

Образец решения задания 1

Пример 1 Найти производную функции $y = \log_2^3(5x - 3)$

Решение. Данная функция является сложной функцией $y = u^3(v)$, где $u = \log_2(5x - 3)$ $v = 5x - 3$. В соответствии с правилом дифференцирования сложной функции

$$y' = 3 \cdot \log_2^2(5x - 3) \cdot \frac{1}{(5x - 3) \cdot \ln 2} \cdot 5 = \frac{15 \log_2^2(5x - 3)}{(5x - 3) \cdot \ln 2}$$

Пример 2 Найти производную функции $y = \arccos \frac{2x-1}{\sqrt{3}}$

Решение. Данная функция является сложной функцией

$y = \arccos u$ где $u = \frac{2x-1}{\sqrt{3}}$. В соответствии с правилом дифференцирования сложной функции $y' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$ или

$$\begin{aligned} y' &= -\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2}} \cdot \left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)' = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3 - (2x-1)^2}} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \\ &= -\frac{2}{\sqrt{3 - (2x-1)^2}} \end{aligned}$$

Пример 3 Найти производную функции $y = x^{\operatorname{tg} 2x}$.

Решение. Логарифмируя обе части равенства $y = x^{\operatorname{tg} 2x}$, получим $\ln y = \ln x^{\operatorname{tg} 2x}$ или $\ln y = \operatorname{tg} 2x \cdot \ln x$

Продифференцируем левую и правую части

$$\begin{aligned} \frac{y'}{y} &= \left(\frac{2}{\cos^2 2x} \ln x + \frac{\operatorname{tg} 2x}{x} \cdot 1 \right) \\ y' &= y \left(\frac{2}{\cos^2 2x} \ln x + \frac{\operatorname{tg} 2x}{x} \cdot 1 \right) \\ y' &= x^{\operatorname{tg} 2x} \left(\frac{2}{\cos^2 2x} \ln x + \frac{\operatorname{tg} 2x}{x} \cdot 1 \right). \end{aligned}$$

Ответ $y' = x^{\operatorname{tg} 2x} \left(\frac{2}{\cos^2 2x} \ln x + \frac{\operatorname{tg} 2x}{x} \cdot 1 \right)$

Пример 4. Найти производную неявно заданной функции $e^{xy} = \ln(x^2 + y^2)$

Решение. Продифференцируем обе части уравнения по переменной x , приняв y как сложную функцию от x :

$$e^{xy}(y + xy') - \frac{2x + 2yy'}{x^2 + y^2} = 0$$

Выразим y' из этого уравнения:

$$e^{xy}y + e^{xy}xy' - \frac{2x}{x^2 + y^2} - \frac{2yy'}{x^2 + y^2} = 0$$

$$e^{xy}xy' - \frac{2yy'}{x^2 + y^2} = \frac{2x}{x^2 + y^2} - e^{xy}y$$

$$y' \cdot \frac{e^{xy}x(x^2 + y^2) - 2y}{x^2 + y^2} = \frac{2x - e^{xy}y(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$$

$$y' = \frac{2x - e^{xy}y(x^2 + y^2)}{e^{xy}x(x^2 + y^2) - 2y}$$

Окончательно получим

$$y' = - \frac{2x - e^{xy}(x^2y + y^3)}{2y - e^{xy}(x^3 + xy^2)}$$