перемещений сечения k

Вертикальное перемещение $\delta_{k\Delta}$

Единичные загрузке и эпюра $(M_1)_\delta$ для определения вертикального перемещения сечения k представлены на рис. 7.3.7.

$$\begin{aligned}\delta_{k\Delta} &= (M)^\Delta (M_1)_\delta + R_\Delta \cdot r_\delta \cdot \lambda = \\ &= \frac{2}{6EJ} \left(4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0,803 + 1,202 \cdot 2 + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0,601 \right) \cdot 10^{-3} EJ + 0,327 \cdot 0,5 \cdot \frac{64}{EJ} \cdot 10^{-3} EJ = 12,89 \cdot 10^{-3} \text{ (i)} .\end{aligned}$$

Угол поворота $\theta_{k\Delta}$

Единичные загрузке и эпюра $(M_1)_\theta$ для определения угла поворота сечения k представлены на рис. 7.3.8.

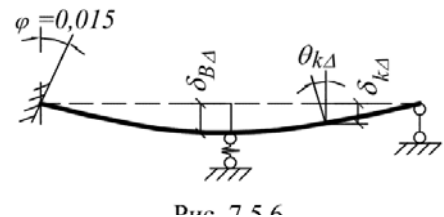
$$\begin{aligned}\theta_{k\Delta} &= (M)^\Delta (M_1)_\theta + R_\Delta \cdot r_\theta \cdot \lambda = \\ &= \frac{2}{6EJ} \left(4 \cdot \frac{1}{4} \cdot 0,803 - \frac{1}{2} \cdot 1,202 + \frac{1}{2} \cdot 1,202 + 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot 0,601 \right) \cdot 10^{-3} EJ - 0,327 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{64}{EJ} \cdot 10^{-3} EJ = -5,633 \cdot 10^{-3} \text{ (ддä)} .\end{aligned}$$

Построение деформированной схемы балки

Для более качественного построения деформированной схемы балки найдем дополнительно вертикальное перемещение узла В.

$$\delta_{B\Delta} = R_\Delta \cdot 1 \cdot \lambda = 0,327 \cdot 10^{-3} EJ \cdot \frac{64}{EJ} = 20,93 \cdot 10^{-3} \text{ (i)} .$$

Деформированная схема балки изображена на рисунке 7.5.6.



8. Расчет рамы методом перемещений. Исходные данные, схемы рам

Для одной из заданных схем рам, изображенных на рис. 8.1–8.24 требуется:

- изобразить расчетную схему, основную и эквивалентную системы;
- изобразить основную систему, деформированную единичными и заданными воздействиями. Показать на этих рисунках реакции, возникающие в наложенных связях от единичных перемещений и заданных воздействий: нагрузки, температуры, смещений опор;
- построить эпюры внутренних силовых факторов, возникающих от нагрузки, температуры и заданного смещения опор;
- найти полное линейное и угловое перемещения сечения k при всех трех воздействиях;
- изобразить раму, деформированную каждым из трех воздействий отдельно.

Принять: изгибную жесткость стоек рамы равной EI , жесткость горизонтальных элементов равной $2EI$; высоту поперечного сечения $h = 0,1 L$, коэффициент теплового расширения α – одинаковыми для всех стержней; центр тяжести поперечного сечения – в середине его высоты. Другие данные принять по табл. 8.1.

Таблица 8.1

Номер варианта	1	2	3	4	5	6	7
F , кН	10	8	6	4	6	8	10
q , кН/м	2,5	2	3	2	3	2	2,5
L , м	4	6	4	5	3	4	6
Δ , м	$0,01L$	$0,02L$	$0,03L$	$0,01L$	$0,04L$	$0,05L$	$0,01L$
φ , рад	0,005	0,004	0,003	0,002	0,001	0,006	0,008
$t_{\text{вн}}$, °С	10	16	18	20	14	12	22
$t_{\text{нар}}$, °С	-20	-30	-40	-16	-18	-22	-32

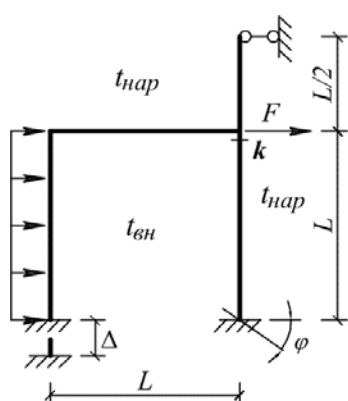


Рис. 8.1

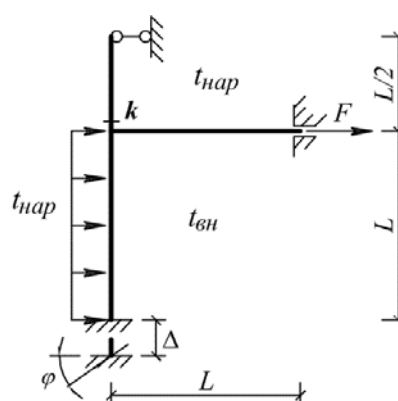


Рис. 8.2

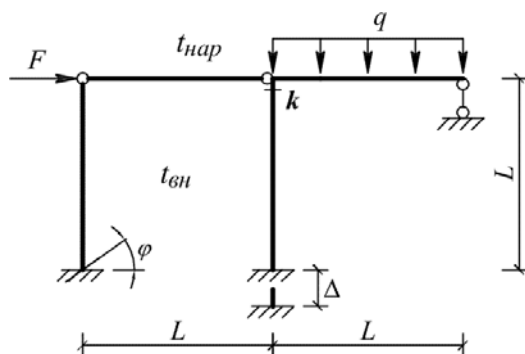


Рис. 8.3

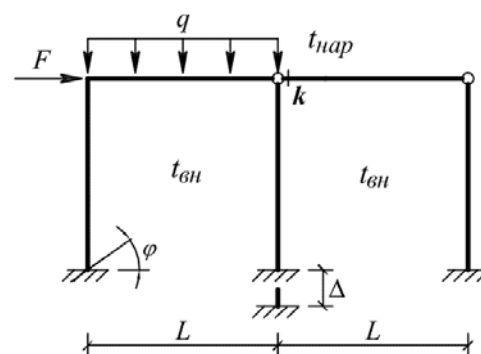


Рис. 8.4

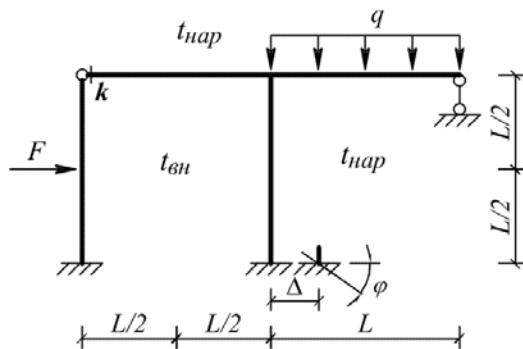


Рис. 8.5

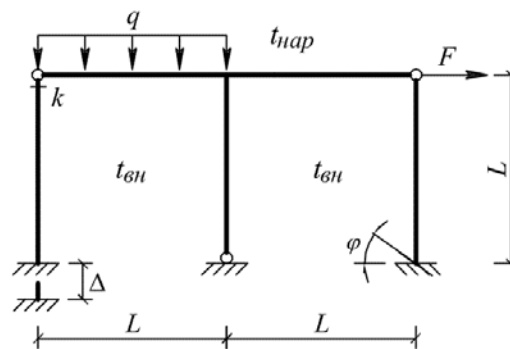


Рис. 8.6

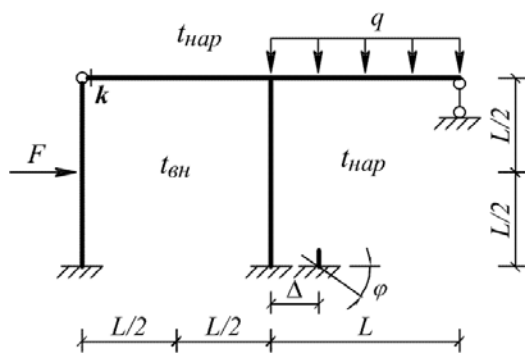


Рис. 8.5

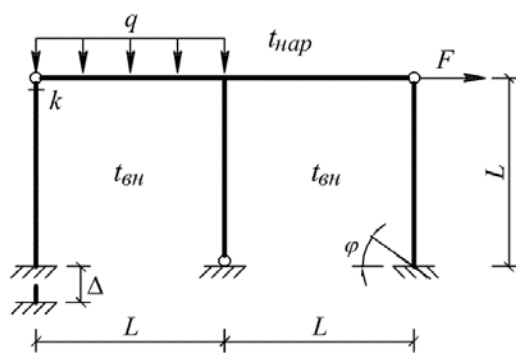


Рис. 8.6

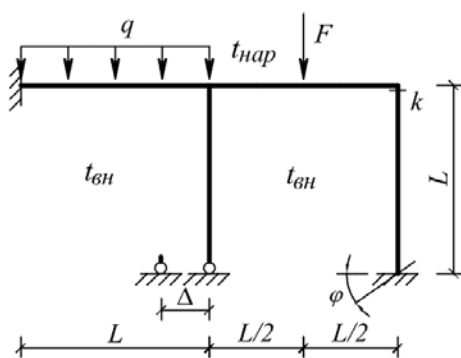


Рис. 8.7

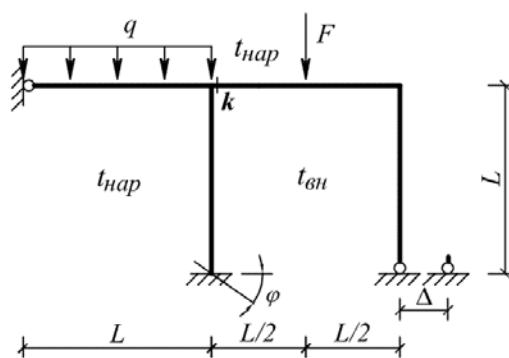


Рис. 8.8

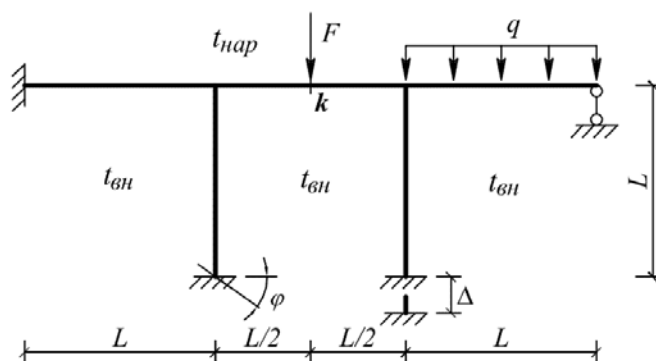


Рис. 8.9

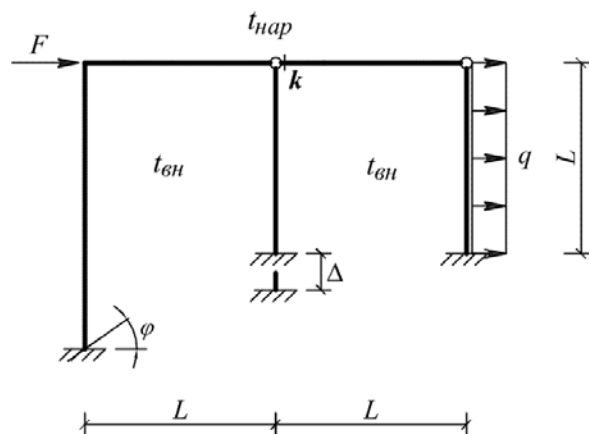


Рис. 8.10

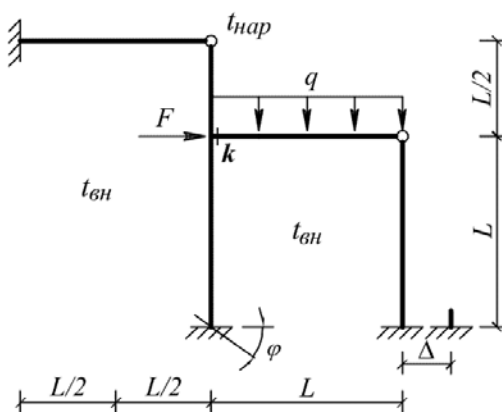


Рис. 8.11

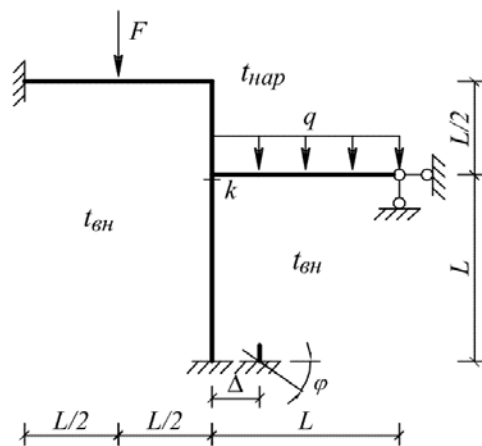


Рис. 8.12

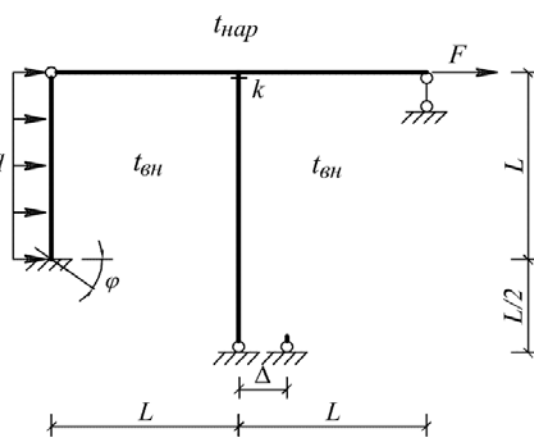


Рис. 8.13

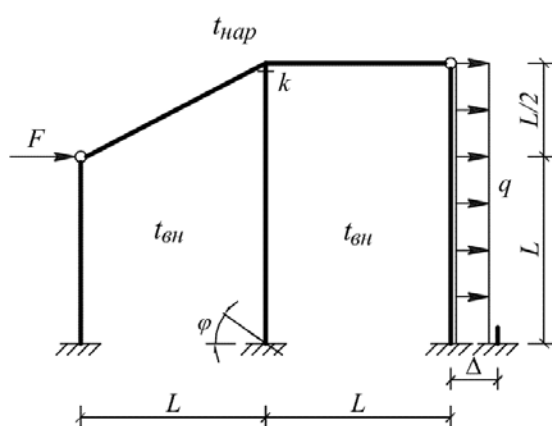


Рис. 8.14

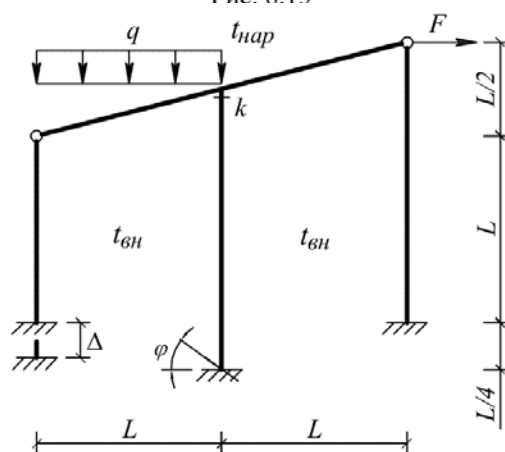


Рис. 8.15

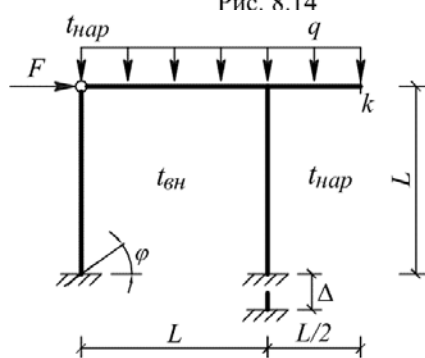


Рис. 8.16

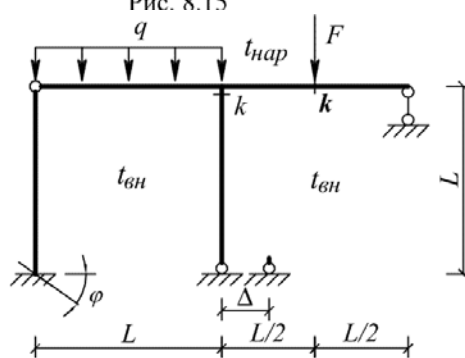


Рис. 8.17

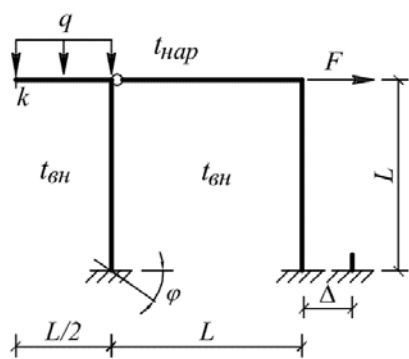


Рис. 8.18

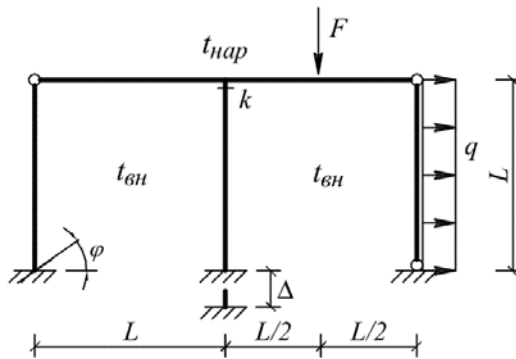
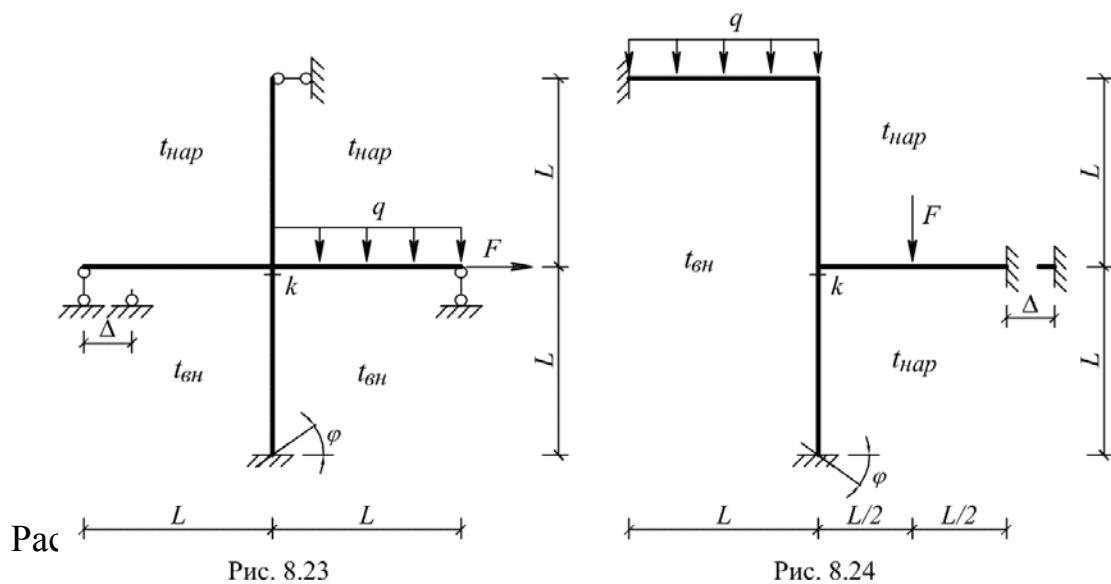
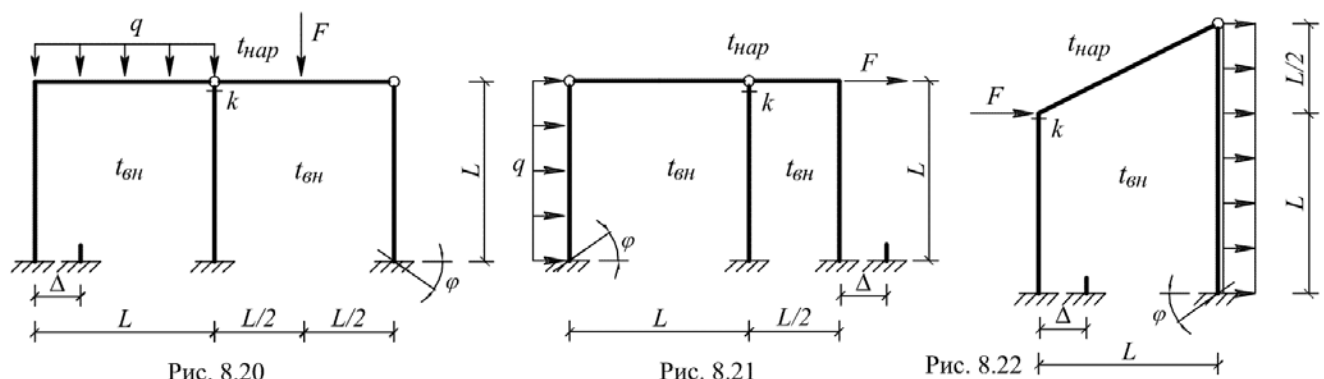
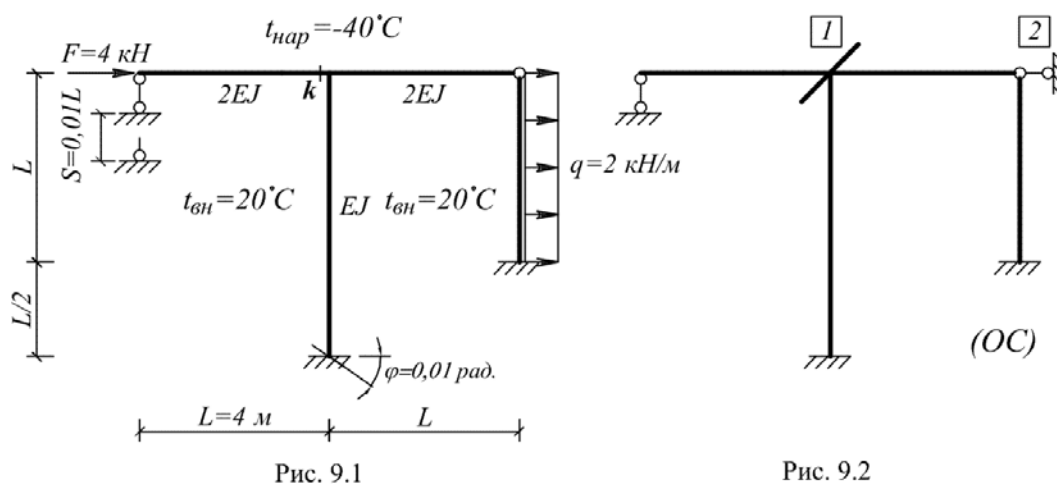


Рис. 8.19



та рис. 9.2.



Перемещения Z_1 и Z_2 определяются из условия равенства нулю в дополнительных связях **1** и **2**. Эти условия записываются в форме канонических уравнений метода перемещений:

$$\begin{aligned} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + R_1 &= 0, \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + R_2 &= 0. \end{aligned} \quad (9.1)$$

В первом уравнении написано, что реакция (момент) в первой связи равна 0, во втором – реакция (усилие) во второй связи равна 0.

9.1. Определение коэффициентов канонических уравнений

Изгибающие моменты и поперечные силы, возникающие в стержнях основной системы, определяются по таблицам Приложения 1.

Определение r_{ik}

Схема деформирования и эпюра моментов от единичного смещения *первой* связи (поворот узла на $Z_1 = 1$) представлены на рис. 9.1.1 и 9.1.2 соответственно. Схемы определения реакций во введенных связях – на рис. 9.1.3, 9.1.4.

Схема деформирования и эпюра моментов от единичного смещения *второй* связи (линейное перемещение на $Z_2 = 1$) представлены на рис. 9.1.5 и 9.1.6 соответственно. Схемы определения реакций во введенных связях – на рис. 9.1.7, 9.1.8.

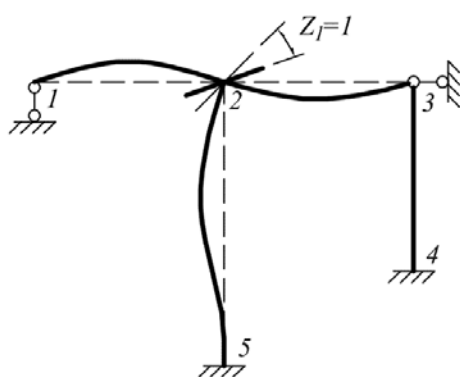


Рис. 9.1.1

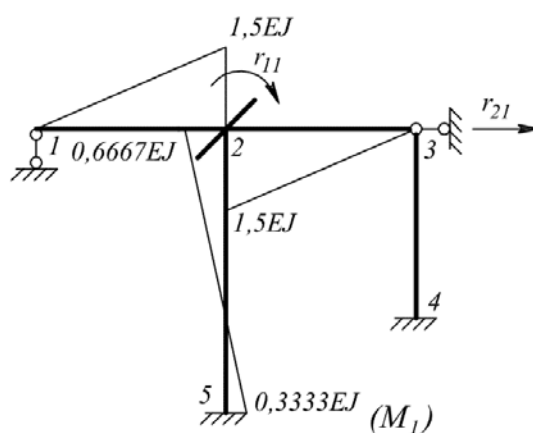


Рис. 9.1.2

$$m_{21} = 3 \frac{2EJ}{4} = 1,5EJ, \quad m_{23} = 3 \frac{2EJ}{4} = 1,5EJ, \quad m_{25} = 2m_{52} = 4 \frac{EJ}{6} = 0,6667EJ.$$

Определение r_{11}

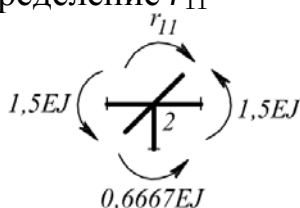


Рис. 9.1.3

$$\sum M_2 = 0, \\ r_{11} = 3,667EJ.$$

Определение r_{21}

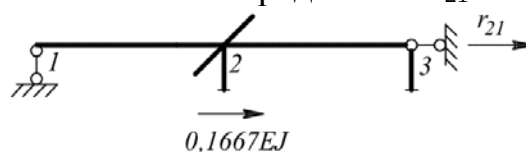


Рис. 9.1.4

$$Q_{25} = (2/3 + 1/3)EJ/6 = 0,1667EJ. \\ \sum X = 0, \\ r_{21} = -0,1667EJ$$

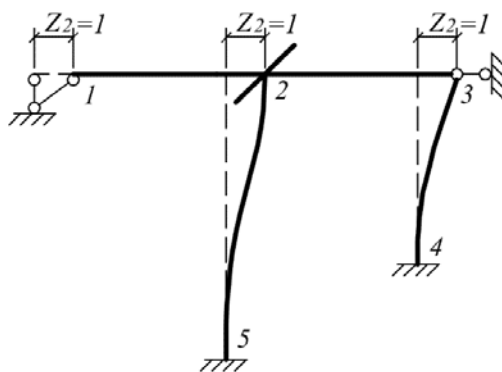


Рис. 9.1.5

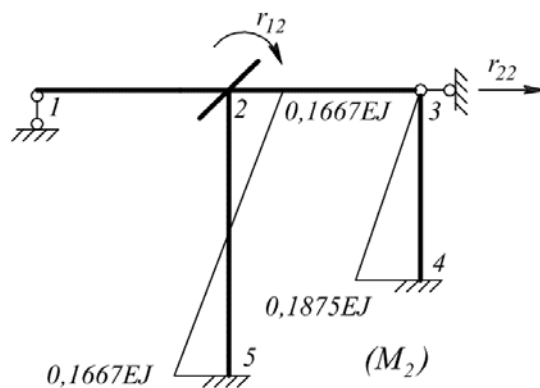


Рис. 9.1.6

$$m_{25} = m_{52} = \frac{6EJ}{6^2} = 0,1667EJ, \quad m_{43} = \frac{3EJ}{4^2} = 0,1875EJ.$$

Определение r_{12}

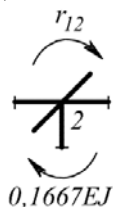


Рис. 9.1.7

Определение r_{22}

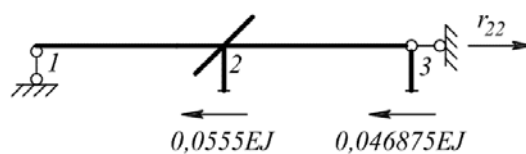


Рис. 9.1.8

$$\begin{aligned} \sum M_2 &= 0, \\ r_{12} &= -0,1667EJ. \end{aligned} \quad \begin{aligned} Q_{25} &= 12EJ/6^3 = 0,0555EJ, \quad Q_{34} = 3EJ/4^3 = 0,0468EJ. \\ \sum X &= 0, \\ r_{22} &= 0,1023EJ \end{aligned}$$

Определение свободных членов R_1 и R_2 от силового воздействия

Эпюра моментов в ОС от силового воздействия представлена на рис. 9.1.9. Схемы определения реакций во введенных связях – на рис. 9.1.10, 9.1.11

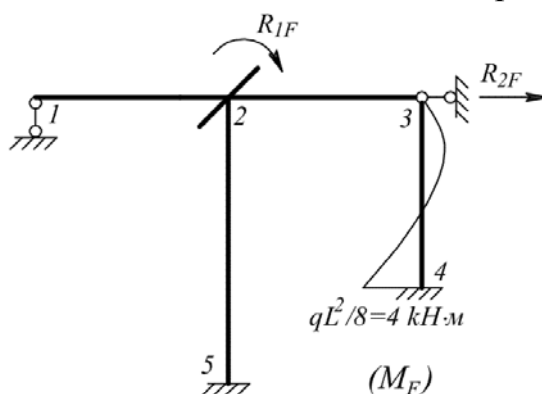


Рис. 9.1.9

Определение R_{1F}

Определение R_{2F}

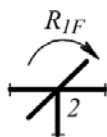


Рис. 9.1.10

$$\sum M_2 = 0,$$

$$R_{1F} = 0.$$

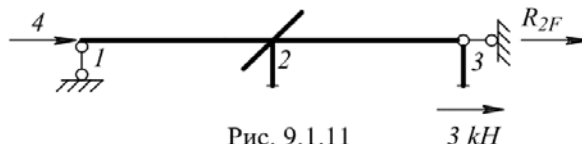


Рис. 9.1.11

$$Q_{34} = 3qL/8 = 3 \cdot 2 \cdot 4/8 = 3 \text{ кН}$$

$$\sum X = 0,$$

$$R_{2F} = -7 \text{ кН}.$$

Определение свободных членов R_1 и R_2 от температурного воздействия

В начале найдем усилия в основной системе, возникающие в результате изменения длин стержней. Средняя температура по высоте поперечного сечения стержней 1–2, 2–3 и 3–4 равна $t_0 = \frac{20 - 40}{2} = -10^\circ \text{C}$, а в стержне 2–5 –

$t_0 = \frac{20 + 20}{2} = 20^\circ \text{C}$. Приращения длин стержней определяются по формуле $\Delta_i = \alpha \cdot t_{0i} \cdot L_i$.

Схема деформирования и эпюра моментов от изменения длин стержней представлены на рис. 9.1.12 и 9.1.13 соответственно. Схемы определения реакций во введенных связях – на рис. 9.1.14, 9.1.15.

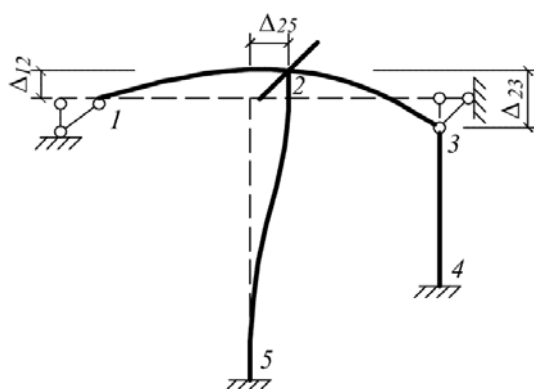


Рис. 9.1.12

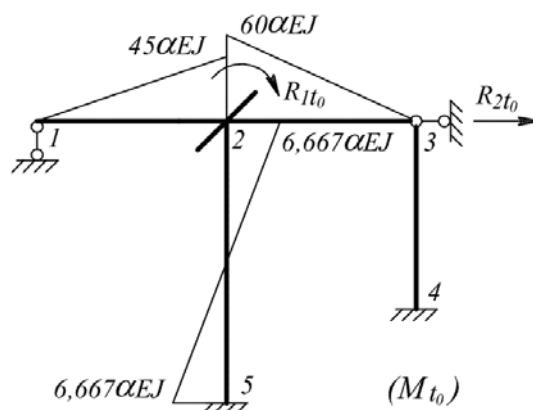


Рис. 9.1.13

Относительные смещения концов стержней:

$$\Delta_{12} = \alpha \cdot 20^\circ \cdot 6 = 120\alpha,$$

$$\Delta_{25} = \alpha \cdot 10^\circ \cdot 4 = 40\alpha,$$

$$\Delta_{23} = \alpha \cdot 20^\circ \cdot 4 + \alpha \cdot 20^\circ \cdot 6 = 160\alpha.$$

$$m_{12} = \frac{3 \cdot 2 EJ}{16} \cdot 120\alpha = 45\alpha EJ,$$

$$m_{23} = \frac{3 \cdot 2 EJ}{16} \cdot 160\alpha = 60\alpha EJ,$$

$$m_{25} = m_{52} = \frac{6 EJ}{36} \cdot 40\alpha = 6,667\alpha EJ.$$

Определение R_{1t_0}

Определение R_{2t_0}

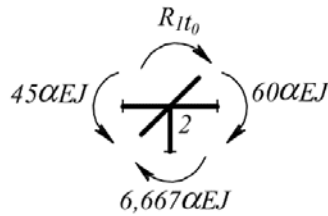


Рис. 9.1.14

$$\sum M_2 = 0,$$

$$R_{1t0} = -21,67\alpha EJ.$$

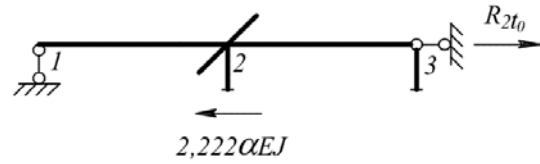


Рис. 9.1.15

$$Q_{23} = 2 \cdot \frac{6,667}{6} \alpha EJ.$$

$$\sum X = 0,$$

$$R_{2t0} = 2,222\alpha EJ.$$

Далее найдем усилия, возникающие в результате искривлений стержней. Они вызываются температурной составляющей $\Delta t = |t_1 - t_2|$ и определяются по таблице Приложения 1. Для стержней 1-2, 2-3 и 3-4 $\Delta t = |20 + 40| = 60$ для стержня 2-5 $\Delta t = |20 - 20| = 0$. Эпюра моментов от искривления стержней представлена на рис. 9.1.16. Схемы определения реакций во введенных связях – на рис. 9.1.17, 9.1.18.

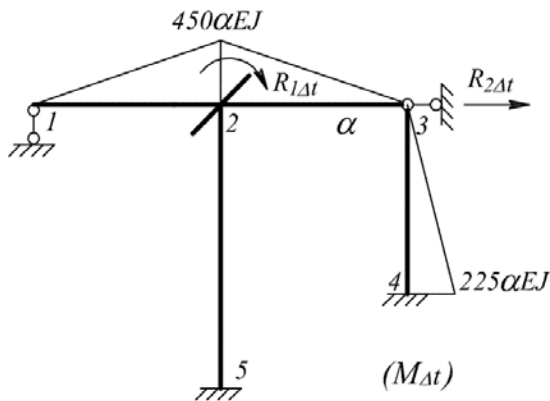


Рис. 9.1.16

Определение $R_{1\Delta t}$

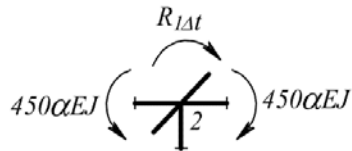


Рис. 9.1.17

$$\sum M_2 = 0,$$

$$R_{1\Delta t} = 0.$$

Изгибающие моменты в стержнях 2–1, 2–3 и 4–3 получены по формуле:

$$M = \frac{3 \alpha \Delta t EJ}{2 h}.$$

$$m_{21} = m_{23} = \frac{3 \alpha 60 \cdot 2 EJ}{2 \cdot 0,1 \cdot 4} = 450\alpha EJ,$$

$$m_{43} = \frac{3 \alpha 60 \cdot EJ}{2 \cdot 0,1 \cdot 4} = 225\alpha EJ.$$

Определение $R_{2\Delta t}$

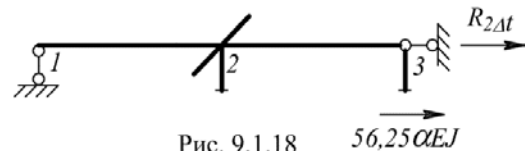


Рис. 9.1.18

$$Q_{34} = \frac{225\alpha EJ}{4} = 56,25\alpha EJ.$$

$$\sum X = 0,$$

$$R_{2\Delta t} = -56,25\alpha EJ.$$

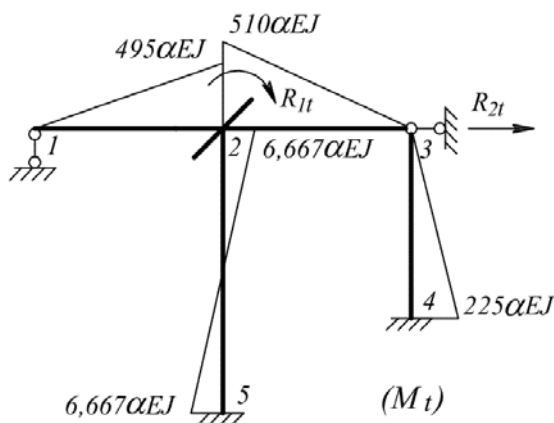


Рис. 9.1.19

Эпюру (M_t) получаем как сумму:

$$(M_t) = (M_{t0}) + (M_{\Delta t}) - \text{рис. 9.1.19.}$$

Полные значения реакций во введенных связях получаем также суммированием:

$$R_{1t} = R_{1t0} + R_{1\Delta t}; \quad R_{2t} = R_{2t0} + R_{2\Delta t}.$$

$$\text{Итак, } R_{1t} = -21,67\alpha EJ;$$

$$R_{2t} = (2,222 - 56,25)\alpha EJ = -54,03\alpha EJ.$$

Определение свободных членов R_1 и R_2

от кинематического воздействия

Здесь усилия в элементах основной системы определяются также по таблицам Приложения 1.

Сначала рассмотрим действие только S . Схема деформирования и эпюра моментов (M_S) представлены на рис. 9.1.20 и 9.1.21 соответственно. Схемы определения реакций во введенных связях – на рис. 9.1.22, 9.1.23.

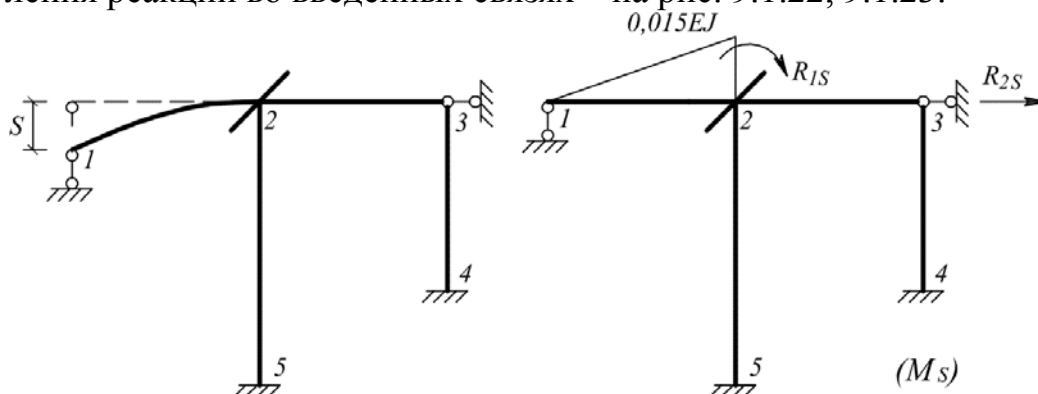


Рис. 9.1.20

Рис. 9.1.21

$$m_{21} = \frac{3 \cdot 2EJ}{16} \cdot 0,01 \cdot 4 = 0,015EJ$$

Определение R_{1S}

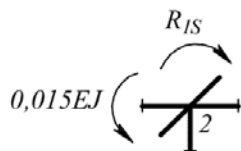


Рис. 9.1.22

$$\sum M_2 = 0,$$

$$R_{1S} = 0,015EJ.$$

Определение R_{2S}

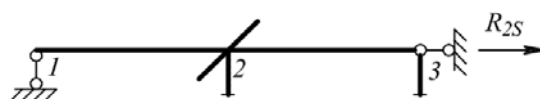


Рис. 9.1.23

$$\sum X = 0,$$

$$R_{2S} = 0.$$

Теперь рассмотрим действие φ . Схема деформирования и эпюра моментов (M_φ) представлены на рис. 9.1.24 и 9.1.25 соответственно. Схемы определения реакций во введенных связях – на рис. 9.1.26, 9.1.27.

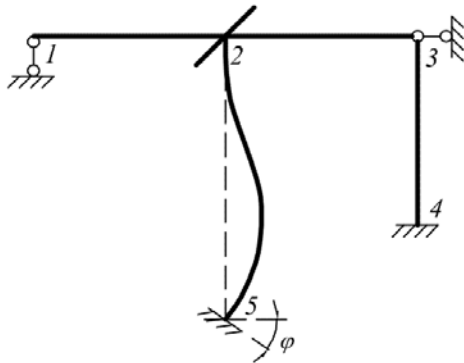


Рис. 9.1.24

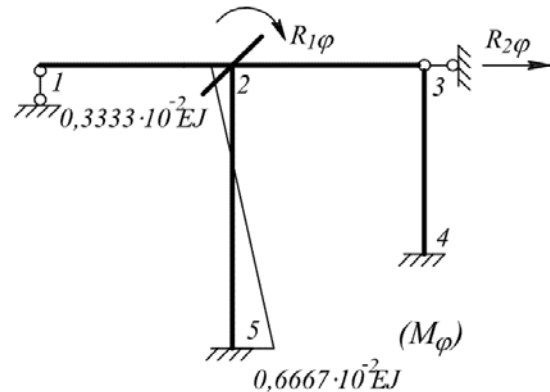


Рис. 9.1.25

$$m_{52} = \frac{4EJ}{6} \cdot 0,01 = 0,6667 \cdot 10^{-2} EJ, \quad m_{25} = 0,333 \cdot 10^{-2} EJ.$$

Определение $R_{1\varphi}$

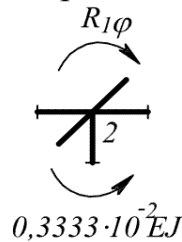


Рис. 9.1.26

Определение $R_{2\varphi}$

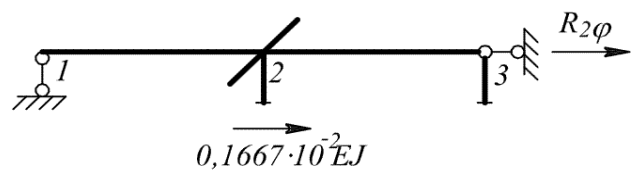


Рис. 9.1.27

$$\sum M_2 = 0,$$

$$R_{1\varphi} = 0,3333 \cdot 10^{-2} EJ.$$

$$Q_{25} = \frac{0,3333 + 0,6667}{6} \cdot 10^{-2} EJ = 0,1667 \cdot 10^{-2} EJ.$$

$$\sum X = 0,$$

$$R_{2\varphi} = -0,1667 \cdot 10^{-2} EJ.$$

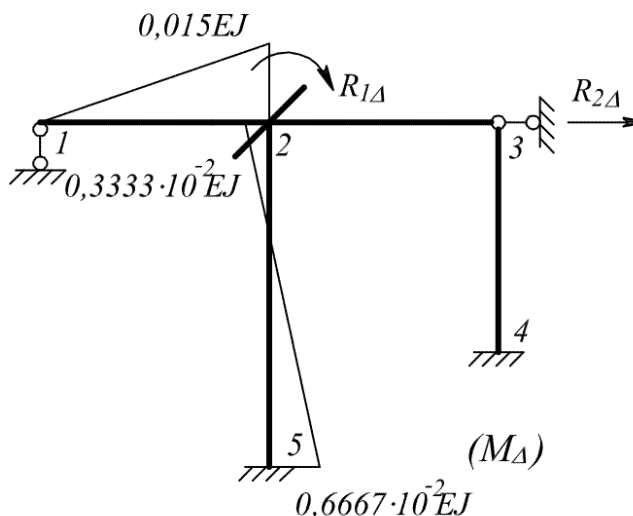


Рис. 9.1.28

Эпюру (M_Δ) получаем как сумму:

$$(M_\Delta) = (M_S) + (M_\varphi) - \text{рис. 9.1.28.}$$

Полные значения реакций во введенных связях получаем также суммированием:

$$R_{1\Delta} = R_{1S} + R_{1\varphi}; \quad R_{2t} = R_{2S} + R_{2\varphi}.$$

$$\text{Итак, } R_{1\Delta} = (1,5 + 0,3333) \cdot 10^{-2} EJ = 1,8333 \cdot 10^{-2} EJ;$$

$$R_{2\Delta} = -0,1667 \cdot 10^{-2} EJ.$$

9.2. Определение неизвестных Z_1 и Z_2

Канонические уравнения в матричной форме имеют вид

$$AZ + B = 0. \quad (9.2.1)$$

В нашем примере

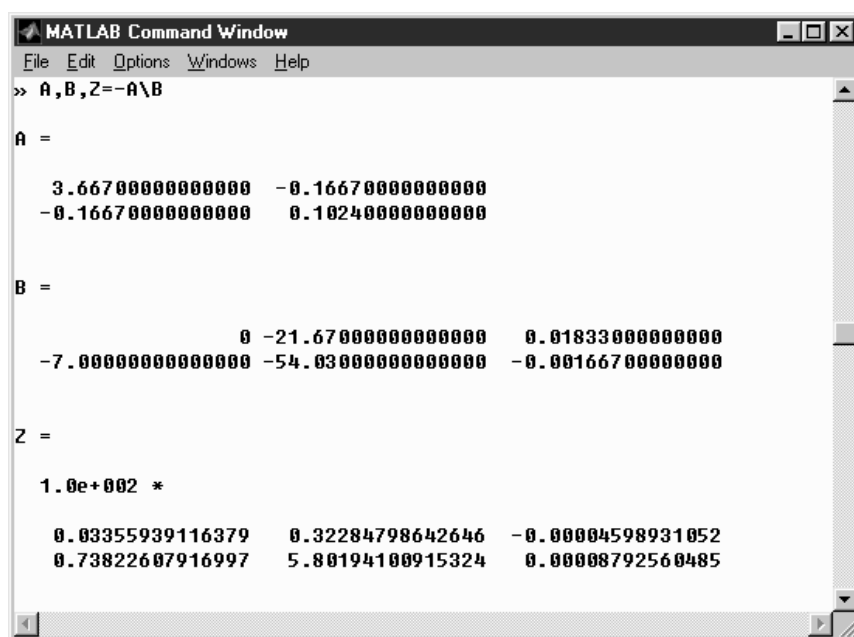
$$A = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix} = EJ \begin{bmatrix} 3,667 & -0,1667 \\ -0,1667 & 0,1024 \end{bmatrix}, \quad Z = \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} R_{1F} & R_{1t} & R_{2\Delta} \\ R_{2F} & R_{2t} & R_{2\Delta} \end{bmatrix}, \quad Z = \begin{bmatrix} 0 & -21,67\alpha EJ & 1,833 \cdot 10^{-2} EJ \\ -7 & -54,03\alpha EJ & -0,1667 \cdot 10^{-2} EJ \end{bmatrix}.$$

Таким образом уравнение (9.2.1) приобретает вид

$$EJ \begin{bmatrix} 3,667 & -0,1667 \\ -0,1667 & 0,1024 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -21,67\alpha EJ & 1,833 \cdot 10^{-2} EJ \\ -7 & -54,03\alpha EJ & -0,1667 \cdot 10^{-2} EJ \end{bmatrix}$$

Решение этого уравнения приведено в распечатке рабочей страницы Matlab (рис. 9.2.1).



```

MATLAB Command Window
File Edit Options Windows Help
>> A,B,Z=-A\B

A =

    3.66700000000000    -0.16670000000000
   -0.16670000000000     0.10240000000000

B =

         0    -21.67000000000000     0.01833000000000
   -7.00000000000000   -54.03000000000000    -0.00166700000000

Z =

    1.0e+002 *

    0.03355939116379    0.32284798642646   -0.00004598931052
    0.73822607916997    5.80194100915324    0.00008792560485
  
```

Рис. 9.2.1

9.3. Построение эпюр, проверка решения, определение перемещений от силового воздействия

Построение эпюр

Построение окончательной эпюры $(M)^F$ представлено на рис. 9.3.1–9.3.3.

$$(M)^F = (M_1) \cdot Z_1 + (M_2) \cdot Z_2 + (M_F)$$

$$Z_{1F} = 3,356/EJ, Z_{2F} = 73,82/EJ.$$

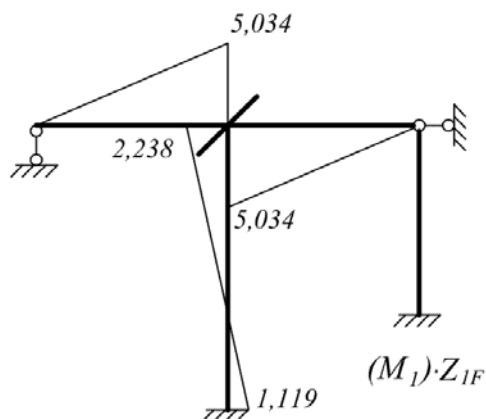


Рис. 9.3.1

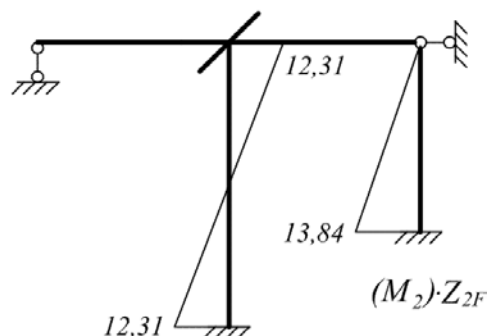


Рис. 9.3.2

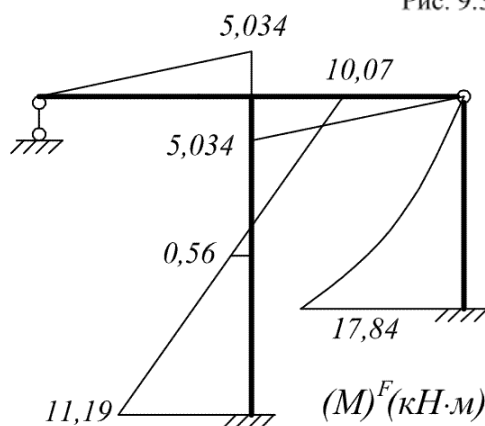


Рис. 9.3.3

Окончательные эпюры $(Q)^F$ и $(N)^F$ представлены на рис. 9.3.4, 9.3.5.

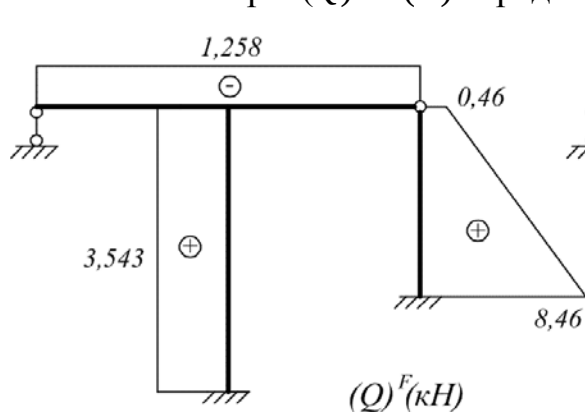


Рис. 9.3.4

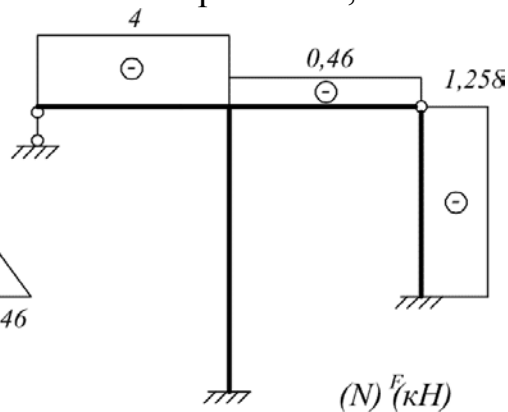


Рис. 9.3.5

Кинематическая проверка

Найдем вертикальное перемещение узла 3 (рис. 9.3.6), которое по условию должно быть равно нулю.

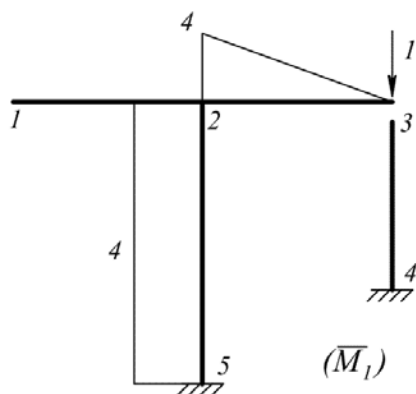


Рис. 9.3.6

Проверка равновесия рамы в целом

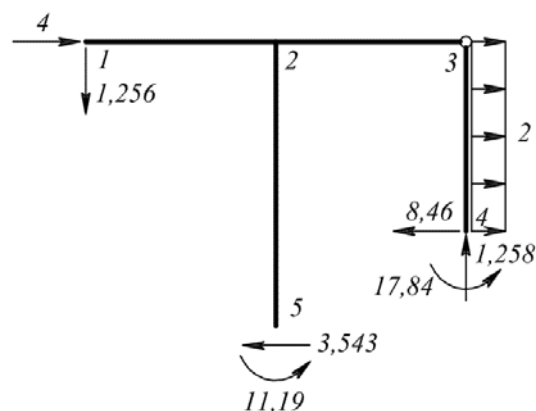


Рис. 9.3.7

$$\sum Y = 0, \sum X = 4 + 2 \cdot 4 - 3,543 - 8,46 = 0,003.$$

$$\text{Погрешность} \approx \frac{0,003}{12} \cdot 100\% = 0,025\%.$$

$$\sum M_1 = 8,46 \cdot 4 + 3,543 \cdot 6 - 2 \cdot 4 \cdot 2 - 1,256 \cdot 8 - 11,19 - 17,84 = 55,098 - 55,078 = 0,02.$$

$$\text{Погрешность} \approx \frac{0,02}{55,078} \cdot 100\% = 0,036\%.$$

Такие погрешности можно считать приемлемыми.

Условия равновесия выполняются.

Определение перемещений сечения k

Линейное перемещение δ_{kF}

Единичная эпюра $(M_1)_\delta$ в основной системе метода сил для определения линейного перемещения сечения k представлена на рис. 9.3.8.

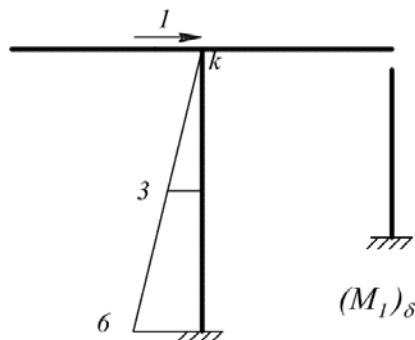


Рис. 9.3.8

Поскольку принято, что при силовом нагружении длина стержней не меняется, полное перемещение сечения k равно его горизонтальному перемещению.

$$\delta_{kF} = (M)^F \cdot (M_1)_\delta = \frac{6}{6EJ} (11,19 \cdot 6 + 4 \cdot 3 \cdot 0,56) = \frac{73,86}{EJ}.$$

Угол поворота θ_{kF}

Единичная эпюра $(M_1)_\theta$ в основной системе метода сил для определения угла поворота сечения k представлена на рис. 9.3.9.

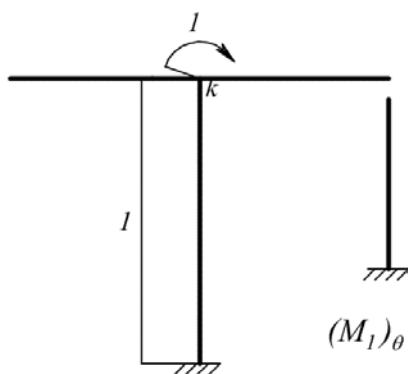


Рис. 9.3.9

$$\theta_{kF} = (M)^F \cdot (M_1)_\theta = \frac{1}{EJ} 1 \cdot 6 \cdot 0,56 = \frac{3,36}{EJ}.$$

Построение деформированной схемы рамы

Деформированная схема рамы представлена на рис. 9.3.10.

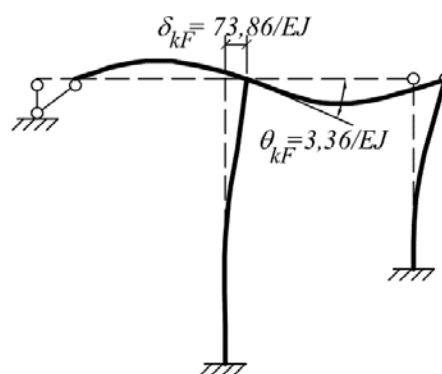


Рис. 9.3.10

9.4. Построение эпюр, проверка решения, определение перемещений от температурного воздействия

Построение эпюр

Построение окончательной эпюры $(M)^t$ представлено на рис. 9.4.1–9.4.3.

$$(M)^t = (M_1) \cdot Z_{1t} + (M_2) \cdot Z_{2t} + (M_t)$$

$$Z_{1t} = 32,29\alpha, Z_{2t} = 580,2\alpha.$$

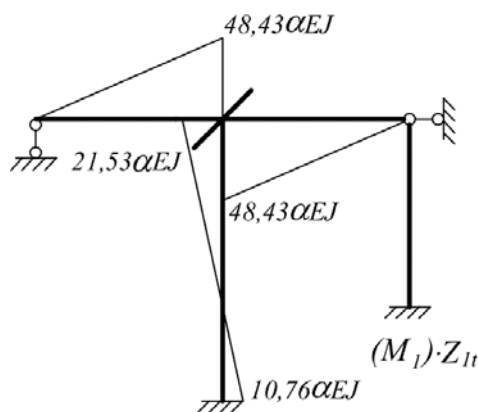


Рис. 9.4.1

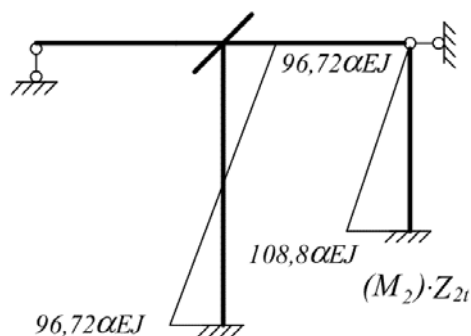


Рис. 9.4.2

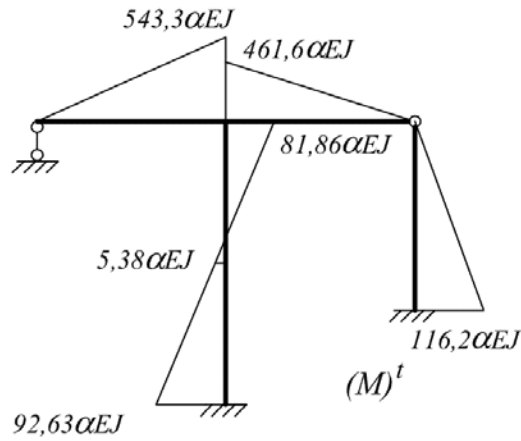


Рис. 9.4.3

Окончательные эпюры $(Q)^t$ и $(N)^t$ представлены на рис. 9.4.4, 9.4.5.

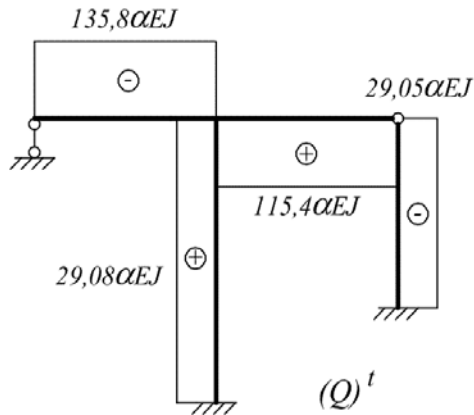


Рис. 9.4.4

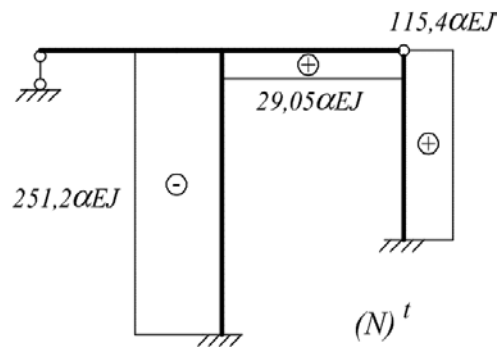


Рис. 9.4.5

Кинематическая проверка

Найдем относительное вертикальное перемещения концов стержней, сходящихся в узле 3 (рис. 9.4.6, 9.4.7), которое по условию должно быть равно нулю.

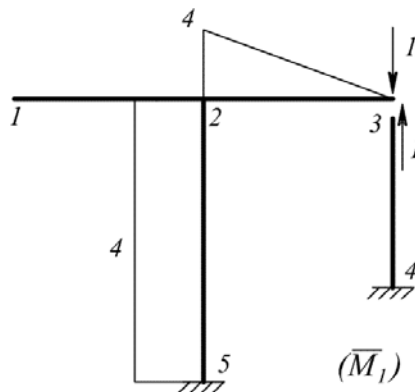


Рис. 9.4.6

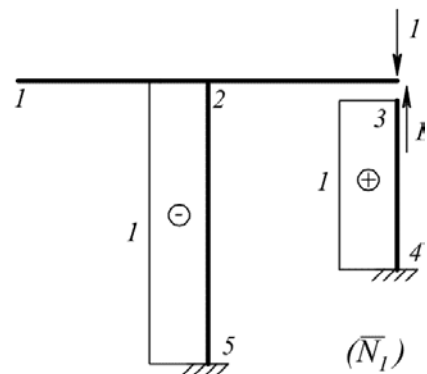


Рис. 9.4.7

Это перемещение определяется по формуле:

$$\delta_3 = (M)^t \cdot (\bar{M}_1) + \sum \alpha t_0 \omega_{N1} + \sum \alpha t_0 \omega_{M1}$$

$$\delta_3 = \frac{1}{EJ} \cdot 4 \cdot 6 \cdot 5,38\alpha EJ + \frac{1}{2EJ} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 461,6\alpha EJ + \alpha(-10)(1 \cdot 4) + \frac{\alpha \cdot 60}{0,1 \cdot 4} (-4 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2}) = 0.$$

Проверка подтверждает правильность решения.

Проверка равновесия рамы в целом

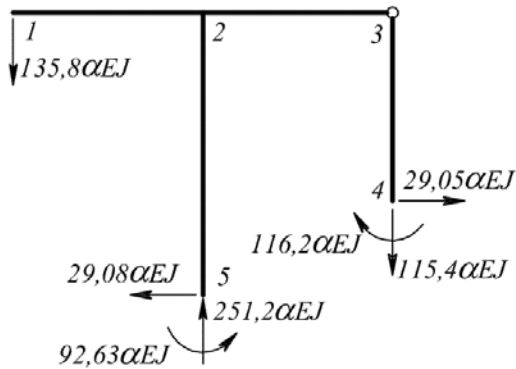


Рис. 9.4.8

$$\sum Y = 291,2 - 135,8 - 115,4 = 0, \quad \sum X = 29,08 = 0, \\ \sum M_1 = 29,08 + 115,4 \cdot 8 + 116,2 - 251,2 \cdot 4 - 92,63 = 0.$$

Условия равновесия выполняются.

Определение перемещений сечения k

Линейное перемещение δ_{kt}

Единичная эпюра $(M_1)_\delta$ в основной системе метода сил для определения линейного перемещения сечения k представлена на рис. 9.3.8. Для определения полного линейного перемещения необходимо в дополнение к эпюре $(M_1)_\delta$ построить эпюры (M) и (N) от единичной вертикальной силы, приложенной в сечении k . В данном случае это приводит к появлению только продольной силы, показанной на эпюре $(N_1)_\delta$.

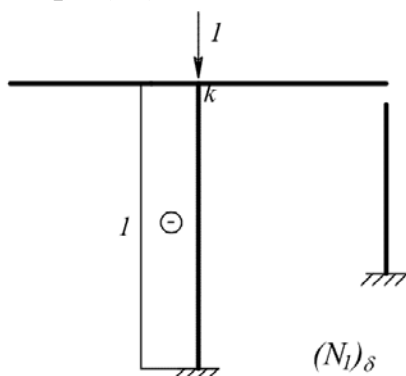


Рис. 9.4.9

Перемещения сечения k при температурном воздействии определяются по формуле

$$\delta = (M)^t \cdot (M_1) + \sum \alpha t_0 \omega_{N_1} + \sum \frac{\alpha \Delta t}{h} \omega_{M_1}.$$

1. Горизонтальное перемещение сеч. k .

Поскольку здесь $\omega_{N_1} = 0$ и $\Delta t = 0$,

$$\delta_{kt}^a = (M)^t \cdot (M_1)_\delta = \frac{6}{6EJ} \cdot (92,63 \cdot 6 + 4 \cdot 5,38 \cdot 3) \alpha EJ = 620,3\alpha$$

2. Вертикальное перемещение сеч. k . В этом случае эпюры (M_1) нет, поэтому:

$$\delta_{kt}^a = \alpha \cdot (+20) \cdot (-1 \cdot 6) = -120\alpha$$

Знак $(-)$ означает, что перемещение сеч. k происходит

вверх. Таким образом, полное линейное перемещение:

$$\delta_{kt} = \alpha \sqrt{620,3^2 + 120^2} = 631,8\alpha.$$

Угол поворота θ_{kt}

Единичная эпюра $(M_1)_\theta$ для определения угла поворота сечения k представлена на рис. 9.3.9.

Поскольку в данном случае $\omega_{N_1} = 0$ и $\Delta t = 0$, получаем:

$$\theta_{kt} = (M)^t \cdot (M_1)_\theta = \frac{1}{EJ} 6 \cdot 1 \cdot 5,38\alpha EJ = 32,28\alpha.$$

Построение деформированной схемы рамы

Деформированная схема рамы представлена на рис. 9.4.10.

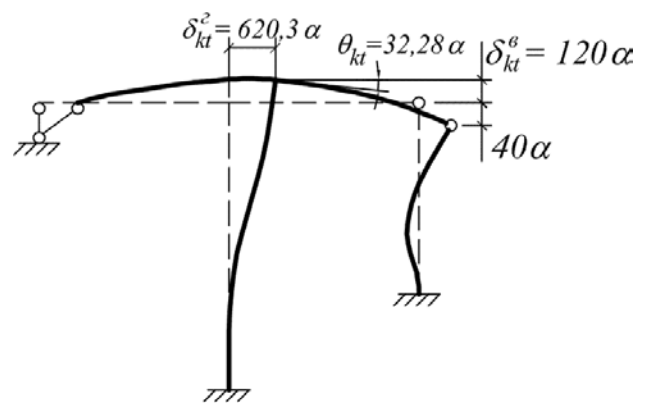


Рис. 9.4.10

9.5. Построение эпюр, проверка решения, определение перемещений от кинематического воздействия

Построение эпюр

Построение окончательной эпюры $(M)^\Delta$ представлено на рис. 9.5.1–9.5.3.

$$(M)^\Delta = (M_1) \cdot Z_{1\Delta} + (M_2) \cdot Z_{2\Delta} + (M_\Delta).$$

$$Z_{1\Delta} = -4,598 \cdot 10^{-3}, Z_{2\Delta} = 8,792 \cdot 10^{-3}$$

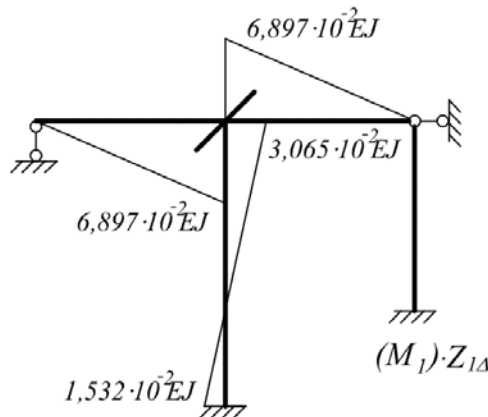


Рис. 9.5.1

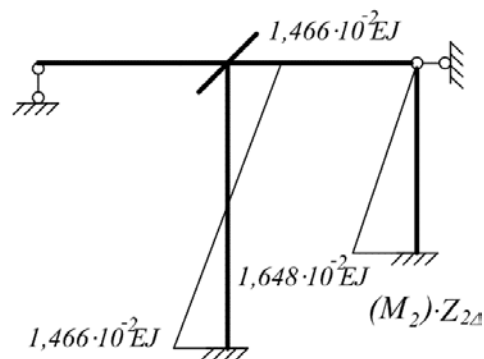


Рис. 9.5.2

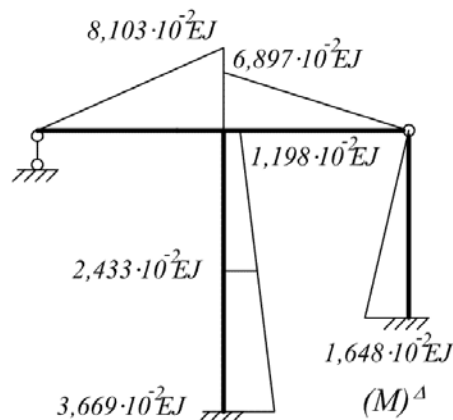


Рис. 9.5.3

Окончательные эпюры $(Q)^\Delta$ и $(N)^\Delta$ представлены на рис. 9.5.4, 9.5.5.

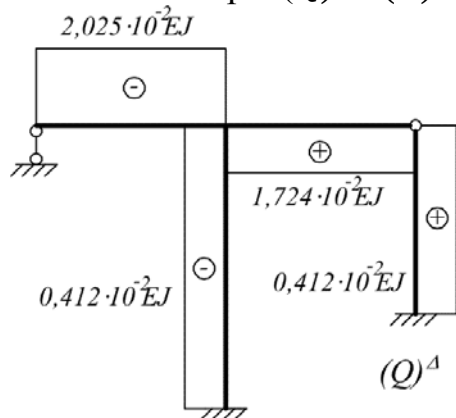


Рис. 9.5.4

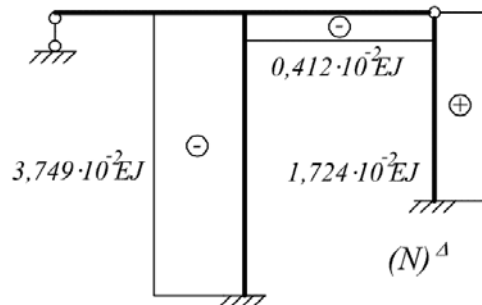


Рис. 9.5.5

Кинематическая проверка

Найдем относительное вертикальное перемещение концов стержней, сходящихся в узле 3 (рис. 9.4.6), которое по условию должно быть равно нулю.

Это перемещение определяется по формуле:

$$\delta_3 = (M)^\Delta \cdot (\bar{M}_1) - \sum R_i \Delta_i.$$

$$\delta_3 = (M)^\Delta \cdot (\bar{M}_1) - (-4 \cdot 0,01) = \frac{1}{2EJ} \cdot 6,897 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 \cdot 10^{-3} EJ - \frac{1}{EJ} 4 \cdot 6 \cdot 2,433 \cdot 10^{-3} EJ + 4 \cdot 10^{-3} = 0.$$

Проверка подтверждает правильность решения.

Проверка равновесия рамы в целом

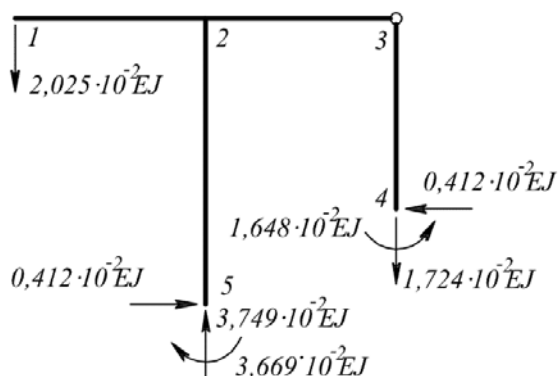


Рис. 9.5.6

$$\sum X = 0,412 - 0,412 = 0,$$

$$\sum Y = 3,749 - 2,025 - 1,724 = 0,$$

$$\sum M_1 = 0,412 \cdot 4 + 1,728 \cdot 8 + 3,669 - 0,412 \cdot 6 - 1,648 - 3,749 \cdot 4 = 0$$

Условия равновесия выполняются.

Определение перемещений сечения k

Линейное перемещение $\delta_{k\Delta}$

Единичная эпюра $(M_1)_\delta$ в основной системе метода сил для определения линейного перемещения сечения k представлена на рис. 9.3.8. Полное линейное перемещение равно горизонтальному перемещению сеч. k , поскольку продольная деформация стойки 2-5 не учитывается.

В данном случае перемещения определяются по формуле:

$$\delta = (M)^\Delta (M_1)_\delta - \sum R_i \Delta_i.$$

$$\delta_k = (M)^\Delta (\dot{I}_1)_\delta - (-6 \cdot 0,01) = \frac{6}{6EJ} (-3,669 \cdot 6 - 4 \cdot 2,433 \cdot 3) \cdot 10^{-3} EJ + 0,06 = 0,09 \text{ м}.$$

Угол поворота $\theta_{k\Delta}$

Единичная эпюра $(M_1)_\theta$ для определения угла поворота сечения k представлена на рис. 9.3.9.

$$\theta_k = (M)^\Delta (\dot{I}_1)_\theta - (-0,01 \cdot 1) = \frac{6}{6EJ} (-3,369 \cdot 1) \cdot EJ \cdot 10^{-3} + 0,01 = 0,0034 \text{ рад.}$$

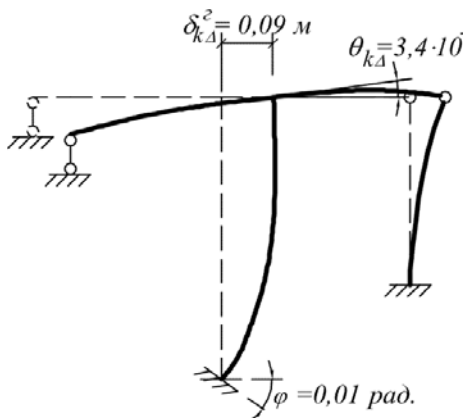


Рис. 9.5.7

Построение деформированной схемы рамы

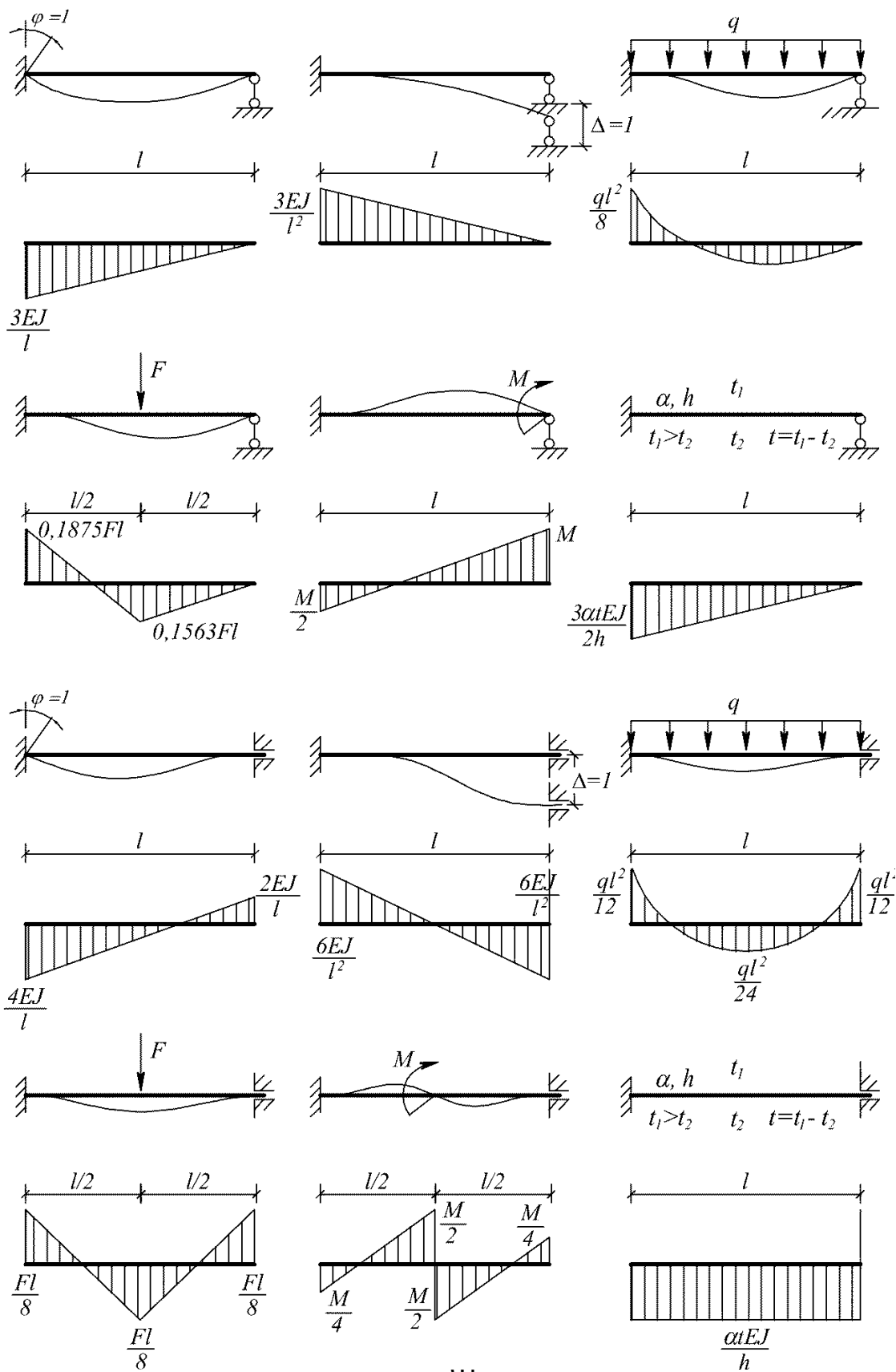
Деформированная схема рамы представлена на рис. 9.5.7.

10. Контрольные вопросы по методу перемещений

1. Метод перемещений. Как Вы понимаете идею метода перемещений?
2. Что принимается за неизвестные метода перемещений? Что такое основная и эквивалентная системы метода перемещений?
3. Как найти степень кинематической неопределимости?
4. Как определяются свободные члены канонических уравнений метода перемещений способом «перемножения эпюр»?
5. Как определяются свободные члены при расчете на температурные воздействия? Покажите на примере.
6. Как определяются свободные члены при расчете на заданные смещения? Покажите на примере.
7. Физический смысл и особенности канонических уравнений метода перемещений.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Эпюры изгибающих моментов в однопролетных статически неопределимых балках



Использование матриц при решении систем канонических уравнений

Расчет статически неопределимых систем связан с решением систем линейных алгебраических уравнений, которые в строительной механике принято называть каноническими уравнениями. Иногда эти решения удобно выполнять в матричной форме.

Ниже будет показано, как это можно сделать, но прежде напомним правила, по которым выполняются операции над матрицами.

Правила выполнения операций над матрицами

Сложение (вычитание) матриц

Складывать и вычитать можно лишь матрицы, имеющие одинаковое число строк и одинаковое число столбцов

$$\begin{aligned} A + B &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} (a_{11} + b_{11}) & (a_{12} + b_{12}) & (a_{13} + b_{13}) \\ (a_{21} + b_{21}) & (a_{22} + b_{22}) & (a_{23} + b_{23}) \end{bmatrix} = C. \end{aligned}$$

Умножение матриц

Умножение матрицы на число (скаляр) β дает матрицу, все элементы которой увеличены в β раз:

$$\beta A = \beta \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta a_{11} & \beta a_{12} & \beta a_{13} \\ \beta a_{21} & \beta a_{22} & \beta a_{23} \end{bmatrix}.$$

Умножать можно лишь матрицы, называемые *соответственными*, в которых число столбцов первого сомножителя равно числу строк второго.

Рассмотрим примеры.

Пример 1

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n) \\ (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n) \end{bmatrix}.$$

Пример 2

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31})(a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32})(a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} + a_{13}b_{33}) \\ (a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31})(a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32})(a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} + a_{23}b_{33}) \\ (a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} + a_{33}b_{31})(a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} + a_{33}b_{32})(a_{31}b_{13} + a_{32}b_{23} + a_{33}b_{33}) \end{bmatrix} = C.$$

Пример 3

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31})(a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32}) \\ (a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31})(a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32}) \\ (a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} + a_{33}b_{31})(a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} + a_{33}b_{32}) \end{bmatrix}.$$

Пример 4

$$AB = [a_{11} a_{12} \dots a_{1n}] \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{np} \end{bmatrix} =$$

$$= [(a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \dots + a_{1n}b_{n1})(a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + \dots + a_{1n}b_{n2}) \dots (a_{11}b_{1p} + a_{12}b_{2p} + \dots + a_{1n}b_{np})].$$

Пример 5

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{bmatrix} \cdot [b_{11} b_{12} \dots b_{1n}] = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & \dots & a_{11}b_{1n} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} & \dots & a_{21}b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}b_{11} & a_{m1}b_{12} & \dots & a_{m1}b_{1n} \end{bmatrix}.$$

Определение неизвестных при нескольких видах воздействий

При расчете статически неопределимой системы на несколько видов загрузки (воздействий) для определения неизвестных (усилий в методе сил или перемещений в методе перемещений) можно пойти двумя путями:

- столько раз решать систему канонических уравнений, сколько задано воздействий или
- найти обратную матрицу, и тогда многократное решение системы уравнений не потребуется. Это приводит к существенному сокращению объема вычислений. Покажем, как это можно сделать на примере системы уравнений второго порядка.

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_1 &= 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + b_2 &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Уравнения представим в матричной форме

$$Ax + b = 0,$$

где

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}.$$

Решение системы уравнений (1) можно представить в виде

$$x = -A^{-1} \cdot b, \quad (2)$$

где A^{-1} – обратная матрица.

Покажем, как может быть получена матрица A^{-1} , пользуясь, например, формулами Крамера

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad \text{где}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}; \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1a_{22} - b_2a_{12};$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11}b_2 - a_{21}b_1.$$

Откуда
$$x_1 = \frac{a_{22}}{\Delta} b_1 - \frac{a_{12}}{\Delta} b_2; \quad x_2 = -\frac{a_{21}}{\Delta} b_1 + \frac{a_{11}}{\Delta} b_2.$$

Следовательно,
$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Проверим правильность решения, используя известное соотношение

$$AA^{-1} = E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

В нашем примере получаем

$$AA^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) & (-a_{11}a_{12} + a_{12}a_{11}) \\ (a_{22}a_{21} - a_{22}a_{21}) & (-a_{21}a_{12} + a_{22}a_{11}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Решение выполнено верно.

Если загружений несколько, матрица A остается неизменной, а две другие матрицы, например, в случае, когда загружений три, выглядят так:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix}, \quad (4)$$

где x_{ik} – искомые неизвестные, i – номер неизвестного, k – номер загрузки; b_{ik} – свободные члены, i – номер свободного члена.

Подставляя выражения (3) и (4) в (2), получаем

$$\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \end{bmatrix} = -\frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix}$$

и, перемножив матрицы, находим неизвестные

$$\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \end{bmatrix} = -\frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} (a_{22}b_{11} - a_{12}b_{21}) & (a_{22}b_{12} - a_{12}b_{22}) & (a_{22}b_{13} - a_{12}b_{23}) \\ (-a_{21}b_{11} + a_{11}b_{21}) & (-a_{21}b_{12} + a_{11}b_{22}) & (-a_{21}b_{13} + a_{11}b_{23}) \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Список рекомендуемой методической литературы

1. Дарков А.В., Шапошников Н.Н. Строительная механика. – М.: Высшая школа, 1986. – 607 с.
2. Строительная механика: Стержневые системы. А.Ф. Смирнов, А.В. Александров, Б.Я. Лащеников, Н.Н. Шапошников. – М.: Стройиздат, 1981. – 510 с.
3. Клейн Г.К., Леонтьев Н.Н., Ванюшенков М.Г. и др. Руководство к практическим занятиям по курсу строительной механики (статика стержневых систем). – М., 1980. – 384 с.
4. Дьяконов В. MATLAB. Учебный курс. – Санкт-Петербург, Москва, Харьков, Минск: Питер, 2001. – 553 с.
5. Соломин В.И. Элементы линейной алгебры в строительной механике: учебное пособие. – Челябинск, 2000. – 38 с.
6. Соломин В.И. Решение задач строительной механики с помощью математической системы MATLAB: Учебное пособие. – Челябинск: Изд. ЮурГУ, 2002. – 19 с.