

Образец решения задания

Пример 1. Исследовать функцию $y = \frac{x^3}{x^2 - 4}$ и построить ее график.

Решение.

1. $D(y)$: $x \in (-\infty; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; +\infty)$.

Точки $x = \pm 2$ – точки разрыва функции II рода, т.к.

$$\lim_{x \rightarrow -2-0} \frac{x^3}{x^2 - 4} = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -2+0} \frac{x^3}{x^2 - 4} = +\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{x^3}{x^2 - 4} = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{x^3}{x^2 - 4} = +\infty.$$

2. $x = -2$ и $x = 2$ – уравнения вертикальных асимптот графика функции.

Найдем наклонную асимптоту:

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3}{x \cdot (x^2 - 4)} = 1;$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^3}{x^2 - 4} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4x}{x^2 - 4} = 0 \Rightarrow y = x - \text{уравнение наклонной}$$

асимптоты.

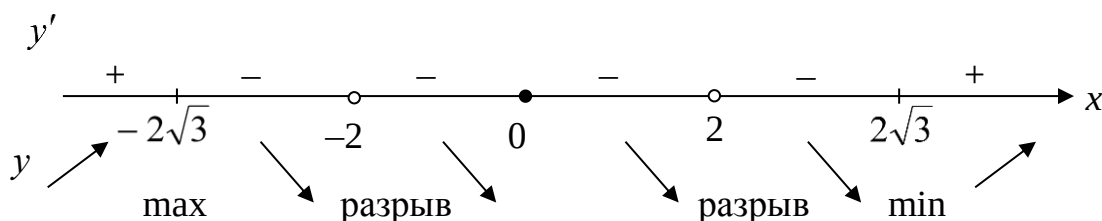
3. $E(y)$: $y \in (-\infty; +\infty)$.

4. $y(-x) = \frac{(-x)^3}{(-x)^2 - 4} = -\frac{x^3}{x^2 - 4} = -y(x) \Rightarrow$ функция нечетная, график

симметричен относительно точки $O(0;0)$.

5. При $x=0$ $y=0 \Rightarrow (0;0)$ – точка пересечения графика функции с осями координат.

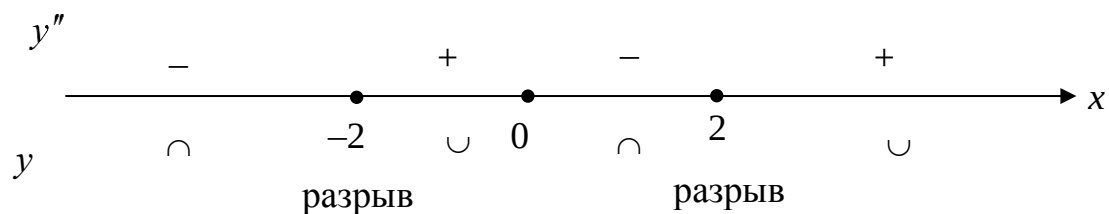
6. $y' = \frac{x^2 \cdot (x^2 - 12)}{(x^2 - 4)^2}$; $y' = 0 \Rightarrow x = 0, x = \pm 2\sqrt{3}$; $y' = \infty \Rightarrow x = \pm 2$.



$$y_{\max} = y(-2\sqrt{3}) = -3\sqrt{3}, \quad y_{\min} = y(2\sqrt{3}) = 3\sqrt{3}.$$

7. $y'' = \frac{8x \cdot (x^2 + 12)}{(x^2 - 4)^3}$; $y'' = 0 \Rightarrow x = 0$; $y'' = \infty \Rightarrow x = \pm 2$,

$O(0;0)$ – точка перегиба функции.



8. Для проверки правильности исследования вычислим значение функции в контрольных точках

$$x = \pm 1 \Rightarrow y = \mp 3; \quad x = \pm 4 \Rightarrow y = \pm 5 \frac{1}{3}.$$

Контрольные точки: $A(1; -3)$, $B(-1; 3)$, $C(4; 5 \frac{1}{3})$, $D(-4; -5 \frac{1}{3})$.

Используя полученные данные, строим график.

