

ДОЦЕНТ, КАНД. ТЕХН. НАУК
АНДРЕЙ ВАДИМОВИЧ КАГАН

ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОМЕХАНИКИ

Методические указания к выполнению практических работ

Санкт-Петербург
2018

Практическая работа 1

ОПРЕДЕЛЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ГРАФИЧЕСКОЙ ЗАВИСИМОСТИ, ХАРАКТЕРИЗУЮЩЕЙ ФИЗИЧЕСКИЙ ПРОЦЕСС В ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКОМ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЕ ЭНЕРГИИ

1. ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Ознакомление с алгоритмом определения математических моделей физических процессов и явлений, происходящих в электромеханических преобразователях энергии, представленных в виде таблиц чисел или графических зависимостей.

2. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

В процессе проектирования либо при эксплуатации электромеханических устройств часто приходится иметь дело с различного рода графическими зависимостями, связывающими те или иные показатели и параметры. Иногда эти зависимости могут быть представлены в табличной форме, например, в результате опытного определения отдельных характеристик физического объекта либо его модели.

Имеющиеся в таком виде данные в ряде случаев целесообразно представить в виде некоторой относительно простой математической модели – математического выражения, с необходимой точностью описывающего рассматриваемый процесс или явление. Указанная форма представления является необходимой при программировании данного процесса (явления) на компьютере.

Во многих случаях такого рода задача может быть решена в результате применения степенного полинома вида

$$y = A + Bx + Cx^2 + \dots + Mx^n ,$$

где $A, B, C, \dots, M$ - коэффициенты модели.

3. МЕТОДИКА ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

Рассмотрим методику определения математической модели в виде отрезка степенного ряда, аппроксимирующего таблицу чисел (кривую) (табл. 1.1).

Таблица чисел рассматриваемого числового примера

Таблица 1.1

x	0,0	0,5	1,0	1,5	2,0
y	7,0	4,8	2,8	1,4	0,0

3.1. Поскольку вид зависимости заранее не известен, то первоначально проверяем линейную модель: $A + Bx = y$.

Попарно подставляя в нее табличные значения x и y , получаем уравнения для коэффициентов A и B :

$$1 \cdot A + 0 \cdot B = 7,0;$$

$$1 \cdot A + 0,5 \cdot B = 4,8;$$

$$1 \cdot A + 1 \cdot B = 2,8;$$

$$1 \cdot A + 1,5 \cdot B = 1,4;$$

$$1 \cdot A + 2 \cdot B = 0.$$

Составляем так называемые нормальные уравнения:

$$5 \cdot A + 5 \cdot B = 16,0;$$

$$5 \cdot A + 7,5 \cdot B = 7,3 ,$$

которые в общем случае имеют структуру

$$A \sum a_i^2 + B \sum a_i b_i + C \sum a_i c_i + \dots = \sum a_i l_i ;$$

$$A \sum a_i b_i + B \sum b_i^2 + C \sum b_i c_i + \dots = \sum b_i l_i ;$$

$$A \sum a_i c_i + B \sum b_i c_i + C \sum c_i^2 + \dots = \sum c_i l_i ;$$

.....

где $a_i, b_i, c_i, \dots$ - числовые коэффициенты перед $A, B, C, \dots$;

l_i - свободный член.

Проверяем коэффициенты нормальных уравнений.

Для A :

$$\begin{aligned} 5 + 5 + 16,0 &= 1 \cdot (1 + 0 + 7,0) + 1 \cdot (1 + 0,5 + 4,8) + 1 \cdot (1 + 1 + 2,8) + \\ &+ 1 \cdot (1 + 1,5 + 1,4) + 1 \cdot (1 + 2 + 0); \\ &(26,0) . \end{aligned}$$

Для B :

$$5 + 7,5 + 7,3 = 0 \cdot (1 + 0 + 7) + 0,5 \cdot (1 + 0,5 + 4,8) + 1 \cdot (1 + 1 + 2,8) + 1,5 \cdot (1 + 1,5 + 1,4) + 2 \cdot (1 + 2 + 0);$$

$$(19,8) .$$

Решаем нормальные уравнения:

$$A = (16 - 5B) / 5 = 3,2 - B ,$$

где $B = -8,7/2,5$.

Таким образом, коэффициенты:

$$A = 6,68; \quad B = -3,48 ,$$

откуда математическая модель получает следующий вид:

$$y = 6,68 - 3,48x .$$

Подставляя в полученную формулу табличные значения x , получаем вычисленные значения y_c и отклонения (табл. 1.2).

Вычислим сумму:

$$\sum (y - y_c)^2 = 0,364 ,$$

определяем среднюю квадратическую ошибку:

$$\sigma_0 = \sqrt{\frac{\sum (y_i - y_{ic})^2}{r - S}} = \sqrt{\frac{0,364}{5 - 2}} = 0,348 ,$$

где $r = 5$ - число табличных значений;

$S = 2$ - число параметров.

Результаты промежуточных вычислений

Таблица 1.2

x	y_c	$y - y_c$	$(y - y_c)^2$
0,0	+6,68	+0,32	0,1024
0,5	+4,94	-0,14	0,0196
1,0	+3,20	-0,40	0,1600
1,5	+1,46	-0,06	0,0036
2,0	-0,28	+0,28	0,0784

Среднее абсолютное отклонение:

$$\delta = \frac{\sum |y_i - y_{ic}|}{r} = \frac{0,32 + 0,14 + 0,40 + 0,06 + 0,28}{5} = 0,240 .$$

Полученные результаты показывают, что линейная модель неадекватна, так как табличные значения даны с точностью до 0,1, а средняя квадратическая ошибка и среднее абсолютное отклонение больше 0,1.

3.2. Проверяем аналогичным путем модель второй степени:

$$A + Bx + Cx^2 = y.$$

Подставляя в нее табличные значения X и Y , получаем

$$1 \cdot A + 0 \cdot B + 0^2 \cdot C = 7,0;$$

$$1 \cdot A + 0,5 \cdot B + 0,25 \cdot C = 4,8;$$

$$1 \cdot A + 1 \cdot B + 1^2 \cdot C = 2,8;$$

$$1 \cdot A + 1,5 \cdot B + 2,25 \cdot C = 1,4;$$

$$1 \cdot A + 2 \cdot B + 4 \cdot C = 0.$$

Составляем нормальные уравнения:

$$5 \cdot A + 5 \cdot B + 7,5 \cdot C = 16,0;$$

$$5 \cdot A + 7,5 \cdot B + 12,5 \cdot C = 7,3,$$

$$7,5 \cdot A + 12,5 \cdot B + 22,125 \cdot C = 7,15.$$

Проверяем коэффициенты нормальных уравнений.

Для A :

$$5 + 5 + 7,5 + 16,0 = 1 \cdot (1 + 0 + 0 + 7,0) + 1 \cdot (1 + 0,5 + 0,25 + 4,8) + 1 \cdot (1 + 1 + 1 + 2,8) + 1 \cdot (1 + 1,5 + 2,25 + 1,4) + 1 \cdot (1 + 2 + 4 + 0);$$

$$(33,5).$$

Для B :

$$5 + 7,5 + 12,5 + 7,3 = 0 \cdot (1 + 0 + 0 + 7) + 0,5 \cdot (1 + 0,5 + 0,25 + 4,8) + 1 \cdot (1 + 1 + 1 + 2,8) + 1,5 \cdot (1 + 1,5 + 2,25 + 1,4) + 2 \cdot (1 + 2 + 4 + 0);$$

$$(32,3).$$

Для C :

$$7,5 + 12,5 + 22,125 + 7,15 = 0 \cdot (1 + 0 + 0 + 7,0) + 0,25 \cdot (1 + 0,5 + 0,25 + 4,8) + 1 \cdot (1 + 1 + 1 + 2,8) + 2,25 \cdot (1 + 1,5 + 2,25 + 1,4) + 4 \cdot (1 + 2 + 4 + 0);$$

$$(49,275).$$

Решаем нормальные уравнения.

Составляем определители:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 5 & 7,5 \\ 5 & 7,5 & 12,5 \\ 7,5 & 12,5 & 22,125 \end{vmatrix} = 5 \cdot 7,5 \cdot 22,125 + 5 \cdot 12,5 \cdot 7,5 + 5 \cdot 12,5 \cdot 7,5 - 7,5 \cdot 7,5 \cdot 7,5 - 12,5 \cdot 12,5 \cdot 5 - 5 \cdot 5 \cdot 22,125 = 10,94;$$

$$\Delta_A = \begin{vmatrix} 16,0 & 5 & 7,5 \\ 7,3 & 7,5 & 12,5 \\ 7,15 & 12,5 & 22,125 \end{vmatrix} =$$

$$16,0 \cdot 7,5 \cdot 22,125 + 7,3 \cdot 12,5 \cdot 7,5 + 5 \cdot 12,5 \cdot 7,5 -$$

$$\Delta_B = \begin{vmatrix} 5 & 16,0 & 7,5 \\ 5 & 7,3 & 12,5 \\ 7,5 & 7,15 & 22,125 \end{vmatrix} =$$

$$- 7,15 \cdot 7,5 \cdot 7,5 - 12,5 \cdot 12,5 \cdot 16,0 -$$

$$5 \cdot 7,5 \cdot 22,125 + 5 \cdot 7,15 \cdot 7,5 - 7,3 \cdot 5 \cdot 22,125 = 76,5;$$

$$\Delta_C = \begin{vmatrix} 5 & 5 & 16,0 \\ 5 & 7,5 & 7,3 \\ 7,5 & 12,5 & 7,15 \end{vmatrix} =$$

$$5 \cdot 7,5 \cdot 7,15 + 5 \cdot 12,5 \cdot 16,0 + 5 \cdot 7,3 \cdot 7,5 - 7,5 \cdot 7,5 \cdot 16,0 - 12,5 \cdot 7,3 \cdot 5 - 5 \cdot 5 \cdot 7,15 = 6,87.$$

Тогда коэффициенты

$$A = \Delta_A / \Delta = 76,50 / 10,94 = 7,00;$$

$$B = \Delta_B / \Delta = - 51,84 / 10,94 = - 4,74;$$

$$C = \Delta_C / \Delta = 5,87 / 10,94 = 0,63.$$

Математическая модель в этом случае будет иметь вид

$$y = 7,00 - 4,74x + 0,63x^2.$$

Подставляя в полученную формулу табличные значения x , получаем - табл. 1.3.

Результаты применения полинома второй степени

Таблица 1.3

x	y_c	$y - y_c$	$(y - y_c)^2$
0,0	7,00	0,00	0,0000
0,5	4,79	+0,01	0,0001
1,0	2,89	-0,09	0,0081
1,5	1,30	+0,10	0,0100

2,0	0,04	-0,04	0,0016
-----	------	-------	--------

Средняя квадратическая ошибка

$$\sigma_0 = \sqrt{\frac{0,0198}{5-3}} = 0,0995.$$

Среднее абсолютное отклонение

$$\delta = \frac{0 + 0,01 + 0,09 + 0,10 + 0,04}{5} = 0,05.$$

Поскольку $\sigma_0 < 0,1$ и $\delta < 0,1$, найденную математическую модель можно считать удовлетворительной.

Полученные модели имеют следующую графическую интерпретацию (рис. 1.1).

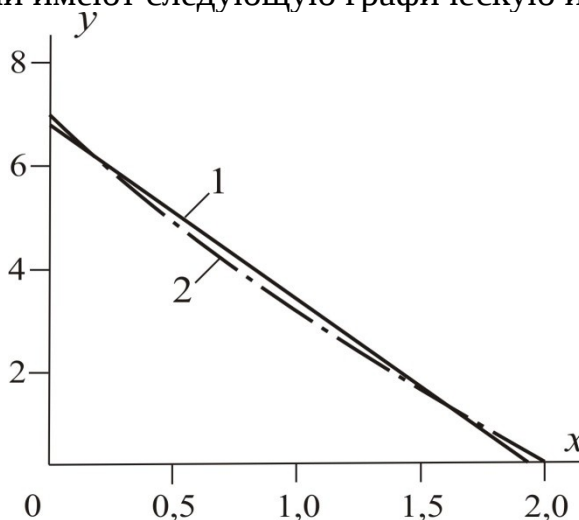


Рис. 1.1. Графическое сравнение полученных математических моделей

$$(1 - y = 6,68 - 3,48x; 2 - y = 7 - 4,74x + 0,63x^2)$$

4. ЗАДАНИЕ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО ВЫПОЛНЕНИЯ

Создать математическую модель процесса в электромеханическом преобразователе в виде полинома второй степени, аппроксимирующего табл. 1.4.

Данные для расчета модели к заданию

Таблица 1.4

№ ва р.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$x_1/$	2/9	1/10	0/5	1/6	3/7	4/5	3/9	3/5	2/3	5/10

y_1										
$x_2/$ y_2	4/7	6/5	3/4	2/5	2/6	6/4	6/2	7/4	1/7	4/3
$x_3/$ y_3	5/2	7/3	4/3	3/2	0/2	7/1	7/1	9/0	0/8	1/4

Проверить адекватность полученной модели и выполнить графическое построение (номер варианта соответствует последней цифре студенческого шифра).

5. СОДЕРЖАНИЕ ОТЧЕТА

Отчет по практической работе должен содержать:

- цель работы;
- краткие теоретические сведения;
- выполненное задание с исходными данными;
- **ВЫВОДЫ.**