

Практическая работа №1

Тема: Предел функции в точке и на бесконечности

Теоретические сведения к практической работе

Пусть существует последовательность действительных чисел $\{a_n \in R : n \geq 1\}$.

Число a называется **пределом**
последовательности

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \in R \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in N$$
$$\forall n > n_0 \quad |a_n - a| < \varepsilon$$

Число A называют *пределом функции* $f(x)$ при $x \rightarrow x_0$ (и пишут $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$),
если для любого $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta > 0$, зависящее от ε , такое, что для всех $x \neq x_0$,
удовлетворяющих условию $|x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Теоремы о пределах:

1. $\lim_{x \rightarrow x_0} C = C$ ($C = \text{const}$).

2. Если $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = B$, то:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \pm \varphi(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = A \pm B;$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot \varphi(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = A \cdot B;$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x)} = \frac{A}{B}, \quad (B \neq 0).$$

Определение: Функция $y=f(x)$ называется бесконечно малой при $x \rightarrow x_0$, если $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$.

Определение: Функция $y=f(x)$ называется бесконечно большой при $x \rightarrow x_0$, если $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$.

1. Неопределенность $\frac{0}{0}$ устраняется разложением на множители числителя и знаменателя. При этом используются следующие формулы:

$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ - разность квадратов;

$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$ - сумма кубов;

$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$ - разность кубов;

$ax^2 + bx + c = a(x-x_1)(x-x_2)$ - разложение квадратного трехчлена на множители, где x_1, x_2 - корни трехчлена.

Корни трехчлена находят решением квадратного уравнения

$$ax^2 + bx + c = 0, D = b^2 - 4ac, x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}.$$

Если выражение содержит радикалы, то необходимо умножить числитель и знаменатель на сопряженное выражение. Например, выражения

$(\sqrt{x-1} - 5)$ и $(\sqrt{x-1} + 5)$ - сопряженные.

Пример 1:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{3x^2 - 5x - 2} = \frac{4 - 4}{12 - 10 - 2} = \frac{0}{0}$$

Разложим на множители числитель и знаменатель:

$$x^2 - 4 = (x-2)(x+2).$$

$$3x^2 - 5x - 2 = 0$$

$$D = 25 + 4 \cdot 3 \cdot 2 = 49,$$

$$x_1 = \frac{5-7}{6} = -\frac{1}{3}; x_2 = \frac{5+7}{6} = 2,$$

$$\text{Получим: } 3x^2 - 5x - 2 = 3\left(x - \frac{1}{3}\right)(x-2) =$$

$(3x-1)(x-2)$, тогда

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{3x^2 - 5x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+2)}{(3x-1)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+2)}{(3x-1)} = \frac{2+2}{6-1} = \frac{4}{5}$$

Ответ: $\frac{4}{5}$.

$$\text{Пример 2: } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2-\sqrt{5-x}}{x-1} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2-\sqrt{5-x})(2+\sqrt{5-x})}{(x-1)(2+\sqrt{5-x})} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2^2 - (\sqrt{5-x})^2}{(x-1)(2+\sqrt{5-x})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4-5+x}{(x-1)(2+\sqrt{5-x})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(x-1)(2+\sqrt{5-x})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(2+\sqrt{5-x})} = \frac{1}{2+\sqrt{5-1}} = \frac{1}{4}.$$

Ответ: $\frac{1}{4}$.

2. Неопределенность $\frac{\infty}{\infty}$:

Устранить данную неопределенность необходимо выделить значащие члены в числителе и в знаменателе, т.е. члены содержащие степень с наибольшим показателем. Остальными членами можно пренебречь.

Пример 1:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6-5x+x^2-4x^3}{x^2+7x-3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-4x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-4x}{1} = -4 \cdot \infty = \infty.$$

Ответ: ∞

Пример 2:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6 - 5x + 8x^2}{x^2 + 7x - 3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^2}{x^2} = 8.$$

Ответ: 8.

Пример 3: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6 - 5x}{x^2 + 7x - 3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-5x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-5}{x} = \frac{-5}{\infty} = 0.$

Ответ: 0.

Необходимое и достаточное условие непрерывности функции:

$$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = f(a)$$

Функция $y=f(x)$ имеет **точку разрыва 1 рода** в точке x_0 , если односторонние пределы данной функции в точке x_0 конечны и неравны:

$$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$$

Скачок h функции $f(x)$ в точке x_0 равен

$$h = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) - \lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$$

Функция $y=f(x)$ имеет **точку разрыва 2 рода** в точке x_0 , если односторонние пределы данной функции в точке x_0 бесконечны:

$$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \infty; \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \infty$$

Пример:

Дана функция
$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{при } x \leq 0, \\ x - 1 & \text{при } 0 < x < 1, \\ 3 & \text{при } x \geq 1. \end{cases}$$

Найти точки разрыва функции, если они существуют, и построить ее график.

Решение: Функции $y = x^2 - 1$, $y = x - 1$, $y = 3$ непрерывны на всей числовой прямой, поэтому заданная функция $y = f(x)$ может иметь разрывы только в точках, где меняется ее аналитическое выражение, то есть в точках $x = 0$ и $x = 1$.

Исследуем функцию на непрерывность в этих точках. Для этого найдем соответствующие односторонние пределы и значения функции.

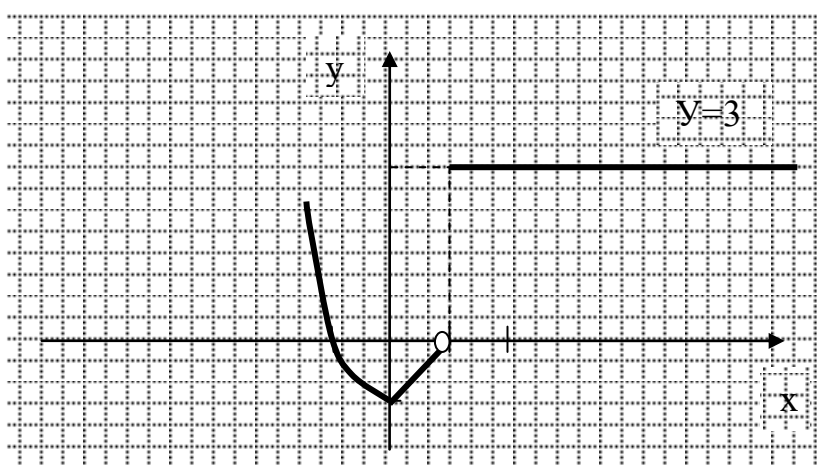
Рассмотрим поведение функции при $x = 0$: $\lim_{x \rightarrow 0-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-0} (x^2 - 1) = 0 - 1 = -1$;

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+0} (x-1) = 0-1 = -1; \quad f(0) = 0^2 - 1 = -1.$$

Так как $\lim_{x \rightarrow 0-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+0} f(x) = f(0)$, то заданная функция непрерывна в точке $x = 0$. Рассмотрим поведение функции при $x = 1$: $\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-0} (x-1) = 1-1 = 0$; $\lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+0} 3 = 3$.

Так как пределы $\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x)$ и $\lim_{x \rightarrow 1+0} f(x)$ конечны и не равны, то точка $x = 1$ — точка разрыва I рода (функция в этой точке претерпевает «скачок» на $3-0=3$ единицы).

Сделаем чертёж:



Содержание практической работы

Задание 1:

а) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{5x+2}{2x+3}$

б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3-2x}{x+1}$

в) $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{x^2-36}{x-6}$

Задание 2: Функция задаётся различными аналитическими выражениями для различных областей изменения независимой переменной. Требуется:

- 1) найти точки разрыва функции, если они существуют;
- 2) найти скачок функции в каждой точке разрыва;
- 3) сделать схематический чертёж.

$$y = \begin{cases} x + 4, & \text{если } x < 1 \\ x^2 + 2, & \text{если } -1 \leq x < 1; \\ 2x, & \text{если } x \geq 1 \end{cases}$$

Оформление титульного листа контрольной работы
Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Волгоградский государственный технический университет
Себряковский филиал

Кафедра математических и естественно-научных дисциплин

Практическая работа №1 по дисциплине
Математический анализ

Выполнил: _____
(Фамилия И.О.)

студент _____ курса _____ направление _____

группа _____ № зачетной книжки _____

Подпись: _____