

Образец решения задания 1

Раскрытие неопределенностей вида $\frac{\infty}{\infty}$ при $x \rightarrow \infty$

Пример 1. Вычислить пределы:

$$a) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 - 3x + 2}{4x^2 + 2x + 1} \quad б) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 + 6x + 1}{6x^2 + 4x + 2} \quad в) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 8}{x^3 + 9x^4}$$

Решение. а) При $x \rightarrow \infty$ числитель и знаменатель неограниченно возрастают.

В этом случае говорят, что имеет место неопределённость $\frac{\infty}{\infty}$. Разделим числитель и знаменатель на старшую степень x^3 и пользуемся правилами вычисления пределов

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 - 3x + 2}{4x^2 + 2x + 1} = \frac{\infty}{\infty} = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3}{x^3} - \frac{3x}{x^3} + \frac{2}{x^3}}{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2}{x^3} + \frac{2x}{x^3} + \frac{1}{x^3}} =$$

$$\frac{\lim_{x \rightarrow \infty} (5 - \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3})}{\lim_{x \rightarrow \infty} (\frac{4}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3})} = \left\{ \begin{array}{l} x \rightarrow \infty \Rightarrow \frac{3}{x^2} \rightarrow 0 \\ \frac{2}{x^3} \rightarrow 0; \frac{4}{x} \rightarrow 0; \\ \frac{1}{x^3} \rightarrow 0 \end{array} \right\} =$$
$$= \frac{5 - 0 + 0}{0 + 0 + 0} = \frac{5}{0} = \infty$$

б) Разделим числитель и знаменатель на старшую степень x^2

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 + 6x + 1}{6x^2 + 4x + 2} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5 + \frac{6}{x} + \frac{1}{x^2}}{6 + \frac{4}{x} + \frac{2}{x^2}} = \frac{5}{6}$$

в) Разделим числитель и знаменатель на старшую степень x^4 и пользуемся правилами вычисления пределов.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 8}{x^3 + 9x^4} = \frac{\infty}{\infty} = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} (\frac{1}{x} - \frac{8}{x^4})}{\lim_{x \rightarrow \infty} (\frac{1}{x} + 9)} = \left\{ \begin{array}{l} x \rightarrow \infty \Rightarrow \frac{8}{x^4} \rightarrow 0 \\ \frac{1}{x} \rightarrow 0; \end{array} \right\} = \frac{0 - 0}{0 + 9} = 0$$

Замечание. Если степени числителя и знаменателя равны, то предел равен отношению коэффициентов при старших степенях x .

Если степень числителя выше степени знаменателя, то предел равен ∞ Если степень числителя меньше степени знаменателя, то предел равен 0

Раскрытие неопределенностей вида $\frac{0}{0}$ при $x \rightarrow a$

Пример 2 Вычислить пределы

$$а) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 4x}{x^2 - 5x + 6} \quad б) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 6x + 8} \quad в) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^3 + x^2 - x - 1}$$

Решение. А) Числитель и знаменатель должны иметь общий множитель

($x - 2$). Действительно, вынося в числителе за скобки общий множитель x и используя формулу разности квадратов, а в знаменателе применяя формулу разложение трёхчлена на множители $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ где x_1 и x_2 -

корни трёхчлена, которые находятся по формуле $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Трёхчлен $x^2 - 5x + 6 = 0$ имеет корни $x_1 = 2$; $x_2 = 3$ и раскладывается на множители следующим образом $x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$, получим этот множитель

($x - 2$), на который и сократим дробь:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 4x}{x^2 - 5x + 6} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x(x - 2)(x + 2)}{(x - 2)(x - 3)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x(x + 2)}{(x - 3)} = \frac{2 \cdot 4}{2 - 3} = -8$$

$$б) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 6x + 8} = \frac{0}{0} = \left\{ \begin{array}{l} \text{в числителе и знаменателе} \\ \text{разложим трёхчлен} \\ \text{на множители} \end{array} \right\} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x - 1)(x - 4)}{(x - 2)(x - 4)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x - 1}{x - 2} = \frac{3}{2}$$

в) Разложим числитель и знаменатель дроби на множители, затем сократим дробь на $x^2 - 1 \neq 0$ ($x \rightarrow 1$)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^3 + x^2 - x - 1} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2(x-1) - (x-1)}{x^2(x+1) - (x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2-1)}{(x+1)(x^2-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x+1} = \frac{0}{2} = 0$$

Вычисление пределов, содержащих иррациональности

Иногда при наличии неопределенности вида $\frac{0}{0}$ функция содержит в числителе или знаменателе иррациональные выражения типа $\sqrt{a} - \sqrt{b}$; $\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}$ и т.п. Вспоминая формулы сокращенного умножения, $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$, будем домножать числитель и знаменатель дроби на сопряженные выражения, в результате чего функции, составляющие неопределенность, превратятся в рациональные.

Пример 3 Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x}$

Решение. Для раскрытия неопределённости вида $\frac{0}{0}$ умножим числитель и знаменатель дроби на выражение, сопряжённое числителю, $\sqrt{x+4} + 2$ и используем формулу разности квадратов

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+4} - 2)(\sqrt{x+4} + 2)}{x(\sqrt{x+4} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+4-4}{x(\sqrt{x+4} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+4} + 2} = \frac{1}{4}$$