

Вычислить пределы, используя 2 классический предел:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e, \quad \lim_{\alpha \rightarrow 0} (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e$$

$$e \approx 2,71828$$

Пример 1. Найти $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{2x^2}\right)^{x^2}$.

$$\begin{aligned} \blacktriangleright \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{2x^2}\right)^{x^2} &= (1 - 0)^\infty = 1^\infty = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-3}{2x^2}\right)^{x^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{-3}{2x^2}\right)^{\frac{2x^2}{-3}} \right)^{\frac{-3x^2}{2x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{-3}{2x^2}\right)^{\frac{2x^2}{-3}} \right)^{-\frac{3}{2}} = e^{\frac{-3}{2}}. \blacktriangleleft \end{aligned}$$

Пример 2. Найти $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$.

$$\begin{aligned} \blacktriangleright \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1} &= \left(\frac{\infty}{\infty}\right)^\infty = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2 + \frac{3}{x}}{2 + \frac{1}{x}}\right)^{x+1} = (1^\infty) = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+1+2}{2x+1}\right)^{x+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{2x+1}\right)^{x+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{2}{2x+1}\right)^{\frac{2x+1}{2}} \right)^{\frac{2(x+1)}{2x+1}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+2}{2x+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{2}{x}}{2 + \frac{1}{x}} = e^1 = e. \blacktriangleleft \end{aligned}$$

Пример 3. Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctg \frac{7}{4}x}{e^{-2x} - 1}$.

Для раскрытия неопределенности используем формулы $\arctg \alpha(x) \sim \alpha(x)$,
 $a^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x) \ln a$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctg \frac{7}{4}x}{e^{-2x} - 1} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{7}{4}x}{-2x} = -\frac{7}{8}. \blacktriangleleft$$

Пример 4. Найти $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sin(x-3)}{x^2 - 4x + 3}$.

► Используем формулу $\sin \alpha(x) \sim \alpha(x)$ и разложим знаменатель на множители:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sin(x-3)}{x^2 - 4x + 3} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{(x-3)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x-1} = \frac{1}{2}. \blacktriangleleft$$