

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 1

Интегрирование

Образец решения контрольной работы № 1.

Задание 1. Найти неопределённые интегралы:

1.1. $\int \frac{dx}{3x-1}$.

Решение. Применим способ внесения выражения под знак дифференциала:

$$\int \frac{dx}{3x-1} = \frac{1}{3} \int \frac{d(3x-1)}{3x-1} = \frac{1}{3} \ln|3x-1| + C.$$

1.2. $\int \frac{2xdx}{x+3}$.

Решение. Преобразуем подынтегральное выражение:

$$\int \frac{2xdx}{x+3} = 2 \int \frac{x+3-3}{x+3} dx = 2 \int \left(1 - \frac{3}{x+3}\right) dx = 2 \left(\int dx - 3 \int \frac{dx}{x+3} \right) = 2x - 3 \ln|x+3| + C.$$

1.3. $\int \frac{dx}{2-3x^2}$

Сведём данный интеграл к табличному:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{2-3x^2} &= \int \frac{dx}{(\sqrt{2})^2 - (\sqrt{3}x)^2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{d(\sqrt{3}x)}{(\sqrt{2})^2 - (\sqrt{3}x)^2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{3}x + \sqrt{2}}{\sqrt{3}x - \sqrt{2}} \right| + C = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{6}} \ln \left| \frac{\sqrt{3}x + \sqrt{2}}{\sqrt{3}x - \sqrt{2}} \right| + C \end{aligned}$$

1.4. $\int \frac{\ln x dx}{x}$;

Решение. Применяем способ подстановки:

$$\int \frac{\ln x dx}{x} = \left[\begin{array}{l} \ln x = t, \\ dt = \frac{dx}{x} \end{array} \right] = \int t dt = \frac{t^2}{2} + C = \frac{\ln^2 x}{2} + C.$$

1.5. $\int \frac{2xdx}{\sqrt{1-2x^2}}$.

Решение. Применяем способ подстановки:

$$\int \frac{2xdx}{\sqrt{1-2x^2}} = \left[\begin{array}{l} t = 1-2x^2, \\ dt = -4xdx \end{array} \right] = -\frac{1}{2} \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = -\sqrt{t} + C = -\sqrt{1-2x^2} + C.$$

1.6. $\int \frac{dx}{x^2-2x+4}$.

Решение. Введём подстановку $t = x-1, x = t+1, dt = dx$. Получим:

$$\int \frac{dx}{x^2-2x+4} = \int \frac{dt}{(t+1)^2-2(t+1)+4} = \int \frac{dt}{t^2+3} = \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{3}} + C = \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x-1}{\sqrt{3}} + C.$$

1.7. $\int x \operatorname{arctg} x \, dx$.

Решение. Применим формулу интегрирования по частям: $\int u \, dv = uv - \int v \, du$. В

данном случае: $u = \operatorname{arctg} x, dv = x \, dx, du = \frac{dx}{1+x^2}, v = \frac{x^2}{2}$. Подставляя эти выражения

в формулу, получим:

$$I = \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \int \frac{x^2}{2(1+x^2)} dx = \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx = \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + C.$$

1.8. $\int x^4 \cdot \sqrt[4]{1-3x^5} \, dx$.

Решение. Введем подстановку $t = 1-3x^5$, откуда $dt = -15x^4 dx$. Тогда

$I = -\frac{1}{15} \int \sqrt[4]{t} \, dt$. Находим полученный табличный интеграл и возвращаемся к прежней переменной:

$$I = -\frac{1}{15} \int t^{\frac{1}{4}} dt = -\frac{1}{15} \cdot \frac{t^{\frac{5}{4}}}{\frac{5}{4}} + C = -\frac{4}{75} \sqrt[4]{t^5} + C = -\frac{4}{75} \sqrt[4]{(1-3x^5)^5} + C.$$

1.9. $\int \sin^3 x \, dx$;

Решение. Преобразуем подынтегральную функцию:

$\int \sin^3 x \, dx = \int \sin^2 x \cdot \sin x \, dx = \int (1 - \cos^2 x) \sin x \, dx$. Введём подстановку $\cos x = t$, тогда

$dt = -\sin x \, dx$ и получим: $-\int (1-t^2) dt = -t + \frac{t^3}{3} + C = \frac{\cos^3 x}{3} - \cos x + C$.

1.10. $\int \cos^4 x \sin^3 x \, dx$.

Решение. Преобразуем подынтегральное выражение:

$\int \cos^4 x \sin^3 x \, dx = \int \cos^4 x \cdot \sin^2 x \cdot \sin x \, dx = \int \cos^4 x (1 - \cos^2 x) \sin x \, dx = \int (\cos^4 x - \cos^6 x) \sin x \, dx$

Введём подстановку $\cos x = t$, тогда $dt = -\sin x \, dx$. Получим:

$$-\int (t^4 - t^6) dt = \frac{t^7}{7} - \frac{t^5}{5} + C = \frac{\cos^7 x}{7} + \frac{\cos^5 x}{5} + C.$$

Задание 2. Вычислить определённые интегралы:

2.1. $\int_3^4 \frac{dx}{x^2 - 2x}$.

Решение.

$$\int_3^4 \frac{dx}{x^2 - 2x} = F(4) - F(3) = \int_3^4 \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x} \right) dx = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-2}{x} \right| \Big|_3^4 = \frac{1}{2} \left(\ln \frac{1}{2} - \ln \frac{1}{3} \right) = \ln \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

2.2. $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sin 3x \cos 2x \, dx$.

Решение.

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sin 3x \cos 2x dx = F\left(\frac{\pi}{4}\right) - F\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (\sin 5x + \sin x) dx = \left(-\frac{\cos 5x}{5} - \cos x\right) \Bigg|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} =$$

$$= -2 \left(\frac{\cos \frac{5\pi}{4}}{5} + \cos \frac{\pi}{4} \right) = -2 \cdot \left(-\frac{1}{5\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = -\frac{2}{5\sqrt{2}}.$$

2.3. $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx.$

Решение. $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = F(1) - F(0) = \left(\frac{x}{2} \sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2} \arcsin x \right) \Bigg|_0^1 = \frac{\pi}{4}.$

Задание 3. Вычислить несобственный интеграл или доказать, что он расходится:

$$\int_0^1 \frac{dx}{1-x^2}.$$

Решение. Точка $x=1$ является особой точкой, поскольку подынтегральная функция имеет в ней бесконечный разрыв. Поэтому:

$$I = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{1-x^2} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2} \ln \left| \frac{1-x}{1+x} \right| \right) \Bigg|_0^{1-\varepsilon} = \frac{1}{2} \left(\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \ln \left| \frac{\varepsilon}{2-\varepsilon} \right| - \ln 1 \right) = \frac{1}{2} (-\infty - 0) = -\infty - \text{получили}$$

бесконечный предел.

Таким образом, данный интеграл расходится.

Задание 4. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$y = \frac{1}{x}, y = x, x = 2.$$

Решение. Площадь данной фигуры равна разности площадей криволинейных трапеций, образованных прямой $y = x$ и гиперболой $y = \frac{1}{x}$ на отрезке $[1; 2]$.

$$S = \int_1^2 \left(x - \frac{1}{x} \right) dx = \left(\frac{x^2}{2} - \ln x \right) \Bigg|_1^2 = 2 - \ln 2 - \frac{1}{2} + 0 = 1\frac{1}{2} - \ln 2.$$

Задание 5. Вычислить объём тела, полученного при вращении вокруг оси абсцисс фигуры, ограниченной линиями:

$$y = \sqrt{1-x^2}, y = 0, x = 0.$$

Решение. Используем формулу для нахождения объёма тел вращения:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

$$V = \pi \int_0^1 (1 - x^2) dx = \pi \left(x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \frac{2\pi}{3}.$$

Варианты заданий для контрольной работы № 1

Вариант № 1.

Задание 1. Найти неопределённые интегралы:

1.1. $\int \frac{dx}{1+7x}$; 1.2. $\int \frac{xdx}{2x-4}$; 1.3. $\int \frac{dx}{3-4x^2}$; 1.4. $\int \frac{dx}{x \ln x}$; 1.5. $\int \frac{xdx}{\sqrt{2-3x^2}}$;
 1.6. $\int \frac{dx}{x^2-2x+4}$; 1.7. $\int \ln^2 x$; 1.8. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$; 1.9. $\int \sin^3 2x dx$; 1.10. $\int \cos^5 x \sqrt{\sin^2 x} dx$.

Задание 2. Вычислить определённые интегралы:

2.1. $\int_1^4 \frac{dx}{x^2+2x}$; 2.2. $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sin x \cos 2x dx$; 2.3. $\int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{3-\cos^2 x} dx$.

Задание 3. Вычислить несобственный интеграл или доказать, что он расходится:

$$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}.$$

Задание 4. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$y = \frac{1}{x^2}, y = -x, x = -2.$$

Задание 5. Вычислить объём тела, полученного при вращении вокруг оси абсцисс фигуры, ограниченной линиями:

$$y = 2\sqrt{x}, y = 2x.$$

Вариант № 2.

Задание 1. Найти неопределённые интегралы:

1.1. $\int \frac{dx}{6-2x}$; 1.2. $\int \frac{xdx}{5x-1}$; 1.3. $\int \frac{dx}{1-4x^2}$; 1.4. $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$; 1.5. $\int \frac{2xdx}{\sqrt{1-x^2}}$;
 1.6. $\int \frac{dx}{x^2+2x+4}$; 1.7. $\int x \ln^2 x dx$; 1.8. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-6}}$; 1.9. $\int \sin^4 2x dx$; 1.10.
 $\int \cos^3 x \sqrt{\sin^2 x} dx$.

Задание 2. Вычислить определённые интегралы:

$$2.1. \int_3^4 \frac{dx}{x^2 - 2x + 1}; 2.2. \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sin 3x \cos 2x dx; 2.3. \int_0^1 \sqrt{4 - \sin^2 x} dx.$$

Задание 3. Вычислить несобственный интеграл или доказать, что он расходится:

$$\int_1^2 \frac{dx}{x \ln x}.$$

Задание 4. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$y = 2 \cos x, y = 3 \cos x, x = -\pi, x = \pi.$$

Задание 5. Вычислить объём тела, полученного при вращении вокруг оси абсцисс фигуры, ограниченной линиями:

$$y = \sqrt{x}, y = x.$$

Вариант № 3.

Задание 1. Найти неопределённые интегралы:

$$1.1. \int \frac{dx}{3x+7}; 1.2. \int \frac{2x dx}{x+5}; 1.3. \int \frac{dx}{6-2x^2}; 1.4. \int \frac{\arctg x dx}{1+x^2}; 1.5. \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-2x^3}};$$

$$1.6. \int \frac{dx}{x^2 - x + 2}; 1.7. \int x \ln x; 1.8. \int \frac{dx}{x\sqrt{2x^2+1}}; 1.9. \int \cos^4 2x dx; 1.10. \int \cos x \sqrt[3]{\sin^2 x} dx.$$

Задание 2. Вычислить определённые интегралы:

$$2.1. \int_2^4 \frac{dx}{x^2 - x - 2}; 2.2. \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \cos x dx; 2.3. \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{2 - \cos^2 x} dx.$$

Задание 3. Вычислить несобственный интеграл или доказать, что он расходится:

$$\int_1^2 \frac{dx}{x^3 - x^2}.$$

Задание 4. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$y = \operatorname{tg} x, y = 0, x = -\frac{\pi}{4}, x = \frac{\pi}{4}.$$

Задание 5. Вычислить объём тела, полученного при вращении вокруг оси абсцисс фигуры, ограниченной линиями:

$$y = 2\sqrt{x}, y = 2, x = 4.$$

Вариант № 4.

Задание 1. Найти неопределённые интегралы:

1.1. $\int \frac{dx}{3-8x}$; 1.2. $\int \frac{3xdx}{2x+1}$; 1.3. $\int \frac{dx}{2-5x^2}$; 1.4. $\int \frac{dx}{x \ln^2 x}$; 1.5. $\int \frac{xdx}{\sqrt{5+x^2}}$;
1.6. $\int \frac{dx}{x^2+3x+4}$; 1.7. $\int x^2 \ln x dx$; 1.8. $\int \frac{dx}{x\sqrt{3x^2-1}}$; 1.9. $\int \cos^3 3x dx$; 1.10.
 $\int \sin^5 x \sqrt{\cos^2 x} dx$.

Задание 2. Вычислить определённые интегралы:

2.1. $\int_1^2 \frac{dx}{x^2-7x+12}$; 2.2. $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sin x \sin 2x dx$; 2.3. $\int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{2-\sin^2 x} dx$.

Задание 3. Вычислить несобственный интеграл или доказать, что он расходится:

$$\int_0^e x \ln x dx.$$

Задание 4. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$y = \sin x, y = 1, x = 0.$$

Задание 5. Вычислить объём тела, полученного при вращении вокруг оси абсцисс фигуры, ограниченной линиями:

$$y = x^2, y = 2x.$$

Вариант № 5.

Задание 1. Найти неопределённые интегралы:

1.1. $\int \frac{dx}{2-3x}$; 1.2. $\int \frac{3xdx}{2x+1}$; 1.3. $\int \frac{dx}{4-3x^2}$; 1.4. $\int \frac{dx}{x \ln^3 x}$; 1.5. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{2+5x^3}}$;
1.6. $\int \frac{dx}{x^2+4x+5}$; 1.7. $\int x e^x dx$; 1.8. $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2+1}}$; 1.9. $\int \sin^5 x dx$; 1.10. $\int \cos^3 x \sin^2 x dx$.

Задание 2. Вычислить определённые интегралы:

2.1. $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+2x+1}$; 2.2. $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \cos x \cos 2x dx$; 2.3. $\int_0^2 \sqrt{4-\cos^2 x} dx$.

Задание 3. Вычислить несобственный интеграл или доказать, что он расходится:

$$\int_0^1 \frac{dx}{1-x^2}.$$

Задание 4. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$y = 4 \sin 3x, x = -\frac{\pi}{2}, x = \frac{\pi}{2}.$$

Задание 5. Вычислить объём тела, полученного при вращении вокруг оси абсцисс фигуры, ограниченной линиями:

$$y = x^2, y = 4x.$$

Вариант № 6.

Задание 1. Найти неопределённые интегралы:

$$\begin{aligned} &1.1. \int (3-2x)^3 dx; 1.2. \int \frac{x^2 dx}{2x+1}; 1.3. \int \frac{x dx}{4-3x^2}; 1.4. \int \frac{(2+\ln x) dx}{x}; 1.5. \int \frac{x^2 dx}{5x^3-1}; \\ &1.6. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+5}}; 1.7. \int x^2 e^x dx; 1.8. \int \frac{dx}{x\sqrt{x+1}}; 1.9. \int \operatorname{tg}^2 x dx; 1.10. \int \cos^4 x \sin^2 x dx. \end{aligned}$$

Задание 2. Вычислить определённые интегралы:

$$2.1. \int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}; 2.2. \int_1^e \ln x dx; 2.3. \int_0^2 \sqrt[3]{x^5} dx.$$

Задание 3. Вычислить несобственный интеграл или доказать, что он расходится:

$$\int_0^{\infty} \frac{x dx}{x^3+1}.$$

Задание 4. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$y = \frac{1}{x}, y = x, x = 3.$$

Задание 5. Вычислить объём тела, полученного при вращении вокруг оси абсцисс фигуры, ограниченной линиями:

$$y = x^3, y = x.$$

Вариант № 7.

Задание 1. Найти неопределённые интегралы:

$$\begin{aligned} &1.1. \int (2-x)^3 dx; 1.2. \int \frac{2x^2 dx}{x+1}; 1.3. \int \frac{2x dx}{4-x^2}; 1.4. \int \frac{(1+\ln x) dx}{2x}; 1.5. \int \frac{x^2 dx}{4x^6-1}; \\ &1.6. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+5}}; 1.7. \int x^2 \cos x dx; 1.8. \int \frac{dx}{x\sqrt{2x+1}}; 1.9. \int \operatorname{tg}^2 x dx; 1.10. \\ &\int \cos^3 x \sin^2 x dx. \end{aligned}$$

Задание 2. Вычислить определённые интегралы:

2.1. $\int_{-1/2}^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$; 2.2. $\int_1^e x \ln x dx$; 2.3. $\int_0^2 \sqrt[3]{x^7} dx$.

Задание 3. Вычислить несобственный интеграл или доказать, что он расходится:

$$\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{\sqrt{(4-x)^3}}.$$

Задание 4. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$y = -x^2 + 6x - 8, y = -8.$$

Задание 5. Вычислить объём тела, полученного при вращении вокруг оси абсцисс фигуры, ограниченной линиями:

$$y = x^3, y = 4x.$$

Вариант № 8.

Задание 1. Найти неопределённые интегралы:

1.1. $\int (2+4x)^4 dx$; 1.2. $\int \frac{3x^2 dx}{2x-3}$; 1.3. $\int \frac{3x dx}{1-3x^2}$; 1.4. $\int \frac{(1+\ln 2x) dx}{x}$; 1.5. $\int \frac{x^3 dx}{2x^8+1}$;
1.6. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+5}}$; 1.7. $\int x \cos x dx$; 1.8. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$; 1.9. $\int \operatorname{ctg}^2 x dx$; 1.10. $\int \cos^3 x \sin^2 x dx$.

Задание 2. Вычислить определённые интегралы:

2.1. $\int_{-1/2}^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$; 2.2. $\int_1^e \ln(x+1) dx$; 2.3. $\int_0^2 \sqrt[4]{x^5} dx$.

Задание 3. Вычислить несобственный интеграл или доказать, что он расходится:

$$\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2-3}}.$$

Задание 4. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$y = \sqrt[3]{x}, y = 0, x = 1, x = 8.$$

Задание 5. Вычислить объём тела, полученного при вращении вокруг оси ординат фигуры, ограниченной линиями:

$$y = x^3, y = x.$$

Вариант № 9.

Задание 1. Найти неопределённые интегралы:

1.1. $\int (5+2x)^5 dx$; 1.2. $\int \frac{2x^2 dx}{3x-4}$; 1.3. $\int \frac{3x dx}{6-x^2}$; 1.4. $\int \frac{(2-\ln x) dx}{x}$; 1.5. $\int \frac{2x^2 dx}{9x^3+1}$;
1.6. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+3}}$; 1.7. $\int x^2 \sin x dx$; 1.8. $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x+1}}$; 1.9. $\int tg^4 x dx$; 1.10.
 $\int \cos^2 x \sin^2 x dx$.

Задание 2. Вычислить определённые интегралы:

2.1. $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}$; 2.2. $\int_1^e \ln(2x-1) dx$; 2.3. $\int_0^1 \sqrt[6]{x^5} dx$.

Задание 3. Вычислить несобственный интеграл или доказать, что он расходится:

$$\int_{2\sqrt{2}}^{3\sqrt{2}} \frac{dx}{x^2-8}.$$

Задание 4. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$y = 3\cos 2x, y = 1\frac{1}{2}, x = -\frac{\pi}{6}, x = \frac{\pi}{6}.$$

Задание 5. Вычислить объём тела, полученного при вращении вокруг оси ординат фигуры, ограниченной линиями:

$$y = x^3, y = 4x.$$

Вариант № 10.

Задание 1. Найти неопределённые интегралы:

1.1. $\int (7-2x)^6 dx$; 1.2. $\int \frac{4x^2 dx}{x-4}$; 1.3. $\int \frac{5x dx}{2-3x^2}$; 1.4. $\int \frac{(2+\ln^2 x) dx}{x}$; 1.5. $\int \frac{3x^2 dx}{2x^6-1}$;
1.6. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x+4}}$; 1.7. $\int x^2 \sin x dx$; 1.8. $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x-1}}$; 1.9. $\int \frac{1}{\sin^4 x} dx$; 1.10.
 $\int \cos^3 x \sin^5 x dx$.

Задание 2. Вычислить определённые интегралы:

2.1. $\int_0^{1/\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}$; 2.2. $\int_1^e \ln x^2 dx$; 2.3. $\int_0^1 \sqrt[7]{x^5} dx$.

Задание 3. Вычислить несобственный интеграл или доказать, что он расходится:

$$\int_{-1}^3 \frac{dx}{x^2-2x-3}.$$

Задание 4. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$x = 1 - y^2, x = 0.$$

Задание 5. Вычислить объём тела, полученного при вращении вокруг оси ординат фигуры, ограниченной линиями: