

КАФЕДРА
«Механика деформируемого твердого тела»



**СТРОИТЕЛЬНАЯ
МЕХАНИКА**

Хабаровск 2008

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

Государственное образовательное учреждение высшего профессионального
образования
«Тихоокеанский государственный университет»

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

Часть II

Примеры выполнения контрольных работ для студентов
строительных специальностей заочной и дистанционной
формы обучения

Хабаровск
Издательство ТОГУ
2008

УДК 539.3/6. (076.5)

**А.А. Вайсфельд, Л.М. Иванников, В.Е. Киселев,
А.Д. Ловцов, А.А. Лукашевич.**

Строительная механика. Часть II. Примеры выполнения контрольных работ для студентов строительных специальностей заочной и дистанционной формы обучения / под общей редакцией А. Д. Ловцова. – Хабаровск: Изд-во Тихоокеан. гос. ун-та, 2008. – 61с.

Рецензент – кафедра строительной механики Хабаровского университета путей сообщения (профессор Миронов Л.П.).

Настоящие методические указания к выполнению контрольных работ по общему курсу строительной механики, предназначено для студентов заочного и дистанционного обучения. Методические указания составлены на кафедре «Механика деформируемого твердого тела». Содержат задачи включенные в контрольные работы по строительной механике с подробными решениями и пояснениями .

Печатается в соответствии с решениями кафедры «Механика деформируемого твердого тела» и методического совета заочного факультета.

© Тихоокеанский государственный
университет, 2008

ПРЕДИСЛОВИЕ

Целью настоящего методического указания является оказание помощи студентам заочникам при выполнении ими контрольных заданий по строительной механике. При выполнении контрольных работ у студентов заочников часто возникает большое количество вопросов практического характера, на которые они зачастую не могут получить ответа из учебника или сборника задач, а число часов, отводимое на установочные лекции недостаточно. В методических указаниях подробно показаны примеры расчетов по каждой контрольной работе, что облегчит их самостоятельную работу.

Студентам следует помнить, что данное методическое указание может быть полезным лишь в том случае, если они предварительно изучат теоретическую часть курса, относящуюся к той или иной расчетно-проектировочной работе. Подробные указания к изучению курса приведены в методических указаниях: «Строительная механика. Методические указания и контрольные задания для студентов строительных специальностей заочной формы обучения. Часть I» [1], которые включают содержание программы дисциплины «Строительная механика», методические рекомендации к изучению разделов курса, список рекомендуемой литературы, вопросы для самопроверки, указания о порядке выполнения контрольных работ и задачи с необходимыми исходными данными.

В курсе строительная механика изучаются основы расчета сооружений на прочность, жесткость и устойчивость. Самостоятельная работа студентов способствует хорошему усвоению изучаемого предмета, прививает будущим инженерам навыки творческого решения практических задач и приучает пользоваться технической и справочной литературой. Такие навыки студент заочник получает в процессе самостоятельного решения задач, а также при выполнении контрольных работ.

Каждая из контрольных работ, как правило, является комплексной задачей, охватывающей ряд связанных между собой расчетных вопросов, решив которые, студенты получают возможность овладеть инженерными методами решения типовых задач строительной механики. Выполнение контрольных работ приучает студентов к анализу методов решения и способствует приобретению навыков грамотного оформления технических расчетов с сопровождением схем, графиков и необходимых пояснений..

ЗАДАЧА № 1. РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМОЙ МНОГОПРОЛЕТНОЙ БАЛКИ

Задание. Для балки, показанной на рис. 1.1, *а* требуется:

- 1) построить эпюры M и Q (аналитически);
- 2) построить линии влияния M и Q в сечении k , а также линию влияния опорной реакции R_C ;
- 3) определить по линиям влияния значения M , Q и R_C от заданной нагрузки;
- 4) определить прогиб и угол поворота сечения k .

Перед расчетом многопролетной статически определимой балки следует определить, какие элементы балки являются основными и какие второстепенными, опирающимися на эти основные. Затем следует изобразить схему взаимодействия элементов балки – «поэтажную схему». Нагрузка, действующая на основные элементы, не передается на вышележащие второстепенные части; нагрузка же, действующая на второстепенные (вышележащие) части балки, передается и на основную, которая служит опорой.

Расчет многопролетной шарнирно-консольной балки удобно вести по частям, начиная от самых «верхних» балок и последовательно переходя к нижележащим. При расчете нижележащих балок следует учитывать не только ту нагрузку, которая к ним непосредственно приложена, но и силы взаимодействия с вышележащими балками, равные опорным реакциям последних, но имеющих обратное направление.

Порядок расчета:

1. Строим эпюры M и Q .

Начертим схему взаимодействия элементов многопролетной балки – поэтажную схему (рис. 1.1, *б*). Из нее видно, что балка состоит из основной балки AB и двух вспомогательных (BCD и DE), причем балка BCD играет двойную роль – по отношению к балке AB она является вспомогательной, а для балки DE – основной.

Первой рассчитываем самую «верхнюю» балку. Опорные реакции балки DE $R_D = R_E = F/2 = 6 \text{ кН}$. Строим для данной балки эпюры поперечных сил и изгибающих моментов (рис. 1.1, *в*).

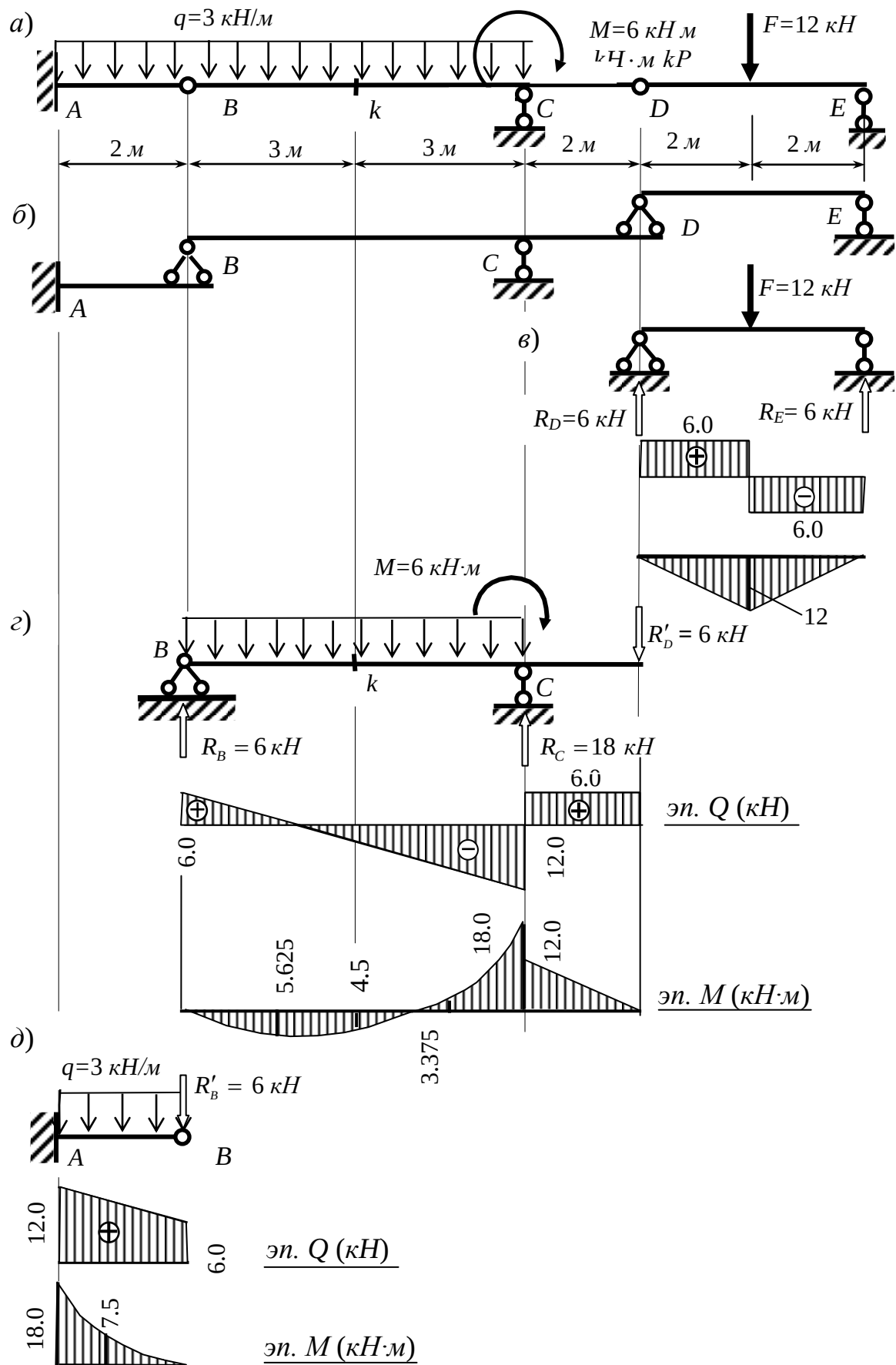


Рис. 1.1. Построение эпюр изгибающих моментов и поперечных сил

Переходя к балке BCD , добавим к нагрузкам, действующим на нее, силу $R'_D = 6 \text{ кН}$, приложенную в точке D и направленную вниз – силу взаимодействия с вышележащей балкой DC . Левая опорная реакция определится из условия равенства нулю моментов всех сил, приложенных к балке BCD , относительно правой опоры ($\sum M_C = 0$). Отсюда $R_B = 6 \text{ кН}$. Для нахождения правой опорной реакции приравняем к нулю сумму моментов относительно левой опоры ($\sum M_B = 0$). Получим $R_C = 18 \text{ кН}$. Строим эпюры поперечных сил и изгибающих моментов для этой балки (рис. 1.1, $з$).

Переходим к основной балке AB . Кроме заданной нагрузки $q = 3 \text{ кН/м}$, в точке B на нее действует сила $R'_B = 6 \text{ кН}$ от вышележащей балки BCD . Определив опорные реакции, строим эпюры поперечных сил и изгибающих моментов в балке AB (рис. 1.1, $д$).

Эпюры поперечных сил и изгибающих моментов для заданной многопролетной балки (рис. 1.2, $а$) строятся путем объединения на общих осях эпюр Q и M , построенных для каждого элемента в отдельности (рис. 1.2, $б$, $в$).

Отметим, что скачки на эп. Q равняются внешним силам, приложенным к балке, а в шарнирах скачки отсутствуют.

2. Строим линии влияния

Линии влияния усилий в балке на двух опорах показаны на рис. 1.3. Для построения линий влияния усилий в многопролетной балке удобно пользоваться поэтажной схемой (рис. 1.4, $б$).

Линия влияния опорной реакции R_C . Рассмотрим вначале движение груза $\bar{F} = 1$ по балке BCD . При этом второстепенная балка DE не загружена и не влияет на работу балки BCD . Тогда участок $B'C'D'$ линии влияния R_C , соответствующий передвижению груза $\bar{F} = 1$ по балке BCD , ничем не будет отличаться от линии влияния правой опорной реакции отдельно стоящей простой балки (рис. 1.3). При положении груза $\bar{F} = 1$ в точке D $R_C = 8/6 = 1.333$.

При движении груза $\bar{F} = 1$ по балке DE в точке D на балку BCD передается усилие R_D . Поскольку $8/6$ – значение реакции R_C от единичной силы, то от R_D будем иметь $R_C = (8/6)R_D$. Значение R_D как опорной реакции меняется по линейному закону. Следовательно, и R_C при движении $\bar{F} = 1$ по балке DE меняется по закону прямой.

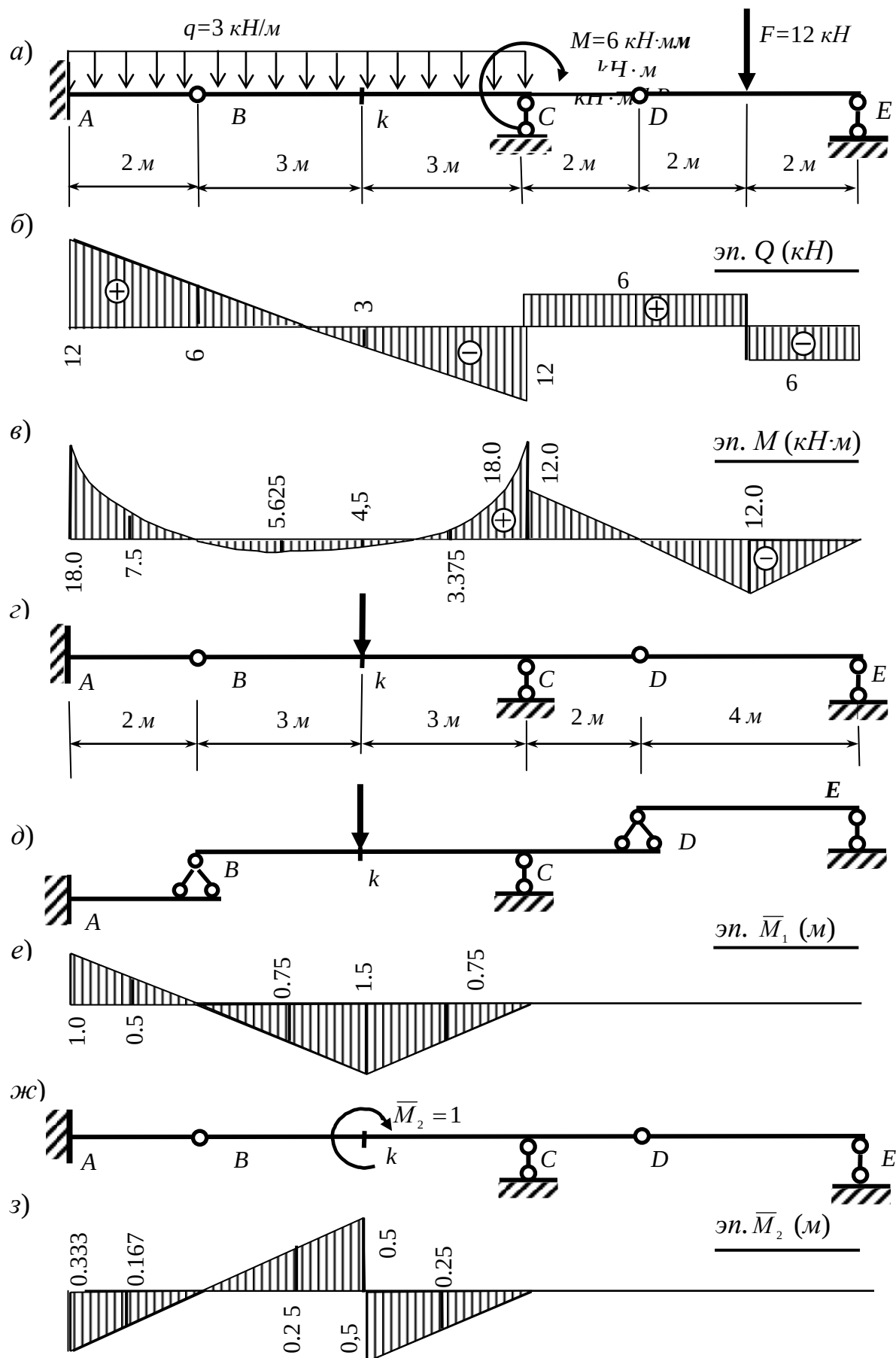


Рис. 1.2. Определение перемещений сечения k

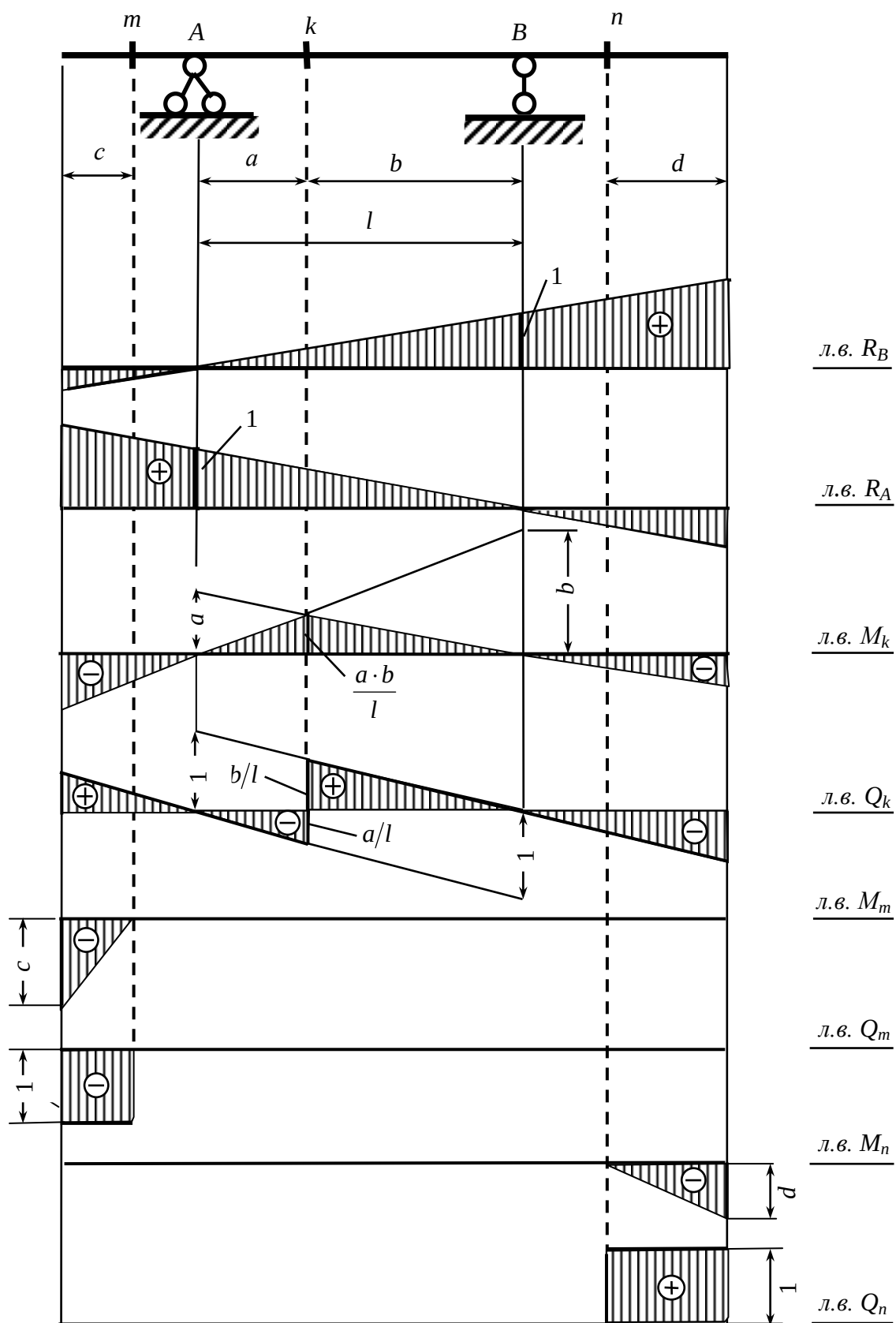


Рис. 1.3. Линии влияния усилий в простой балке

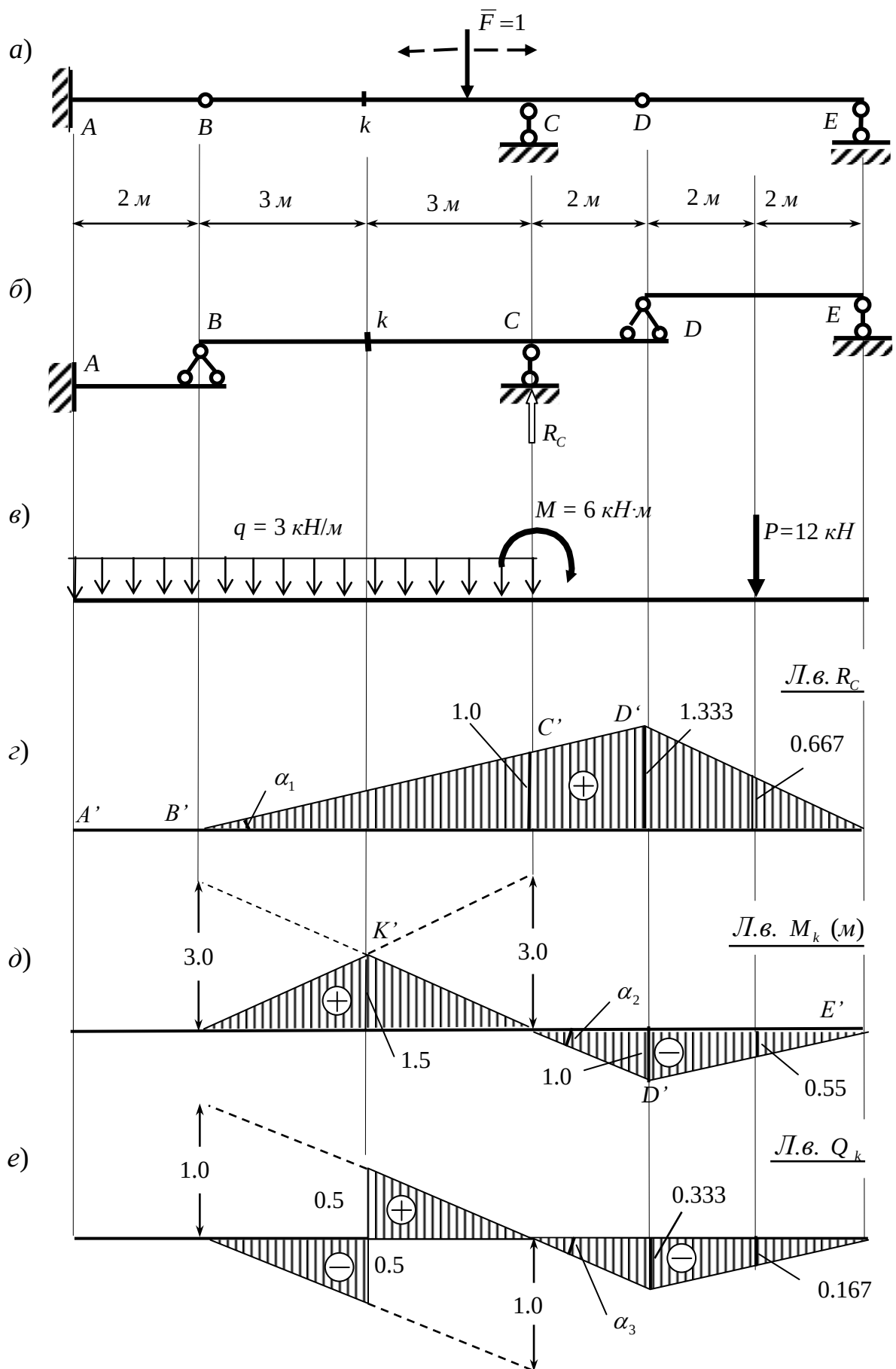


Рис. 1.4. Построение линий влияния в многопролетной балке

При положении $\bar{F}=1$ в точке E $R_D=0$. Найденную выше ординату 1.333 соединяем с нулевой ординатой под точкой E (рис. 1.4, з).

При положении $\bar{F}=1$ на основной балке AB все усилия в расположенной выше балке BCD равны нулю и $R_C=0$, соответствующий участок $A'B'$ линии влияния совпадает с осью абсцисс (рис. 1.4, з).

Линия влияния изгибающего момента M_k в сечении k . Будем, как и выше, рассматривать вначале передвижение груза $\bar{F}=1$ по той балке, к которой принадлежит рассматриваемое сечение. При движении груза $\bar{F}=1$ по балке BCD второстепенная балка DE не работает. Следовательно, участок $B'K'C'D'$ имеет тот же вид (рис. 1.4, д), что и линия влияния M_k , в простой балке на двух опорах (рис. 1.3). При движении $\bar{F}=1$ по DE усилие R'_D , передаваемое на балку BCD , меняется по линейному закону, что и определяет участок $D'E'$ линии влияния M_k . При положении $\bar{F}=1$ на основной балке AB силы взаимодействия с вышележащими этажами отсутствуют и в сечении k никаких усилий не возникает, поэтому соответствующий участок линии влияния совпадает с осевой линией (рис. 1.4, д).

Рассуждая аналогично, строим линию влияния Q_k (рис. 1.4, е).

3. Определим усилия от заданной нагрузки (рис. 1.4, в) по формуле

$$S = \sum_{i=1}^n F_i y_i + \sum_{i=1}^m q_i \omega_i + \sum_{i=1}^l M_i \operatorname{tg} \varphi_i. \quad (1.1)$$

Здесь y_i – ордината линии влияния под силой F_i ; ω_i – площадь части линии влияния, расположенной под равномерно распределенной нагрузкой интенсивности q_i ; φ_i – угол наклона прямолинейного участка линии влияния под моментом M_i . Угол считается положительным, если участок линии влияния до совмещения с осью приходится вращать по часовой стрелке.

Опорная реакция R_C . Вычисляем: площадь участка линии влияния, находящегося под распределенной нагрузкой – $\omega_1 = (1 \cdot 6)/2 = 3$; тангенс угла наклона участка линии влияния R_C в точке приложения сосредоточенного момента $\operatorname{tg} \alpha_1 = 1/6 = 0.167$; ординату линии влияния, расположенную под силой, $y_1 = 0.667$. Тогда, согласно формуле (1.1)

$$R_C = P \cdot 0.667 + q \cdot 3 + M \cdot 0.167 = 12 \cdot 0.667 + 3 \cdot 3 + 6 \cdot 0.167 = 18.006 \text{ кН}.$$

Изгибающий момент M_k . Площадь участка $B'K'C'$, находящегося под распределенной нагрузкой, $\omega_2 = (1.5 \cdot 6)/2 = 4.5$. Тангенс угла наклона участка линии влияния в точке C – $\operatorname{tg} \alpha_2 = -1/2 = -0.5$. Ордината линии влияния, расположенная под силой $y_2 = -0.5$. Тогда по формуле (1.1)

$$M_k = 12 \cdot (-0.5) + 3 \cdot 4.5 + 6 \cdot (-0.5) = 4.5 \text{ кН}.$$

Поперечная сила Q_k в сечении k . Вычислив ω_3 , $\operatorname{tg} \alpha_3$ и y_3 , получим $Q_R = 12 \cdot (-0.167) + 3 \cdot (0) + 6 \cdot (-0.167) = -3.006 \text{ кН}$.

Сравнивая результаты, полученные по линиям влияния, со значениями, найденными при построении эпюр, видим, что они совпадают.

4. Определим прогиб v_k и угол поворота φ_k сечения k . Воспользуемся методом Мора.

Вычисление интеграла Мора производим с помощью формулы Симпсона в следующем порядке:

1) Строим эпюру изгибающих моментов от действия заданной нагрузки – эн. M_F (эн. M на рис. 1.2, в в нашем случае);

2) Выбираем вспомогательные единичные состояния. Для этого освобождаем сооружение от заданной нагрузки и в сечении k по направлению искомого перемещения прикладываем единичное воздействие: при определении линейного перемещения – сосредоточенную силу $\bar{F}_1 = 1$ (рис. 1.2, з); при определении угла поворота – единичный момент $\bar{M}_2 = 1$ (рис. 1.2, ж);

3) Строим эпюру изгибающих моментов от единичного воздействия – эн. $\bar{M}_1$ (рис. 1.2, е);

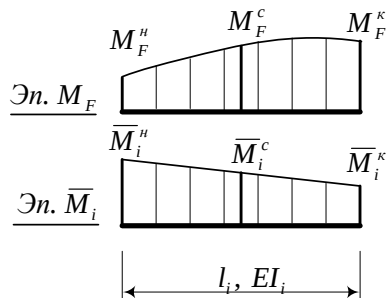


Рис. 1.5. К правилу Симпсона вычисления интеграла Мора

4) Ось балки разбивается на n участков таким образом, чтобы в пределах каждого участка эпюры $\bar{M}_1$ и M_F не имели переломов и скачков.

5) На каждом участке вычисляем ординаты обеих эпюр в начале ($\bar{M}_1^n$, M_F^n), середине ($\bar{M}_1^c$, M_F^c) и в конце участка ($\bar{M}_1^k$ и M_F^k);

6) Вычисляем перемещение по формуле Симпсона (рис. 1.5):

$$\Delta_{iF} = \sum_{j=1}^n \int_0^{l_j} \frac{\bar{M}_i \cdot M_F}{EI_j} dz = \sum_{j=1}^n \frac{l_j}{6 \cdot EI_j} (\bar{M}_i^n \cdot M_F^n + 4 \cdot \bar{M}_i^c \cdot M_F^c + \bar{M}_i^k \cdot M_F^k). \quad (1.2)$$

Используется следующее правило знаков: произведение ординат положительно, если обе ординаты лежат по одну сторону от оси.

В нашем случае прогиб сечения k вычисляется следующим образом:

$$v_k = \Delta_{iF} = \bar{M}_1 \times M = \frac{2}{6EI} (1 \cdot 18.0 + 4 \cdot 0.5 \cdot 7.5 + 0 \cdot 0) + \frac{3}{6EI} (0 \cdot 0 + 4 \cdot 0.75 \cdot 5.625 + 1.5 \cdot 4.5) + \frac{3}{6EI} (1.5 \cdot 4.5 - 4 \cdot 0.75 \cdot 3.375 + 0 \cdot 18) = + \frac{21.125}{EI}.$$

Результат положительный, следовательно, перемещение совпадает с направлением силы $\bar{F}_1 = 1$.

Для определения угла поворота сечения k выбираем новое единичное состояние – снимаем с балки нагрузку и прикладываем единичный момент $\bar{M}_2 = 1$ (рис. 1.2, ж). Строим единичную эпюру *эн.* $\bar{M}_1$ (рис. 1.2, з) и вычисляем

$$\varphi_k = \Delta_{2q} = \bar{M}_2 \times M = \frac{2}{6EI} (-0.333 \cdot 18.0 - 4 \cdot 0.167 \cdot 7.5 + 0 \cdot 0) + \\ + \frac{3}{6EI} (0 \cdot 0 - 4 \cdot 0.25 \cdot 5.625 - 0.5 \cdot 4.5) + \frac{3}{6EI} (+0.5 \cdot 4.5 - 4 \cdot 0.25 \cdot 3.375 + 0 \cdot 0) = \frac{-8.355}{EI}.$$

Знак минус показывает, что сечение поворачивается в направлении, обратном направлению единичного момента $\bar{M}_2$.

Заметим, что поскольку в сечении B (шарнир) при данной нагрузке переломы и скачки отсутствуют, то при вычислении перемещений можно было рассматривать участки AB и Bk как один участок Ak .

ЗАДАЧА № 2. РАСЧЕТ ТРЕХШАРНИРНОЙ АРКИ

Задание. Для заданной трехшарнирной параболической арки с нагрузкой, показанной на рис. 2.1, а требуется:

- 1) определить аналитически изгибающие моменты, поперечные и продольные силы в сечениях K_1 и K_2 от действия заданной нагрузки;
- 2) построить линии влияния M , Q и N для сечения K_2 .
- 3) при помощи линий влияния определить внутренние усилия в сечении K_2 от заданной нагрузки и сравнить с результатами расчета в п.1.

Исходные данные:

ось арки – парабола, описываемая уравнением $y(x) = \frac{4f}{l^2} x(l-x)$;

длина пролета $l = 16 \text{ м}$; стрела подъема $f = 4 \text{ м}$.

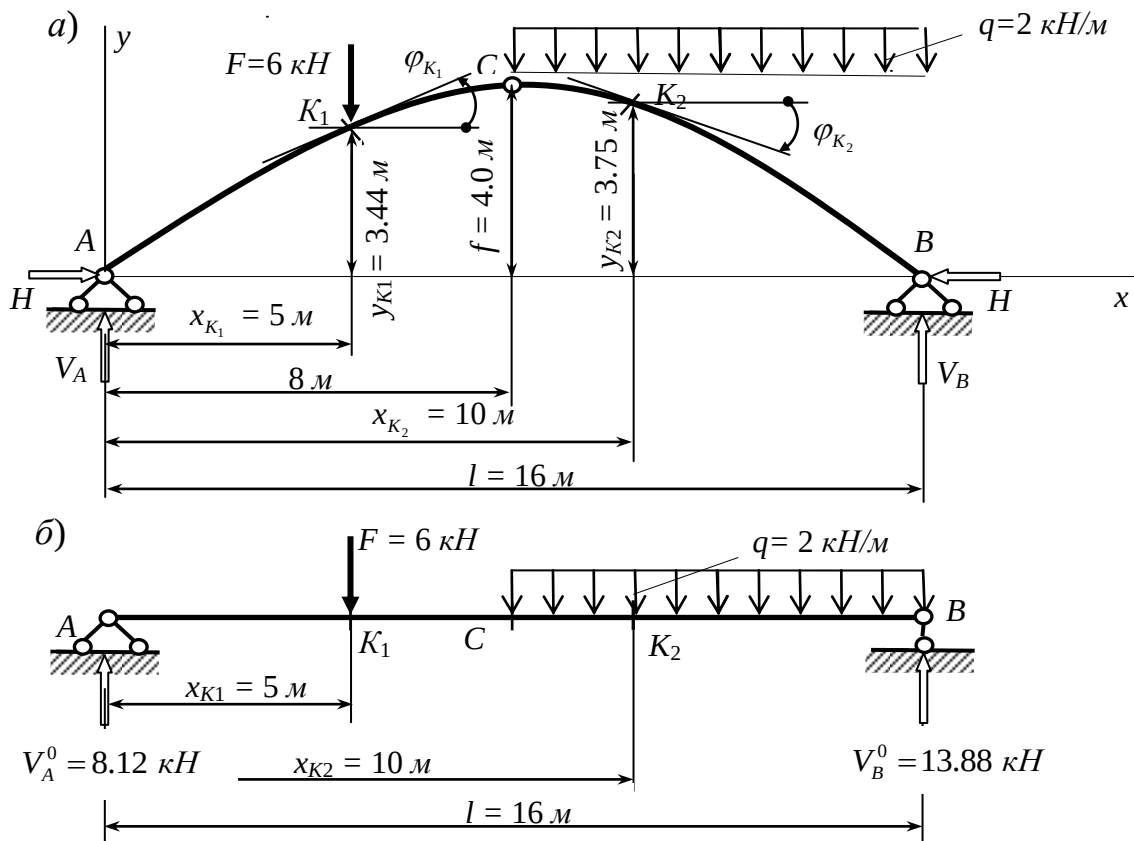


Рис. 2.1. Расчетные схемы:
а) арки; б) однопролетной балки.

Порядок расчета.

1. Определение опорных реакций.

Так как арка загружена только вертикальными силами, то горизонтальные составляющие реакций в точках A и B $H_A = H_B = H$ (распор); а вертикальные составляющие V_A и V_B равны соответствующим

реакциям в балке пролетом l , загруженной заданной вертикальной нагрузкой. (рис. 2.1, б.).

Определяем вертикальные опорные реакции:

$$V_A = V_A^0; \quad \sum M_B = 0; \quad V_A^0 \cdot 16 - F \cdot 11 - q \cdot 8 \cdot 4 = 0;$$

$$V_A^0 \cdot 16 - 6 \cdot 11 - 2 \cdot 8 \cdot 4 = 0;$$

$$V_A^0 = \frac{66 + 64}{16} = 8.125 \text{ кН.}$$

$$V_B = V_B^0; \quad \sum M_A = 0; \quad V_B^0 \cdot 16 - F \cdot 5 - q \cdot 8 \cdot 12 = 0;$$

$$V_B^0 \cdot 16 - 6 \cdot 5 - 2 \cdot 8 \cdot 12 = 0;$$

$$V_B^0 = \frac{30 + 192}{16} = 13.875 \text{ кН.}$$

Распор находим из равновесия левой или правой половины арки согласно формуле:

$$H = \frac{M_C^0}{f}; \quad (2.1)$$

где M_C^0 – изгибающий момент в балке в сечении C .

$$\text{В нашем случае } H = \frac{8.125 \cdot 8 - 6 \cdot 3}{4} = 11.75 \text{ кН.}$$

2. Подсчет геометрических характеристик оси арки.

Очертание оси арки в осях x, y (рис. 2.1, а) описывается уравнением параболы

$$y = \frac{4f}{l^2} x(l - x).$$

Для определения внутренних сил в сечениях арки потребуются значения y , $\cos \varphi$ и $\sin \varphi$, где φ – угол наклона касательной к оси арки.

Тангенс угла наклона касательной к оси арки

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{dy}{dx} = \frac{4f}{l^2} (l - 2x).$$

Зная $\operatorname{tg} \varphi$, определяем последовательно $\varphi = \arctg(\operatorname{tg} \varphi)$, $\cos \varphi$ и $\sin \varphi$.

Для сечения K_1

$$x_{K_1} = 5 \text{ м,}$$

$$y_{K_1} = \frac{4f}{l^2} x_{K_1} (l - x_{K_1}) = \frac{4 \cdot 4}{16^2} \cdot 5 \cdot (16 - 5) = 3.438 \text{ м,}$$

$$\operatorname{tg} \varphi_{K_1} = \frac{4f}{l^2} (l - 2x_{K_1}) = \frac{4 \cdot 4}{16^2} \cdot (16 - 2 \cdot 5) = 0.375,$$

$$\varphi_{K_1} = \arctg(\operatorname{tg} \varphi_{K_1}) = \arctg 0.375 = 0.359 \text{ рад, } \sin \varphi_{K_1} = \sin 0.359 = 0.351,$$

$$\cos \varphi_{K_1} = \cos 0.359 = 0.936.$$

Для сечения K_2

$$x_{K_2} = 10 \text{ м,}$$

$$y_{K_2} = \frac{4f}{l^2} x_{K_2} (l - x_{K_2}) = \frac{4 \cdot 4}{16^2} \cdot 10 \cdot (16 - 10) = 3.750 \text{ м,}$$

$$\operatorname{tg} \varphi_{K_2} = \frac{4f}{l^2} (l - 2x_{K_2}) = \frac{4 \cdot 4}{16^2} \cdot (16 - 2 \cdot 10) = -0.25,$$

$$\varphi_{K_2} = \arctg(\operatorname{tg} \varphi_{K_2}) = \arctg(-0.25) = -0.245 \text{ рад.}, \quad \sin \varphi_{K_2} = \sin(-0.245) = -0.243,$$

$$\cos \varphi_{K_2} = \cos(-0.245) = 0.970;$$

3. *Определение внутренних сил в заданных сечениях арки от внешней нагрузки.*

Изгибающий момент в точке K оси арки определяется по формуле:

$$M_K = M_K^0 - H \cdot y_K, \quad (2.2)$$

где M_K^0 – изгибающий момент в балке («балочный» момент) в сечении K ; y_K – координата y точки K оси арки.

Поперечная и продольная силы в сечении K определяются по формулам:

$$Q_K = Q_K^0 \cos \varphi_K - H \sin \varphi_K; \quad (2.3)$$

$$N_K = -(Q_K^0 \sin \varphi_K + H \cos \varphi_K), \quad (2.4)$$

где Q_K^0 – поперечная сила в сечении K балки («балочная» поперечная сила); φ_K – угол наклона касательной к горизонтали в точке K оси арки (см., например, φ_{K_1} , φ_{K_2} на рис. 2.1, а).

Согласно рис 2.1, б балочные изгибающие моменты для заданных сечений равны:

$$M_{K_1}^0 = V_A^0 \cdot x_{K_1} = 8.125 \cdot 5 = 40.625 \text{ кНм};$$

$$M_{K_2}^0 = V_A^0 \cdot x_{K_2} - F(x_{K_2} - 5) - q \frac{(x_{K_2} - 8)^2}{2} = 8.125 \cdot 10 - 6 \cdot (10 - 5) - 2 \cdot \frac{(10 - 8)^2}{2} = 47.250 \text{ кНм}.$$

Подсчитываем поперечные силы в отмеченных сечениях балки (рис 2.1, б). При определении поперечной силы в сечении K_1 необходимо обратить внимание на то, что сечение совпадает с точкой приложения сосредоточенной силы F , поэтому $Q_{K_1}^0$ в этом случае нужно определять дважды – бесконечно близко слева и справа от сечения K_1 :

$$Q_{K_1}^{0\text{лев}} = V_A^0 = 8.125 \text{ кН};$$

$$Q_{K_1}^{0\text{прав}} = V_A^0 - F = 8.125 - 6 = 2.125 \text{ кН};$$

$$Q_{K_2}^0 = V_A^0 - F - q \cdot (x_{K_2} - 8) = 8.125 - 6 - 2 \cdot (10 - 8) = -1.875 \text{ кН}.$$

Внутренние силы в сечении K_1 с учетом вычисленных геометрических характеристик оси арки подсчитываем по формулам (2.2) – (2.4):

$$M_{K_1} = M_{K_1}^0 - H \cdot y_{K_1} = 40.625 - 11.75 \cdot 3.438 = 0.234 \text{ кНм};$$

$$Q_{K_1}^{\text{лев}} = Q_{K_1}^{0\text{лев}} \cos \varphi_{K_1} - H \sin \varphi_{K_1} = 8.125 \cdot 0.936 - 11.75 \cdot 0.351 = 3.482 \text{ кН};$$

$$Q_{K_1}^{\text{прав}} = Q_{K_1}^{0\text{прав}} \cos \varphi_{K_1} - H \sin \varphi_{K_1} = 2.125 \cdot 0.936 - 11.75 \cdot 0.351 = -2.136 \text{ кН};$$

$$N_{K_1}^{\text{лев}} = -(Q_{K_1}^{0\text{лев}} \sin \varphi_{K_1} + H \cos \varphi_{K_1}) = -(8.125 \cdot 0.351 + 11.75 \cdot 0.936) = -13.855 \text{ кН};$$

$$N_{K_1}^{\text{прав}} = -(Q_{K_1}^{0\text{прав}} \sin \varphi_{K_1} + H \cos \varphi_{K_1}) = -(2.125 \cdot 0.351 + 11.75 \cdot 0.936) = -11.748 \text{ кН}.$$

Внутренние силы в сечении K_2 арки будут равны:

$$M_{K_2} = M_{K_2}^0 - H \cdot y_{K_2} = 47.25 - 11.748 \cdot 3.75 = 3.188 \text{ кНм};$$

$$Q_{K_2} = Q_{K_2}^0 \cos \varphi_{K_2} - H \sin \varphi_{K_2} = -1.875 \cdot 0.97 - 11.75 \cdot (-0.243) = 1.031 \text{ кН};$$

$$N_{K_2} = -(Q_{K_2}^0 \sin \varphi_{K_2} + H \cos \varphi_{K_2}) = -[-1.875 \cdot (-0.243) + 11.75 \cdot 0.97] = -11.854 \text{ кН}.$$

Видно, что значения M и Q в сечениях арки существенно уменьшаются по сравнению с балкой, что является результатом влияния распора.

4. Построение линий влияния (л.в.) M , Q и N в сечении K_2 арки

При построении л.в. M , л.в. Q и л.в. N будем использовать формулы, аналогичные формулам (2.1) – (2.4) для определения внутренних сил в арке:

$$\text{л.в. } H = \text{л.в. } M_C^0 \cdot \frac{1}{f}. \quad (2.5)$$

$$\text{л.в. } M_K = \text{л.в. } M_K^0 - y_K \cdot (\text{л.в. } H); \quad (2.6)$$

$$\text{л.в. } Q_K = \cos \varphi_K \cdot (\text{л.в. } Q_K^0) - \sin \varphi_K \cdot (\text{л.в. } H); \quad (2.7)$$

$$\text{л.в. } N_K = -\sin \varphi_K \cdot (\text{л.в. } Q_K^0) - \cos \varphi_K \cdot (\text{л.в. } H); \quad (2.8)$$

4.1. Построение линии влияния распора H (л.в. H).

Построим сначала л.в. M_C^0 – линию влияния изгибающего момента в сечении C балки. Построение линий влияния усилий в балках рассмотрено в задаче 1 настоящих указаний (рис. 1.3). В нашем случае для построения л.в. M_C^0 надо воспользоваться л.в. M_k на рис. 1.3 при $a = b = l/2$: л.в. M_C^0 будет представлять собой равнобедренный треугольник с ординатой посередине, равной $\frac{a \cdot b}{l} = \frac{l/2 \cdot l/2}{l} = \frac{l}{4}$. Из формулы (2.5) видно, что л.в. H отличается от л.в. M_C^0 только постоянным коэффициентом $1/f$. Чтобы из л.в. M_C^0 получить л.в. H , достаточно все ординаты л.в. M_C^0 разделить на f , т. е. для л.в. H средняя ордината будет равна $\frac{l}{4f} = \frac{16}{4 \cdot 4} = 1$ (рис. 2.2, в). Ординаты л.в. H безразмерны.

4.2. Построение линии влияния изгибающего момента в сечении K_2 (л.в. M_{K_2}).

Линию влияния будем строить по формуле (2.6)

$$\text{л.в. } M_{K_2} = \text{л.в. } M_{K_2}^0 - y_{K_2} \cdot (\text{л.в. } H).$$

Л.в. $M_{K_2}^0$ строится как л.в. M_k (рис. 1.3) при $a = 10 \text{ м}$, $b = 6 \text{ м}$. Ордината

л.в. $M_{K_2}^0$ в сечении K_2 , таким образом, будет равна $\frac{a \cdot b}{l} = \frac{10 \cdot 6}{16} = 3.75 \text{ м}$

(рис. 2.2, з). Линия влияния момента в арке получается вычитанием из линии влияния момента в балке (рис. 2.2, з) линии влияния распора (рис. 2.2, в), все ординаты, которой умножены на $y_{K_2} = 3.75 \text{ м}$.

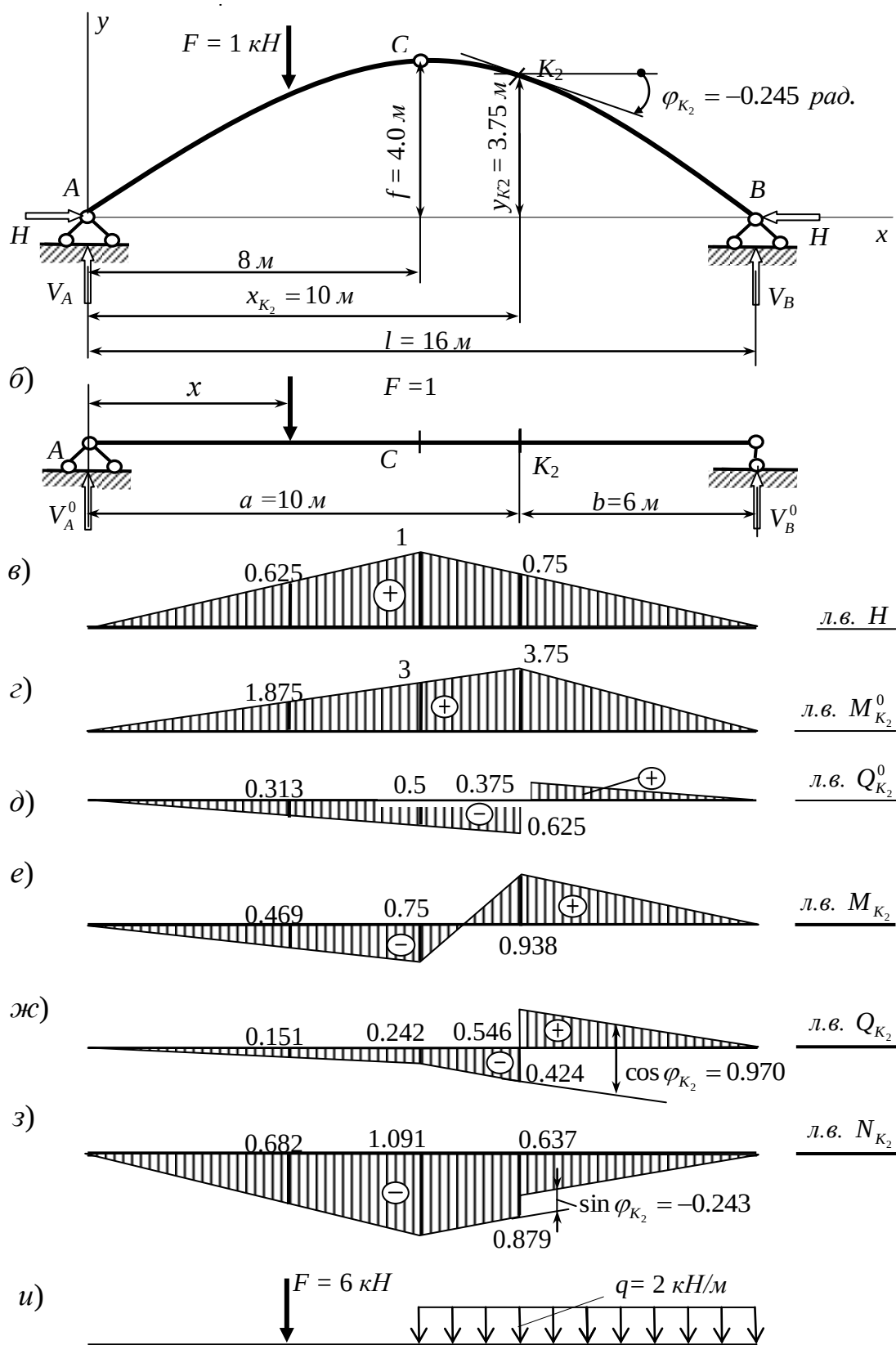


Рис. 2.2. Построение линий влияния в арке: расчетные схемы а) арки, б) балки; в) линия влияния распора; балочные линии влияния г) момента, д) поперечной силы; линии влияния в арке е) момента, ж) поперечной силы, з) продольной силы; и) нагрузка.

Будем строить $л.в. M_{K_2}$, подсчитывая ее ординаты в характерных точках:

точка A : $0 - 3.75 \cdot 0 = 0$;

точка C : $3 - 3.75 \cdot 1 = -0.75$;

точка K_2 : $3.75 - 3.75 \cdot 0.75 = 0.938$;

точка B : $0 - 3.75 \cdot 0 = 0$.

Откладываем подсчитанные ординаты, соединяем их прямыми линиями и получаем искомую $л.в. M_{K_2}$ (рис. 2.2, е). Размерность ординат $л.в. M_{K_2} - м$.

4.3. Построение линии влияния поперечной силы в сечении K_2 ($л.в. Q_{K_2}$)

Линию влияния Q_{K_2} будем строить по формуле (2.7)

$$л.в. Q_{K_2} = \cos \varphi_{K_2} \cdot (л.в. Q_{K_2}^0) - \sin \varphi_{K_2} \cdot (л.в. H).$$

$Л.в. Q_{K_2}^0$ построена как $л.в. Q_k$ (рис. 1.3) при $a = 10 м$, $b = 6 м$ и показана на рис. 2.2, д. Линия влияния Q_{K_2} в арке получается вычитанием из линии влияния $л.в. Q_{K_2}^0$ в балке (рис. 2.2, д) (умноженной на $\cos \varphi_{K_2} = 0.970$) линии влияния распора (рис. 2.2, в) (умноженной на $\sin \varphi_{K_2} = -0.243$):

точка A : $0.970 \cdot 0 - (-0.243) \cdot 0 = 0$;

точка C : $0.970 \cdot (-0.5) - (-0.243) \cdot 1 = -0.242$;

точка K_2 (слева): $0.970 \cdot (-0.625) - (-0.243) \cdot 0.75 = -0.424$;

точка K_2 (справа): $0.970 \cdot 0.375 - (-0.243) \cdot 0.75 = 0.546$;

точка B : $0.970 \cdot 0 - (-0.243) \cdot 0 = 0$.

$Л.в. Q_{K_2}$, построенная по полученным данным, приведена на рис. 2.2, ж.

Ординаты $л.в. Q_{K_2}$ безразмерны.

4.4 Построение линии влияния продольной силы в сечении K_2 ($л.в. N_{K_2}$).

Линию влияния N_{K_2} будем строить по формуле (2.8)

$$л.в. N_{K_2} = -\sin \varphi_{K_2} \cdot (л.в. Q_{K_2}^0) - \cos \varphi_{K_2} \cdot (л.в. H):$$

точка A : $-(-0.243) \cdot 0 - 0.970 \cdot 0 = 0$;

точка C : $-(-0.243) \cdot (-0.5) - 0.970 \cdot 1 = -1.091$;

точка K_2 (слева): $-(-0.243) \cdot (-0.625) - 0.970 \cdot 0.75 = -0.879$;

точка K_2 (справа): $-(-0.243) \cdot (0.375) - 0.970 \cdot 0.75 = -0.637$;

точка B : $-(-0.243) \cdot 0 - 0.970 \cdot 0 = 0$.

$Л.в. N_{K_2}$, построенная по полученным данным, приведена на рис. 2.2, з.

Ординаты $л.в. N_{K_2}$ безразмерны.

5. Определение M_{K_2} , Q_{K_2} , N_{K_2} от заданной нагрузки по линиям влияния

Соответствующее усилие S вычисляется по формуле (1.1), которая для нашей нагрузки (рис. 2.2, и) примет вид

$$S = F \cdot y + q \cdot \omega,$$

где y – ордината линии влияния S под сосредоточенной силой, ω – площадь линии влияния S под равномерно распределенной нагрузкой интенсивности q .

Подсчет изгибающего момента M_{K_2} по л.в. M_{K_2}

Ордината под силой $y = -\frac{0.75}{8} \cdot 5 = -0.469$ м.

Площадь под распределенной нагрузкой $\omega = \frac{0.938 \cdot 6}{2} + \frac{0.938 - 0.75}{2} \cdot 2 = 3.002$ м².

Тогда $M_{K_2} = 6 \cdot (-0.469) + 2 \cdot 3.002 = 3.190$ кНм.

Подсчет поперечной силы Q_{K_2} по л.в. Q_{K_2}

Ордината под силой $y = -\frac{0.242}{8} \cdot 5 = -0.151$.

Площадь под нагрузкой $\omega = \frac{0.546 \cdot 6}{2} + \frac{-0.424 - 0.242}{2} \cdot 2 = 0.972$ м.

Тогда $Q_{K_2} = 6 \cdot (-0.151) + 2 \cdot 0.972 = 1.038$ кН.

Подсчет продольной силы N_{K_2} по л.в. N_{K_2}

Ордината под силой $y = -\frac{1.091}{8} \cdot 5 = -0.682$.

Площадь под нагрузкой $\omega = -\frac{0.637 \cdot 6}{2} - \frac{1.091 + 0.879}{2} \cdot 2 = -3.881$ м.

Тогда $N_{K_2} = 6 \cdot (-0.682) + 2 \cdot (-3.881) = -11.854$ кН.

Ранее аналитически были получены $M_{K_2} = 3.188$ кНм, $Q_{K_2} = 1.031$ кН, $N_{K_2} = -11.854$ кН. Как видно, значения M_{K_2} , Q_{K_2} и N_{K_2} , полученные по линиям влияния, практически совпадают с их значениями, вычисленными ранее аналитическим путем. Вследствие накопления погрешностей вычислений, появляющихся при подсчетах, могут получаться незначительные расхождения.

ЗАДАЧА № 3.1. РАСЧЕТ ПРОСТОЙ ПЛОСКОЙ СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМОЙ ФЕРМЫ

Задание. Для фермы, показанной на рис. 3.1, *а* требуется:

- 1) определить (аналитически) усилия в стержнях третьей панели;
- 2) построить линии влияния усилий в тех же стержнях;
- 3) по линиям влияния подсчитать значения усилий от заданной нагрузки и сравнить их со значениями, полученными аналитически.

Порядок расчета.

1. Определяем усилия в стержнях фермы.

Расчет начинаем с определения опорных реакций. Поскольку ферма и нагрузка симметричны, $R_A = R_B = 5 \cdot F / 2 = 5 \cdot 6 / 2 = 15 \text{ кН}$.

Для определения усилий в стержнях фермы применяем метод сечений. Желательно так вести вычисления, чтобы усилие в каждом стержне определялось независимо от усилий в других стержнях. Это избавляет от нарастания погрешности расчета и увеличивает его точность. Для этого надлежит придерживаться следующего порядка:

а) Провести разрез фермы, который должен проходить не больше чем через три стержня, в том числе и через стержень, усилие в котором требуется определить.

б) Отбросить левую или правую часть фермы (удобнее отбрасывать наиболее нагруженную часть фермы).

в) Заменить действие отброшенной части фермы неизвестными усилиями в разрезанных стержнях; при этом усилия всегда следует направлять от разреза, то есть предполагая их растягивающими (положительными).

г) Составить такое уравнение статики, чтобы, по возможности, только искомое усилие входило в него как неизвестное.

д) Решить уравнение и найти это усилие; если результат будет со знаком плюс, то стержень растянут; если со знаком минус, то стержень сжат.

Усилие N_{4-6} (нижний пояс). Проведем разрез $n-n$ и отбросим правую часть фермы (рис. 3.1, *б*). Для того чтобы в уравнение для N_{4-6} не вошли усилия N_{5-6} и N_{5-7} , следует записать сумму моментов всех сил, приложенных к оставшейся части фермы, относительно узла 5, в котором пересекаются линии действия этих усилий. Такая точка называется **моментной**. Эта точка всегда находится на пересечении линии действия усилий в двух других стержнях, попавших в разрез:

$$\sum M_5 = 0; \quad N_{4-6} \cdot r_{4-6} - R_A \cdot 2d + F \cdot d = 0.$$

$$\text{Отсюда } N_{4-6} = (R_A \cdot 2 - F \cdot 1)d / r_{4-6} = (15 \cdot 2 - 6 \cdot 1) \cdot 4 / 3.333 = 28.80 \text{ кН}.$$

Усилие N_{5-7} (верхний пояс). Для нахождения N_{5-7} воспользуемся тем же разрезом $n-n$ (рис. 3.1, б), но теперь моментная точка будет на пересечении линий действия N_{5-6} и N_{4-6} в узле 6:

$$\sum M_6 = 0; \quad -N_{5-7} \cdot r_{5-7} - R_A \cdot 3d + F \cdot 2d + F \cdot d = 0.$$

Откуда $N_{5-7} = d(-R_A \cdot 3 + F \cdot 2 + F) / r_{5-7} = 4 \cdot (-15 \cdot 3 + 6 \cdot 2 + 6) / 4.62 = -23.40 \text{ кН}$.

Усилие N_{5-6} (раскос). Для определения N_{5-6} вновь воспользуемся разрезом $n-n$ (рис. 3.1, б). Моментная точка находится на пересечении линий действия усилий N_{5-7} и N_{4-6} в узле А. Проводя из этого узла перпендикуляр на линию действия искомого усилия (рис. 3.1, г), получим плечо усилия N_{5-6} относительно узла 1.

$$\sum M_1 = 0; \quad -N_{5-6} \cdot r_{5-6} - F \cdot d - F \cdot 2d = 0.$$

Тогда $N_{5-6} = -3F \cdot d / r_{5-6} = -3 \cdot 6 \cdot 4 / 7.68 = -9.375 \text{ кН}$.

Усилие N_{6-7} (правая стойка). Для нахождения N_{6-7} воспользуемся разрезом $m-m$ (рис. 3.1, в). Рассмотрим равновесие узла 7.

$$\sum X = 0; \quad -N_{5-7} \cos \alpha + N_{7-9} \cos \alpha = 0; \text{ следовательно, } N_{7-9} = N_{5-7};$$

$$\sum Y = 0; \quad -N_{6-7} - F - 2 \cdot N_{5-7} \sin \alpha = 0.$$

Откуда $N_{6-7} = -2 \cdot \sin \alpha \cdot N_{5-7} - F = -2 \cdot 0.385 \cdot (-23.40) - 6 = +12.00 \text{ кН}$.

2. Построение линий влияния начинаем с построения линий влияния опорных реакций.

Опорные реакции в балочной ферме (рис. 3.2, а) определяются так же, как для однопролетной балки. Поэтому линии влияния этих реакций не отличаются от линий влияния опорных реакций балок (рис. 3.3, б, в).

Линия влияния усилия N_{4-6} . Воспользуемся разрезом $n-n$ (рис. 3.2, а). Рассмотрим два положения единичного груза: справа и слева от разрезанной панели. При положении груза $\bar{F}=1$ справа от разреза рассматриваем равновесие левой отсеченной части фермы (рис. 3.2, в) и составляем сумму моментов относительно моментной точки – узла 5:

$$\sum M_5^{\text{лев}} = 0; \quad N_{4-6} \cdot r_{4-6} - R_A \cdot 2d = 0.$$

Откуда $N_{4-6} = (2d / r_{4-6}) \cdot R_A = (2 \cdot 4 / 3.33) R_A = 2.4 \cdot R_A$,

т.е. правый участок л.в. N_{4-6} отличается от л.в. R_A лишь постоянным множителем 2.4.

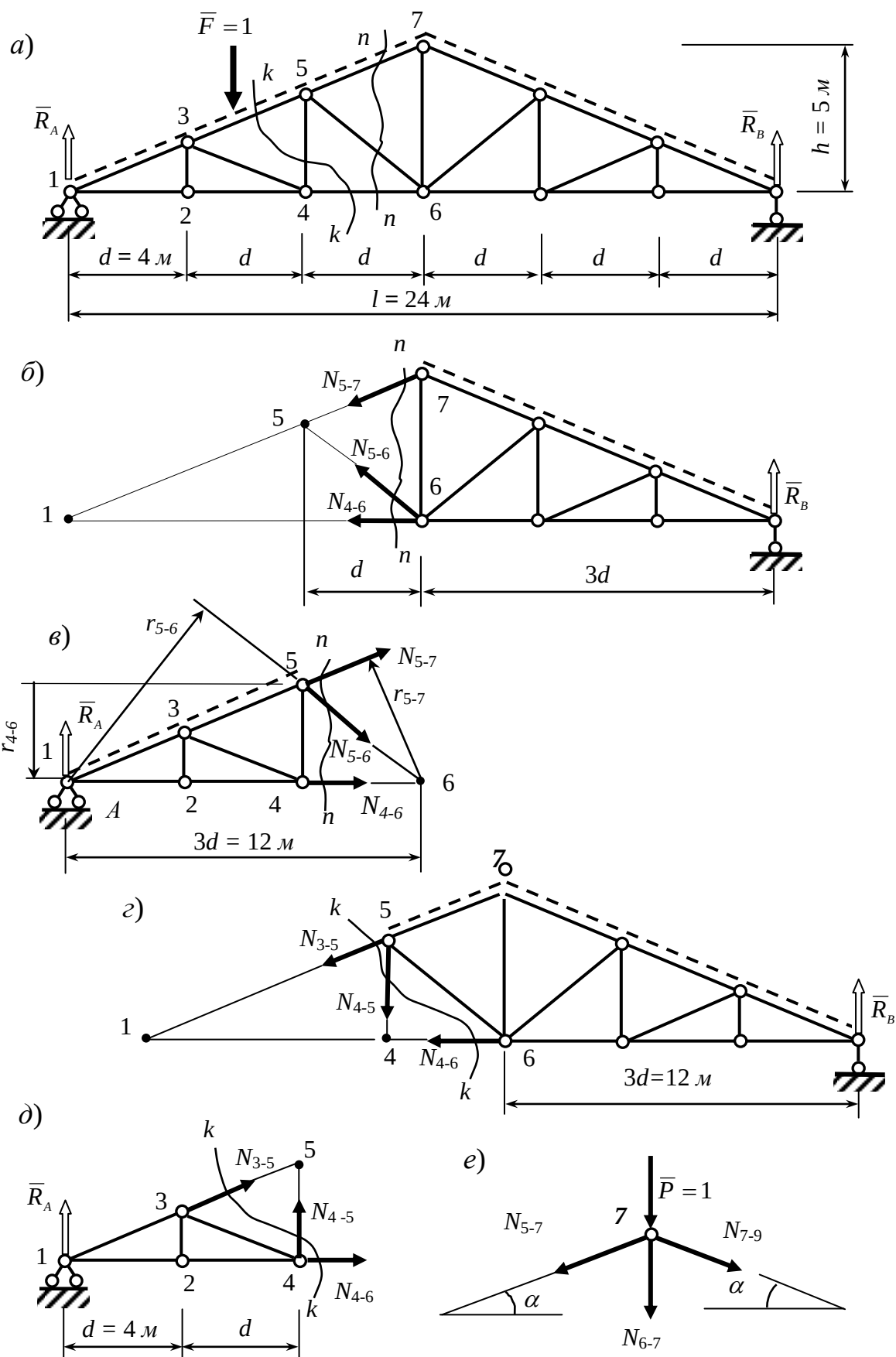


Рис. 3.2 Определение усилий в стержнях фермы

Строим правую прямую линии влияния N_{4-6} , откладывая на левой опорной вертикали ординату 2.4 и соединяя ее с нулевой точкой на правой опорной вертикали (рис. 3.3, *з*). Полученную правую прямую используем на участке движения груза справа от разрезанной панели.

При положении груза слева от сечения $n-n$ составляем условие равновесие правой отсеченной части фермы (рис. 3.2, *б*):

$$\sum M_5^{прав} = 0; \quad -N_{4-6} \cdot r_{4-6} + R_B \cdot 4d = 0.$$

$$\text{Откуда } N_{4-6} = (4d / r_{4-6}) R_B = (4 \cdot 4 / 3.33) R_B = 4.8 R_B,$$

т.е. левый участок *л.в.* N_{4-6} имеет такой же вид как *л.в.* R_B . Умножая ординаты *л.в.* R_B на множитель 4.8. получаем левую прямую *л.в.* N_{4-6} (рис. 3.3, *з*).

При положении груза $\bar{F}=1$ в пределах разрезанной панели линией влияния будет передаточная прямая, соединяющая крайние ординаты (передаточные прямые на рис. 3.3 показаны жирными линиями).

Линия влияния усилия N_{5-7} . Вновь воспользуемся разрезом $n-n$ (рис. 3.2, *а*). Рассмотрим два положения единичного груза: справа и слева от разрезанной панели. При нахождении груза $\bar{F}=1$ справа от разреза рассматриваем равновесие левой отсеченной части фермы (рис. 3.2, *в*) и составляем сумму моментов относительно моментной точки – узла 6:

$$\sum M_6^{лев} = 0; \quad -N_{5-7} \cdot r_{57} - R_A \cdot 3d = 0.$$

$$\text{Откуда } N_{5-7} = -(3d / r_{57}) R_A = -(3 \cdot 4 / 4.62) R_A = -2.6 \cdot R_A,$$

т.е. правый участок *л.в.* N_{5-7} отличается от *л.в.* R_A лишь постоянным множителем 2.6 и знаком минус. Все ординаты *л.в.* R_A изменяются в 2.6 раз и откладываются от оси в отрицательном направлении, т.е. вниз (рис. 3.3, *д*). Построенную таким образом правую прямую используем на участке движения груза справа от разрезанной панели.

При положении груза слева от разрезанной панели составляем условие равновесия правой отсеченной части (рис. 3.2, *б*):

$$\sum M_6^{прав} = 0, \text{ или } +N_{5-7} \cdot r_{57} + R_B \cdot 3d = 0.$$

$$\text{Откуда } N_{57} = -(3d / r_{57}) R_B = -(3 \cdot 4 / 4.62) R_B = -2.6 \cdot R_B.$$

т.е. левый участок *л.в.* N_{5-7} отличается от *л.в.* R_A лишь постоянным множителем 2.6 и знаком минус. Все ординаты *л.в.* R_A изменяются в 2.6 раз и откладываются от оси в отрицательном направлении т.е. вниз (рис. 3.3, *д*). Полученную левую прямую используем на участке движения груза $\bar{F}=1$ слева от разрезанной панели.

В пределах разрезанной панели соединяем крайние ординаты прямой линией.

Отметим, что в рассмотренных линиях влияния правая и левая ветви линии влияния пересеклись под моментными точками. Это не случайно

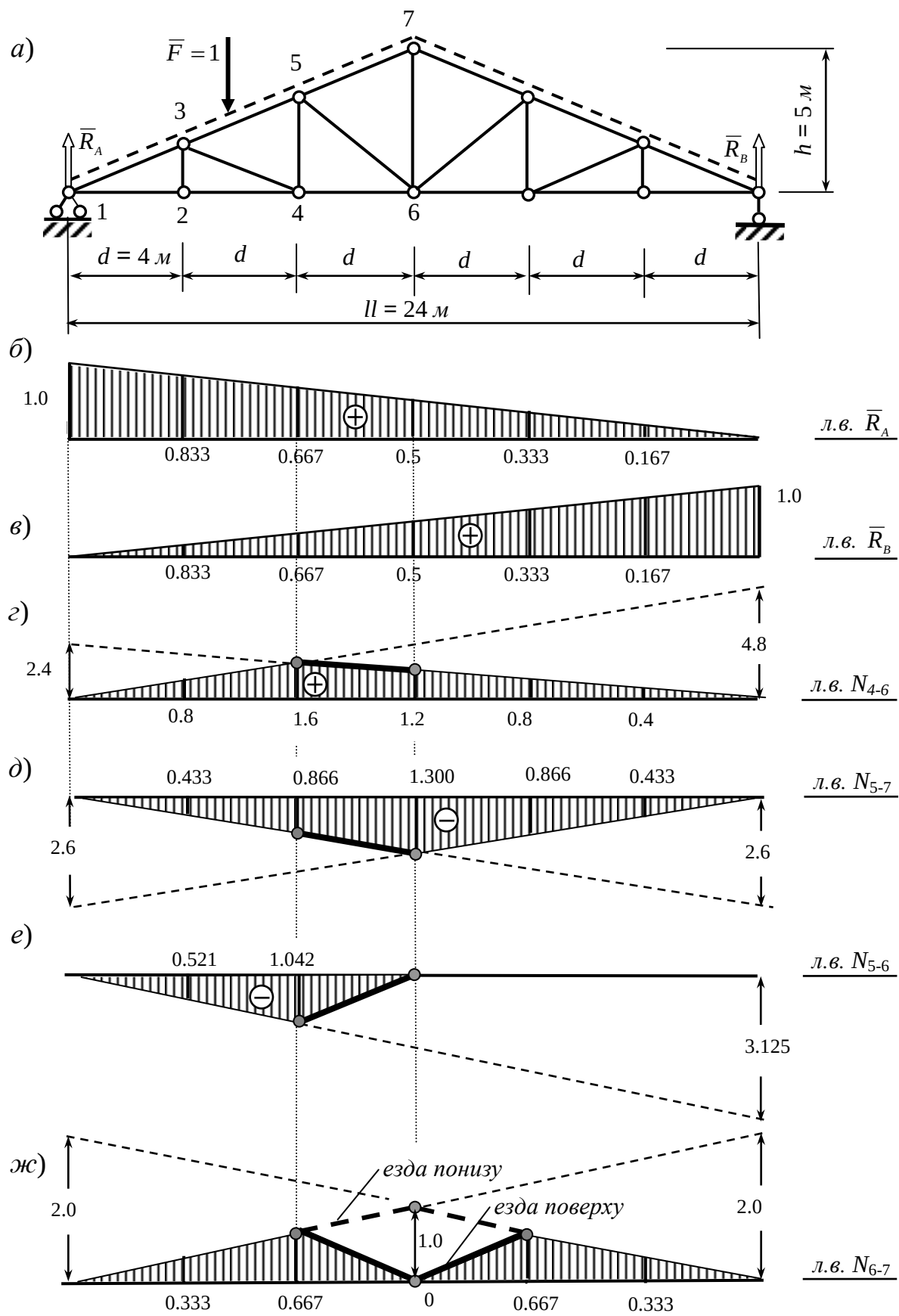


Рис. 3.3. Построение линий влияния усилий в простой ферме

и вытекает из их построения. Эту зависимость будем использовать в дальнейшем для проверки правильности построения линий влияния.

Линия влияния усилия N_{5-6} . Воспользуемся разрезом $n-n$ (рис. 3.2, а). При положении груза $\bar{F}=1$ справа от разреза рассматриваем равновесие левой отсеченной части фермы (рис. 3.2, в) и составляем сумму моментов относительно моментной точки – узла 1:

$$\sum M_1^{лев} = 0; \quad -N_{5-6} \cdot r_{56} = 0.$$

Откуда $N_{5-6} = 0$, то есть при грузе $\bar{F} = 1$, расположенном справа от разреза, усилие N_{5-6} равно нулю. Правая прямая линии влияния в этом случае сливается с осью линии влияния (рис. 3.3, е).

Для построения левой прямой линии влияния рассмотрим условие равновесия правой отсеченной части фермы (рис. 3.2, б):

$$\sum M_1^{прав} = 0, \text{ или } N_{56} \cdot r_{56} + R_B \cdot l = 0.$$

$$\text{Откуда } N_{56} = -(l/r_{56})R_B = -(24/4.62) \cdot R_B = -3.125 \cdot R_B.$$

То есть, усилие N_{5-6} равно опорной реакции R_B , умноженной на (-3.125) .

Для построения графика этой зависимости откладываем на правой опорной вертикали вниз отрезок 3.125 и соединяем его конец с нулевой точкой на левой опорной вертикали. В пределах разрезанной панели соединяем крайние точки левой и правой ветвей передаточной прямой. Построенная таким образом линия влияния N_{5-6} изображена на рис. 3.3, е. Отметим, что вновь правая и левая ветви линии влияния пересеклись под моментной точкой – узлом 1.

Линия влияния усилия N_{6-7} . Вырежем узел 7 (рис. 3.2, е) и спроектируем действующие на этот узел силы на горизонтальную ось:

$$\sum F_x = 0; \quad -N_{5-7} \cos \alpha + N_{7-9} \cos \alpha = 0,$$

$$\text{следовательно, } N_{7-9} = N_{5-7}.$$

Спроектируем те же силы на вертикальную ось:

$$\sum F_y = 0; \quad -N_{6-7} - 2 \cdot N_{5-7} \sin \alpha = 0,$$

$$\text{откуда } N_{6-7} = -2 \cdot N_{5-7} \sin \alpha.$$

Таким образом, линия влияния N_{6-7} может быть получена умножением всех ординат линии влияния N_{5-7} на коэффициент $(-2 \cdot \sin \alpha)$. Линия влияния N_{6-7} имеет вид треугольника (рис. 3.3, ж) с наибольшей ординатой (под узлом 7), равной $1.300 \cdot (2 \cdot 0.3846) = 1.000$.

Если же груз $\bar{F} = 1$ перемещается по верхнему поясу фермы («езда поверху»), то в тот момент, когда он окажется в узле 7, уравнение

$$\sum F_y = 0; \quad \text{примет вид}$$

$$\sum F_y = 0; \quad -P - N_{6-7} - 2 \cdot N_{5-7} \sin \alpha = 0,$$

$$\text{откуда } N_{6-7} = -2 \cdot N_{5-7} \sin \alpha - P = -2 \cdot N_{5-7} \sin \alpha - 1.$$

Следовательно, в этом случае ордината на линии влияния N_{6-7} под узлом 7 меньше на единицу, чем ордината на этой же линии влияния при езде по нижнему поясу, и равна нулю (сплошная линия на рис. 3.3, ж).

3. Вычислим по линиям влияния усилия от заданной постоянной нагрузки – сосредоточенных сил $P = 6 \text{ кН}$. Уравнение (1.1) принимает более простой вид

$$N = \sum_1^n F_i y_i = P \sum y_i ..$$

Тогда

$$N_{4-6} = 6(0.8 + 1.6 + 1.2 + 0.8 + 0.4) = 6 \cdot 4.8 = 28.80 \text{ кН};$$

$$N_{5-7} = 6(0.433 + 0.866 + 1.300 + 0.866 + 0.433) = 6 \cdot 3.898 = 23.39 \text{ кН};$$

$$N_{5-6} = 6(-0.521 - 1.042) = 6(-1.563) = -9.376 \text{ кН};$$

$$N_{6-7} = 6(0.333 + 0.667 + 0 + 0.667 + 0.333) = 6 \cdot 2 = 12.00 \text{ кН}.$$

Найденные с помощью линий влияния усилия в стержнях фермы совпадают с полученными аналитически значениями.

ЗАДАЧА № 3.2. РАСЧЕТ СЛОЖНОЙ СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМОЙ ФЕРМЫ

Задание. Для шпренгельной фермы, показанной на рис. 3.4, а нагруженной в узлах нижнего пояса сосредоточенными силами F , требуется:

- 1) определить (аналитически) усилия в стержнях заданной панели;
- 2) построить линии влияния усилий в тех же стержнях;
- 3) установить наиболее опасное положение временной нагрузки для каждого стержня заданной панели и найти величины максимальных и минимальных усилий.
- 4) определить максимальные и минимальные значения расчетных усилий во всех стержнях заданной панели.

Исходные данные: $h = 5$ м; $d = 6$ м; панель № 4; $F = 20$ кН; $F_{\text{вр}} = 24$ кН.

Порядок расчета

1. Определяем усилия в стержнях фермы..

Расчет начинаем с анализа решетки фермы. Устанавливаем, что в каждой панели простой фермы (рис. 3.4, б) установлены дополнительные маленькие фермы – шпренгели (рис. 3.4, г), опирающихся на узлы нижнего пояса основной фермы (узлы 7 и 9 для четвертой панели).

Поскольку ферма и нагрузка симметричны, то опорные реакции $R_A = R_B = 13 \cdot F / 2 = 13 \cdot 20 / 2 = 130$ кН.

Рассчитывая шпренгельную ферму, различаем стержни следующих категорий:

- 1 категория – стержни основной фермы: 6–8, 6–7, 8–9, и 6– m ;
- 2 категория – стержни шпренгеля не сливающиеся со стержнями основной фермы – стержни n – m и m –7;
- 3 категория – стержни заданной фермы, в которых слиты элемент основной фермы и элемент шпренгеля – стержни 7– n , n –9 и m –9

Для определения усилий в стержнях 1-ой категории удаляем из заданной фермы шпренгели, а нагрузку, приложенную к ним, передаем в узлы основной фермы (рис. 3.4, б).

Усилие N_{6-8} (верхний пояс фермы, стержень 1-ой категории). Используем метод сечений в форме способа моментной точки. Разрезаем основную ферму сечением II–II, отбрасываем левую часть и рассматриваем равновесие правой части фермы (рис. 3.4, е). Направление усилий в перерезанных стержнях принимаем положительными, т. е. растягивающими. Моментной точкой является узел 9, в котором пересекаются линии действия усилий в двух других стержнях, попавших в разрез (стержни 6–9 и 7–9).

$$\sum M_9 = 0; \quad N_{6-8} \cdot h + R_B \cdot d - 2F \cdot d - 1.5F \cdot 2d = 0. \text{ Откуда}$$

$$N_{6-8} = (-R_B + 2 \cdot F \cdot 1 + 3 \cdot F) \cdot d / h = (-130 + 2 \cdot 20 + 3 \cdot 20) \cdot 6 / 5 = -36.0 \text{ кН.}$$

Усилие N_{6-m} (раскос основной фермы N_{6-9} , стержень 1-ой категории). Разрезаем основную ферму сечением $II-II$, отбрасываем левую часть и рассматриваем равновесие правой части фермы (рис. 3.4, *е*). Два других стержня, попавшие в разрез (стержни 6–8 и 7–9) параллельны, поэтому используем метод сечений в форме способа проекций:

$$\sum F_y = 0; \quad +N_{6-9} \cdot \sin \beta + R_B - 2 \cdot F - 2 \cdot F - 1.5 \cdot F = 0.$$

Находим $\operatorname{tg} \beta = h/d = 5/6 = 0.8333$, $\beta = \arctg(0.8333) = 39.81^\circ$, $\sin \beta = 0.640$,

$$N_{6-9} = N_{6-m} = (-R_B + 5.5 \cdot F) / \sin \beta = (-130 + 5.5 \cdot 20) / 0.640 = -31.24 \text{ кН}.$$

Усилие N_{8-9} (стойка основной фермы, стержень 1-ой категории). Сечением $III-III$ вырезаем узел 8 из основной фермы (рис. 3.4, *ж*) и проектируем все силы, сходящиеся в узле на вертикальную ось:

$\sum F_y = 0$; $N_{8-9} = 0$, т. е. при заданной нагрузке стержень 8–9 нулевой. Это не значит, что он не нужен, поскольку при действии на ферму другой нагрузки, приложенной в узле 8, усилие в этом стержне уже не будет равно нулю.

Усилие N_{7-6} (стойка основной фермы, стержень 1-ой категории). Сечением $IV-IV$ вырезаем узел 7 из основной фермы (рис. 3.4, *и*) и проектируем все силы, сходящиеся в узле на вертикальную ось:

$$\sum F_y = 0; \quad N_{7-6} - 2 \cdot F = 0, \text{ откуда } N_{7-6} = 2 \cdot F = 2 \cdot 20 = 40 \text{ кН}.$$

Усилие N_{m-n} (стойка шпренгеля, стержень 2-ой категории). Сечением $V-V$ (рис. 3.4, *з*) вырезаем узел n из шпренгеля (рис. 3.4, *в*) и проектируем все силы, сходящиеся в узле на вертикальную ось:

$$\sum F_y = 0; \quad N_{m-n} - F = 0, \text{ откуда } N_{m-n} = F = 20 \text{ кН}.$$

Усилие N_{7-m} (верхний пояс шпренгеля, стержень 2-ой категории). Сечением $VI-VI$ (рис. 3.4, *з*) вырезаем опорный узел 7 шпренгеля (рис. 3.4, *д*) и проектируем все силы, сходящиеся в узле на вертикальную ось:

$$\sum Y = 0; \quad N_{7-m} \sin \beta + F/2 = 0,$$

$$\text{откуда } N_{m-n} = -F / (2 \cdot \sin \beta) = -20 / 2 \cdot 0.640 = -15.62 \text{ кН}.$$

Усилие N_{9-m} (раскос основной фермы N_{6-9} , слившийся со стержнем $m-9$ шпренгеля – стержень 3-ей категории). Разрезаем заданную ферму сечением $I-I$ (рис. 3.4, *а*), отбрасываем левую часть и рассматриваем равновесие правой части фермы (рис. 3.4, *з*). Два других стержня, попавшие в разрез (стержни 6–8 и 9– n) параллельны, поэтому используем метод сечений в форме способа проекций:

$$\sum F_y = 0; \quad +N_{9-m} \cdot \sin \beta + R_B - 5 \cdot F = 0,$$

$$\text{откуда } N_{9-m} = (-R_B + 5 \cdot F) / \sin \beta = (-130 + 5 \cdot 20) / 0.640 = -46.86 \text{ кН}.$$

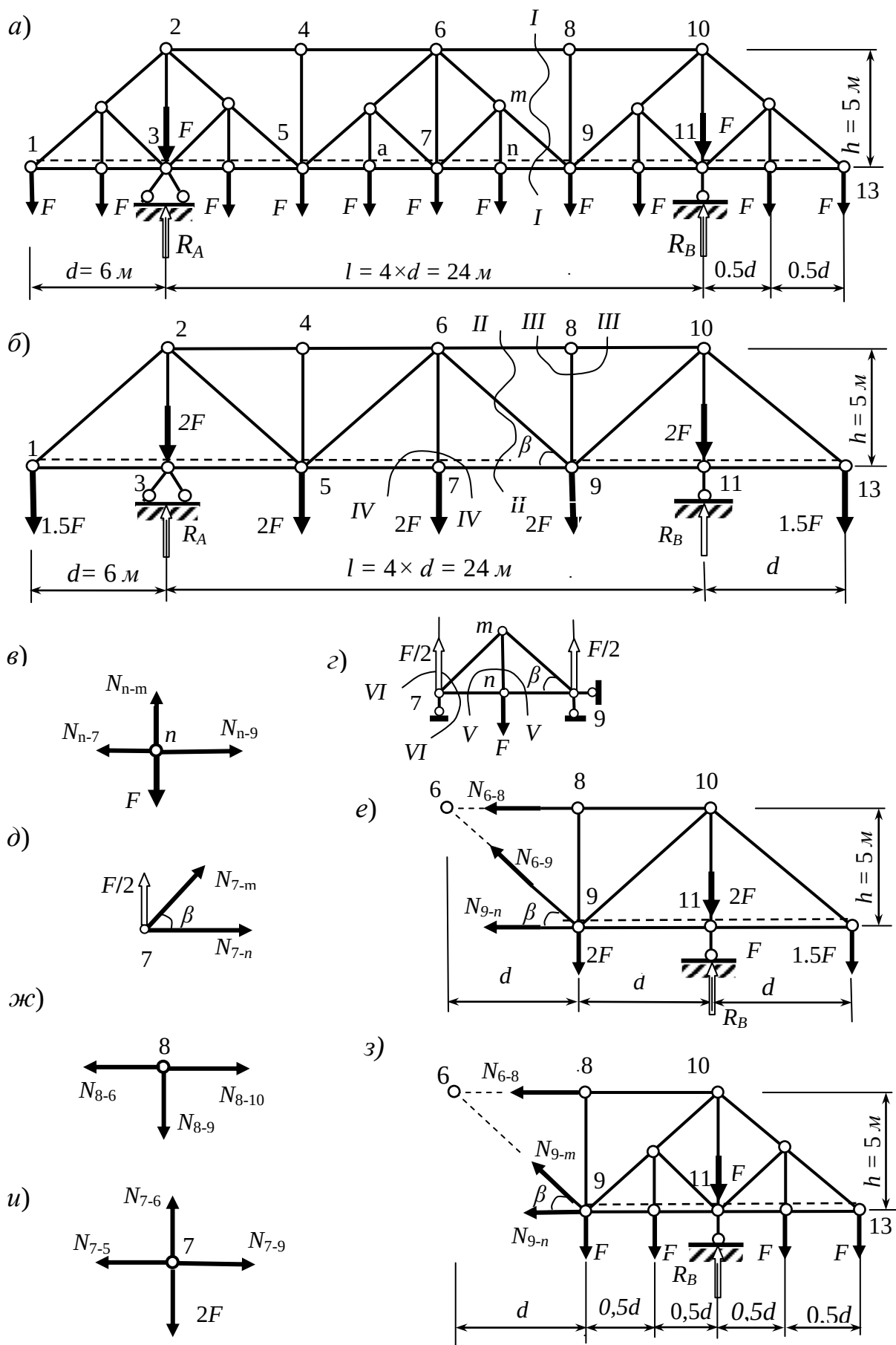


Рис. 3.4. Определение усилий в стержнях шпренгельной фермы

Усилие N_{n-9} (стержень нижнего пояса основной фермы и нижнего пояса шпренгеля – стержень 3-ой категории). Разрезаем основную ферму сечением $I-I$ (рис. 3.4, а) и видим, что в сечение попало только 3 стержня. Следовательно, усилие в этом элементе можно найти, не суммируя усилия в основной ферме и шпренгеле.

Используем метод сечений в форме способа моментной точки. Отбрасываем левую часть и рассматриваем равновесие правой части заданной фермы (рис. 3.4, з). Моментной точкой является узел 6, в котором пересекаются два других стержня, попавшие в разрез (стержни 6–8 и 9– m):

$$\sum M_6 = 0; \quad -N_{n-9} \cdot h + R_B \cdot 2d - d \cdot F - F \cdot 1.5d - F \cdot 2d - F \cdot 2.5d - F \cdot 3d = 0,$$
откуда $N_{n-9} = (+2 \cdot R_B - F \cdot 10) \cdot d / h = (+2 \cdot 130 - 20 \cdot 10) \cdot 6 / 5 = +72.0 \text{ кН}$.

Усилие N_{7-n} Вырежем узел n (рис. 3.4, з, сечение $V-V$) и рассмотрим его равновесие (рис. 3.4, в):

$$\sum F_x = 0; \quad N_{n-9} - N_{n-7} = 0; \quad N_{7-n} = N_{n-9} = 72 \text{ кН}.$$

2. Строим линии влияния усилий в стержнях фермы.

Для стержней **первой категории** нужно отбросить шпренгельные устройства и строить линии влияния усилий без их учета, т. е. для основной фермы с простой решеткой (рис. 3.5, а).

Линия влияния усилия N_{6-8} (верхний пояс). Расположим груз $\bar{F} = 1$ справа от сечения $I-I$ (рис. 3.5, а); отбросим правую часть и заменим ее действие усилиями в стержнях (рис. 3.5, б); составим уравнение равновесия для левой части фермы:

$$\sum M_9^{ЛЕВ} = -N_{6-8} \cdot h - R_A \cdot 3d = 0$$

и получим уравнение для правой ветви линии влияния:

$$N_{6-8} = -(3d/h) \cdot R_A = -(3 \cdot 6/5) \cdot R_A = -3.6 \cdot R_A.$$

Затем расположим груз слева от сечения и составим уравнение равновесия для правой части фермы; отбросив левую часть и заменив ее действие усилиями в стержнях (рис. 3.5, в), получим уравнение для левой ветви линии влияния:

$$\sum M_9^{ПРАВ} = N_{6-8} \cdot h + R_B \cdot d = 0; \quad N_{6-8} = -(d/h) \cdot R_B = -(6/5) \cdot R_B = -1.2 \cdot R_B.$$

Имея аналитические выражения, построим линию влияния N_{6-8} .

Левая ветвь действительна слева от рассекаемой панели 7–9, т. е. левее узла 7, правая – правее узла 9. Ординаты под узлом 7 и 9 соединяем прямой (передаточные прямые на рисунках показаны жирными линиями). В данном случае, эта прямая совпадает с левой ветвью линии влияния. Заметим, что левая и правая ветви пересеклись под моментной точкой – узлом 9 (рис. 3.5, з).

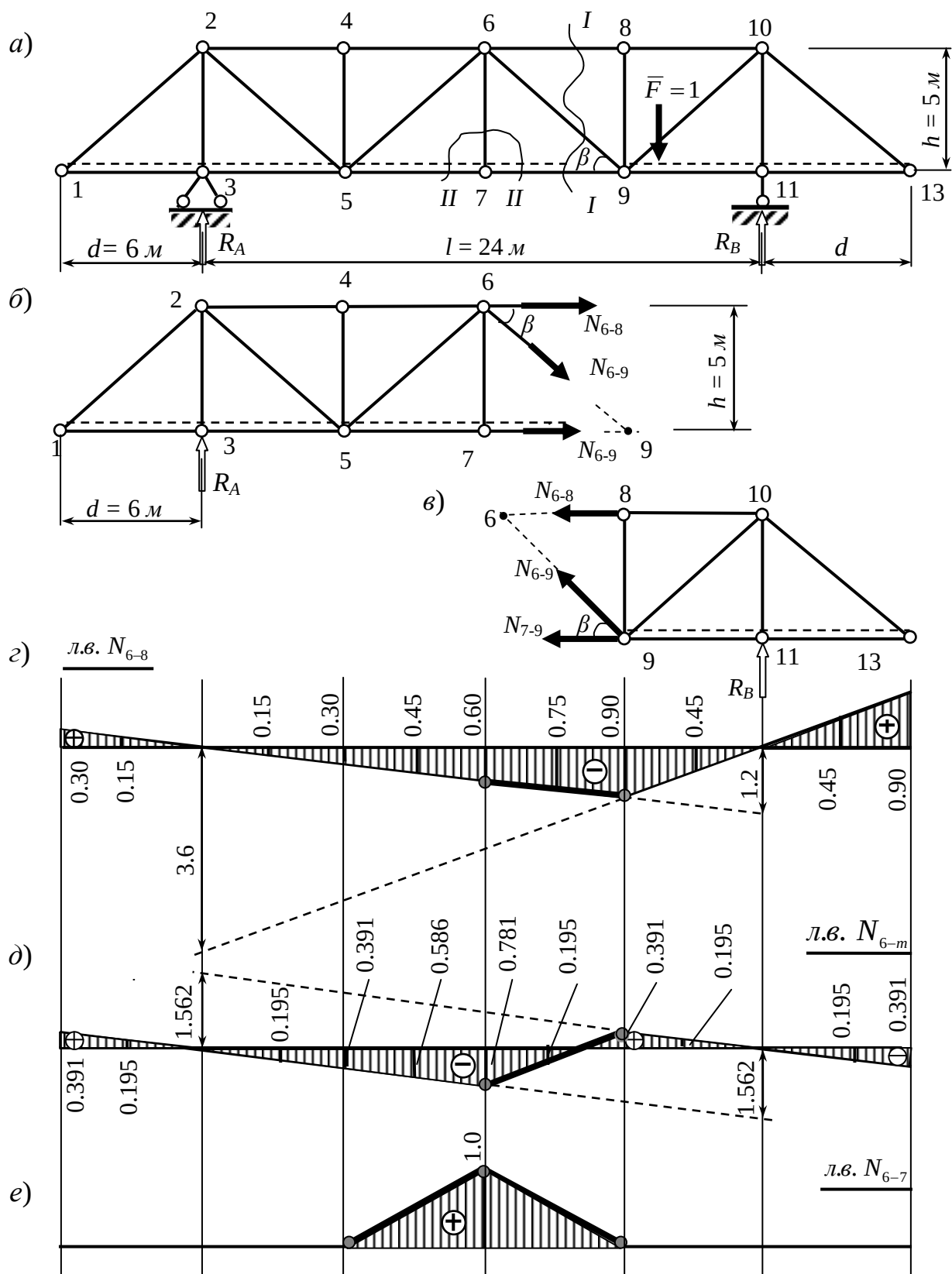


Рис. 3.5. Построение линий влияния в стержнях 1-й категории

Линия влияния усилия N_{6-m} (усилия N_{6-9} в раскосе 6-9 основной фермы). Расположим груз $\bar{F}=1$ справа от сечения I–I (рис. 3.5, а), составим уравнение равновесия для правой части фермы N_{6-m} :

$$\sum F_y^{ЛЕВ} = -N_{6-m} \cdot \sin \beta + R_A = 0; \quad N_{6-m} = (1/\sin \beta) \cdot R_A = (1/0.640) \cdot R_A = 1.562 \cdot R_A;$$

Затем расположим груз слева от сечения I–I и составим уравнение равновесия для правой части фермы; отбросив левую часть и заменив ее действие усилиями в стержнях (рис. 3.5, в), получим уравнение для левой ветви линии влияния:

$$\sum F_y^{ПРАВ} = +N_{6-m} \cdot \sin \beta + R_B = 0; \quad N_{6-m} = -(1/\sin \beta) \cdot R_B = -(1/0.640) \cdot R_B = -1.562 \cdot R_B.$$

Имея аналитические выражения, построим линию влияния N_{6-m} .

Левая ветвь действительна слева от рассекаемой панели 7–9, т.е. левее узла 7, правая – правее узла 9. Ординаты под узлом 7 и 9 соединяем передаточной прямой (рис. 3.5, д).

Заметим, что левая и правая ветви параллельны, поскольку параллельны стержни 6–8 и 7–9, попавшие в разрез. Это позволяет считать, что левая и правая ветви пересеклись под моментной точкой расположенной бесконечно далеко.

Линия влияния усилия N_{6-7} (стойка). Сечением II–II вырезаем узел 7 (рис. 3.5, а) и составляем уравнение $\sum F_y = 0$. При этом рассматриваем два возможных случая: 1) груз $\bar{F}=1$ за пределами разрезанных панелей 5–7 и 7–9, тогда $N_{6-7}=0$; 2) груз $\bar{F}=1$ в узле 7, тогда $N_{6-7}=1$. В пределах рассеченных панелей 5–7 и 7–9 проводим передаточные прямые (рис. 3.5, з).

Линия влияния усилия N_{8-9} (стойка). Вырезаем узел 8 верхнего пояса (рис. 3.5, а) и составляем уравнение $\sum F_y = N_{8-9} = 0$. Поскольку грузовым является нижний пояс, то всегда $N_{8-9} = 0$.

При построении линий влияния усилий в стержнях **второй категории** следует иметь в виду, что усилия в таких стержнях возникают только тогда, когда груз $\bar{F}=1$ находится в пределах той панели, где расположен данный шпренгель. Поэтому шпренгель можно рассматривать как самостоятельную двухопорную ферму. Усилия в ее стержнях могут быть найдены способом вырезания узлов.

Линия влияния усилия N_{m-n} (стойка шпренгеля). Выделяем из состава всей фермы шпренгель 7– m –9– n (рис. 3.6, в). При грузе $\bar{F}=1$ расположенном в узле n , усилие в стержне m – n определяю из уравнения равновесия узла n (рис. 3.6, б): $\sum F_y = N_{m-n} - 1 = 0$; откуда $N_{m-n} = 1$. При грузе, расположенном в опорных узлах, усилие $N_{m-n} = 0$. Полученных значений достаточно для построения линии влияния N_{m-n} (рис. 3.6, д).

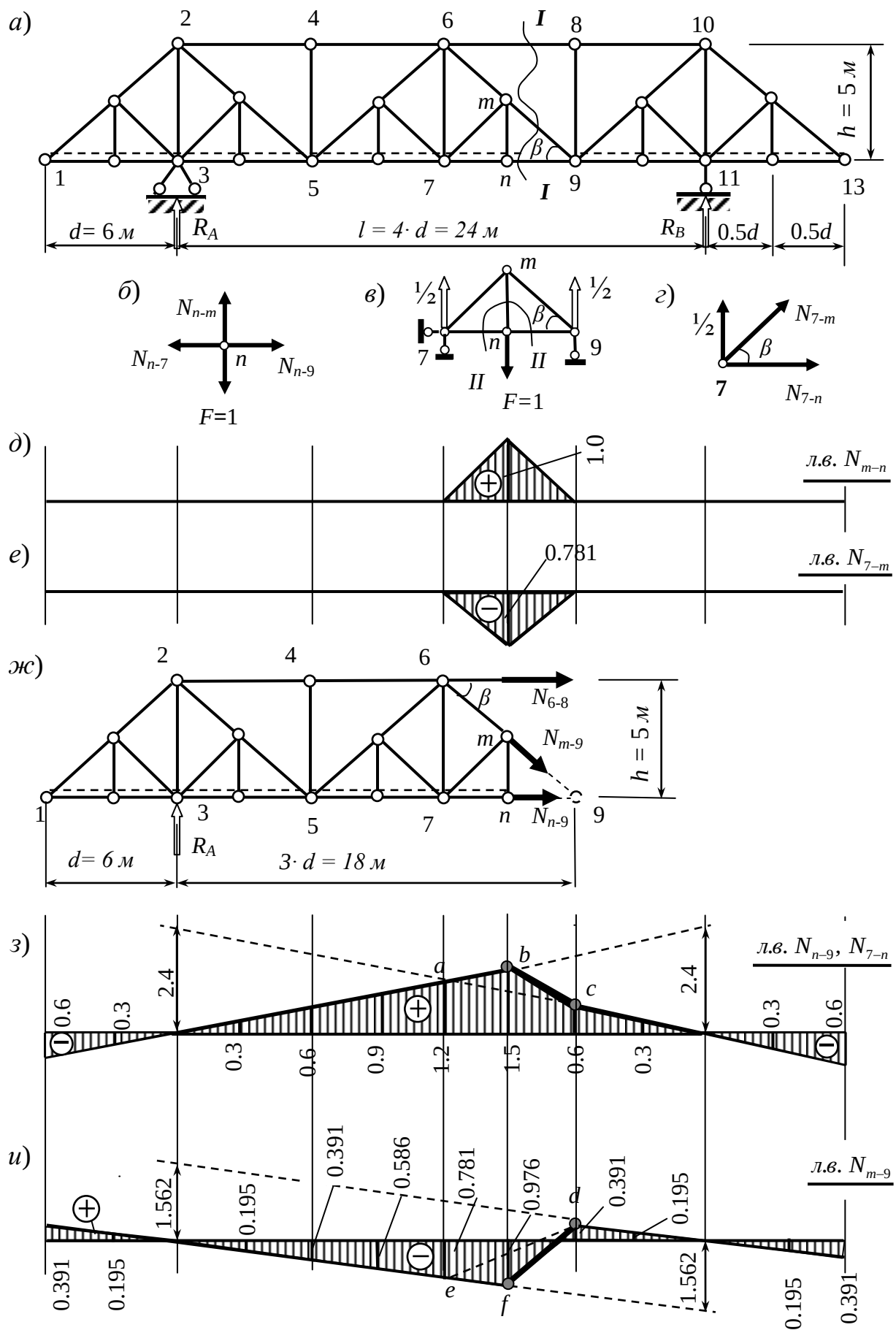


Рис. 3.6. Построение линий влияния усилий в стержнях 2-й и 3-й категорий

Линия влияния усилия N_{7-m} (верхний пояс шпренгеля). Рассматриваем шпренгель 7–m–9–n (рис. 3.6, в). При грузе $\bar{F}=1$ расположенном в узле n, усилие N_{7-m} определяем из уравнения равновесия узла 7 (рис. 3.6, з):

$$\sum F_y = N_{7-m} \cdot \sin \beta + 1/2 = 0; \text{ откуда } N_{7-m} = -1/(2 \cdot \sin \beta) = -1/(2 \cdot 0.640) = 0.781.$$

При грузе, расположенном в опорных узлах, усилие $N_{7-m} = 0$.

Полученных значений достаточно для построения линии влияния N_{7-m} (рис. 3.6, е).

Линии влияния в стержнях **третьей категории** можно построить двумя способами:

1) сложением линии влияния стержня в основной ферме и линии влияния того же стержня в шпренгеле;

2) обычным способом сечений, влияние шпренгельных устройств учитывается в этом случае автоматически вследствие изменения границ разрезанной панели.

Второй способ предпочтительнее, но им можно воспользоваться лишь в том случае, если в проведенное сечение попадают не более трех стержней шпренгельной фермы (шпренгельная ферма не расчленяется на основную и шпренгели)

Линия влияния усилия N_{n-9} (нижний пояс основной фермы, слившийся с нижним поясом шпренгеля). Сделаем разрез I – I (рис. 3.6, а), и, предполагая, что груз $\bar{F}=1$ находится справа на участке между узлами 9–13, рассмотрим равновесие левой части фермы (рис. 3.6, ж):

$$\sum M_6^{ЛЕВ} = N_{n-9} \cdot h - R_A \cdot 2d = 0; \quad N_{n-9} = (2d/h) \cdot R_A = (2 \cdot 6/5) \cdot R_A = 2.4 \cdot R_A;$$

Полученное выражение показывает, что пока груз находится на указанном участке, линия влияния N_{n-9} может быть получена из линии влияния R_A умножением ее ординат на 2,4. Это позволяет легко построить правую ветвь линии влияния N_{n-9} (рис. 3.6, з).

Левую прямую строим, используя положение о том, что она должна пройти через нулевую точку левой опоры и пересечься с правой прямой под моментной точкой – узлом 6. Передаточную прямую проводим, соединяя ординаты под узлами n и 9. Интересно отметить, что при отсутствии шпренгелей передаточная прямая соединила бы ординаты под узлами 7 и 9, в результате чего исчез бы треугольник abc, являющийся линией влияния усилия в стержне n–9 шпренгеля (рис. 3.6, в).

Линия влияния усилия N_{m-9} . (Раскос основной фермы, слившийся с верхним поясом шпренгеля). Предполагая, что груз $\bar{F}=1$ находится справа от сечений I – I (рис. 3.6, а) на участке между узлами 9–13, рассмотрим равновесие левой части фермы (рис. 3.6, ж):

$$\sum Y = -N_{m-9} \cdot \sin \beta + R_A = 0; \quad N_{m-9} = (1/\sin \beta) \cdot R_A = (1/0.640) \cdot R_A = 1.562 \cdot R_A;$$

Полученное выражение показывает, что пока груз находится на указанном участке, линия влияния N_{m-9} может быть получена из линии влияния R_A умножением ее ординат на 1.562. Это позволяет легко построить правую ветвь линии влияния N_{m-9} (рис. 3.6, и).

Левую прямую строим, используя положение о том, что она должна пройти через нулевую точку левой опоры и пересечься с правой прямой под моментной точкой, находящейся в данном случае в бесконечности. То есть левая ветвь параллельна правой ветви. Передаточную прямую проводим, соединяя ординаты под узлами n и 9 .

3. *Определение наиболее опасного положения временной нагрузки для каждого стержня и величины максимальных и минимальных усилий.*

Временной нагрузкой для заданной фермы являются силы $F_{ep} = 24 \text{ кН}$, которые могут быть приложены в любом узле грузового пояса фермы.

Опасным называется такое положение временной нагрузки, при котором усилие в рассматриваемом стержне достигает наибольшей величины. Для каждого стержня будем определять два значения усилия от временной нагрузки: наибольшее растягивающее усилие N_{i-j}^+ и наибольшее сжимающее усилие N_{i-j}^- . Первое возникнет в тот момент, когда временная нагрузка расположится над положительными участками линии влияния стержня, второе – над отрицательными:

$$N_{i-j}^+ = F_{ep} \cdot \sum y_{i-j}^+, \quad N_{i-j}^- = F_{ep} \cdot \sum y_{i-j}^-.$$

Здесь $\sum y_{i-j}^+$ и $\sum y_{i-j}^-$ соответственно, сумма положительных и отрицательных ординат линии влияния усилия в стержне $i-j$.

Стержень N_{6-8} , (рис. 3.5, z):

$$N_{6-8}^+ = 24 \cdot (0.30 + 0.15 + 0.45 + 0.90) = +43.2 \text{ кН};$$

$$N_{6-8}^- = 24 \cdot (-0.15 - 0.30 - 0.45 - 0.60 - 0.75 - 0.90 - 0.45) = -86.4 \text{ кН}.$$

Стержень N_{6-9} , (рис. 3.5, $д$):

$$N_{6-9}^+ = 24 \cdot (0.391 + 0.195 + 0.391 + 0.195) = +28.1 \text{ кН};$$

$$N_{6-9}^- = 24 \cdot (-0.195 - 0.391 - 0.586 - 0.781 - 0.195 - 0.195 - 0.395) = -65.7 \text{ кН}.$$

Стержень N_{6-7} (рис. 3.5, $е$):

$$N_{6-7}^+ = 24 \cdot (+1.00) = +24.0 \text{ кН}; \quad N_{6-7}^- = 24 \cdot 0 = 0.$$

Стержень N_{m-n} (рис. 3.6, $д$):

$$N_{m-n}^+ = 24 \cdot (+1.00) = +24.0 \text{ кН}; \quad N_{m-n}^- = 24 \cdot 0 = 0.$$

Стержень N_{7-m} (рис. 3.6, $е$):

$$N_{7-m}^+ = 24 \cdot 0 = 0; \quad N_{7-m}^- = 24 \cdot (-0.781) = -18.8 \text{ кН}.$$

Стержень N_{n-9} (рис. 3.6, $з$):

$$N_{n-9}^+ = 24 \cdot (0.3 + 0.6 + 0.9 + 1.2 + 1.5 + 0.6 + 0.3) = +129.6 \text{ кН};$$

$$N_{n-9}^- = 24 \cdot (-0.6 - 0.3 - 0.3 - 0.6) = -43.2 \text{ кН}.$$

Стержень N_{m-9} (рис. 3.6, $и$):

$$N_{m-9}^+ = 24 \cdot (0.391 + 0.195 + 0.391 + 0.195) = +28.1 \text{ кН};$$

$$N_{m-9}^- = 24 \cdot (-0.195 - 0.391 - 0.586 - 0.781 - 0.976 - 0.195 - 0.391) = -84.4 \text{ кН}.$$

4. *Определяем максимальные и минимальные значения расчетных*

усилий. Поскольку кроме постоянной нагрузки имеется временная, которая может действовать, а может быть снята с тех или иных узлов фермы, то необходимо находить такое сочетание постоянной и временной нагрузок, которое вызывает в стержнях наибольшие и наименьшие значения продольных сил. Вычисление расчетных усилий $N_{MAX} = N_{ПОСТ} + N_{БР}^+$; и $N_{MIN} = N_{ПОСТ} + N_{БР}^-$, приведено в табл. 3.1.

Таблица 3.1

Расчетные усилия в стержнях 4-й панели шпренгельной фермы					
Номер стержня	Усилие в стержне, кН				
	От постоянной нагрузки $N_{ПОСТ}$,	От временной нагрузки		Расчетные усилия	
		$N_{БР}^+$	$N_{БР}^-$	N_{MAX}	N_{MIN}
6–8	–36.0	43.2	–86.4	+7.2	–122.4
6– <i>m</i>	–31.24	28.1	–65.7	–3.14	–96.94
6–7	+40.0	24.0	0	+64.0	+40.0
<i>m</i> – <i>n</i>	+20.0	24.0	0	+44.0	+20.0
7– <i>m</i>	–15.6	0	–18.8	–15.6	–34.4
<i>n</i> –9	+72.0	129.6	–43.2	+201.6	+28.8
<i>m</i> –9	–48.8	28.1	–84.4	–20.7	–133.2

Линии влияния в стержнях **третьей категории** можно построить двумя способами:

1) сложением линии влияния стержня в основной ферме и линии влияния того же стержня в шпренгеле;

2) обычным способом сечений, влияние шпренгельных устройств учитывается в этом случае автоматически вследствие изменения границ разрезанной панели.

Второй способ предпочтительнее, но им можно воспользоваться лишь в том случае, если в проведенное сечение попадают не более трех стержней шпренгельной фермы (шпренгельная ферма не расчленяется на основную и шпренгели)

Линия влияния усилия N_{n-9} (нижний пояс основной фермы, слившийся с нижним поясом шпренгеля). Сделаем разрез *I – I* (рис. 3,6, а), и, предполагая, что груз $\bar{F}=1$ находится справа на участке между узлами 9-13, рассмотрим равновесие левой части фермы (рис. 3,6, ж):

$$\sum M_6^{ЛЕВ} = N_{n-9} \cdot h - R_A \cdot 2d = 0; \quad N_{n-9} = (2d / h) \cdot R_A = (2 \cdot 6 / 5) \cdot R_A = 2.4 \cdot R_A;$$

Полученное выражение показывает, что пока груз находится на указанном участке, линия влияния N_{n-9} может быть получена из линии влияния R_A умножением ее ординат на 2,4. Это позволяет легко построить правую ветвь линии влияния N_{n-9} (рис 3.6, з).

Левую прямую строим, используя положение о том, что она должна пройти через нулевую точку левой опоры и пересечься с правой прямой под моментной точкой – узлом 6. Передаточную прямую проводим,

соединяя ординаты под узлами n и 9. Интересно отметить, что при отсутствии шпренгелей передаточная прямая соединила бы ординаты под узлами 7 и 9, в результате чего исчез бы треугольник abc , являющийся линией влияния усилия в стержне n -9 шпренгеля (рис. 3.6, в).

Линия влияния усилия N_{m-9} . (Раскос основной фермы, слившийся с верхним поясом шпренгеля). Предполагая, что груз $\bar{F}=1$ находится справа от сечений $I - I$ (рис. 3.6, а) на участке между узлами 9-13, рассмотрим равновесие левой части фермы (рис. 3.6, ж):

$$\sum Y = -N_{m-9} \cdot \sin \beta + R_A = 0; \quad N_{m-9} = (1/\sin \beta) \cdot R_A = (1/0.640) \cdot R_A = 1.562 \cdot R_A;$$

Полученное выражение показывает, что пока груз находится на указанном участке, линия влияния N_{m-9} может быть получена из линии влияния R_A умножением ее ординат на 1.562. Это позволяет легко построить правую ветвь линии влияния N_{m-9} (рис. 3.6, и).

Левую прямую строим, используя положение о том, что она должна пройти через нулевую точку левой опоры и пересечься с правой прямой под моментной точкой, находящейся в данном случае в бесконечности. То есть левая ветвь параллельна правой ветви. Передаточную прямую проводим, соединяя ординаты под узлами n и 9.

ЗАДАЧА № 4. РАСЧЕТ ПЛОСКОЙ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМОЙ РАМЫ

Задание. Для заданной рамы требуется:

- 1) выполнить расчет рамы с использованием метода сил, построить эпюры изгибающих моментов, поперечных и продольных сил;
- 2) выполнить расчет рамы с использованием метода перемещений, построить эпюру изгибающих моментов и сравнить с результатами предыдущего расчета.

Перед расчетом статически неопределимой рамы необходимо уяснить алгоритмы методов сил и перемещений.

Алгоритм метода сил

1. *Кинематический анализ, определение степени статической неопределимости n .*

Степень статической неопределимости n (число лишних связей) определяется по формуле

$$n = 2Ш + C_o - 3Д, \quad (4.1)$$

где $Д$ – число дисков, $Ш$ – число шарниров, соединяющих между собой выделенные диски, C_o – число опорных связей.

При кинематическом анализе заданной статически неопределимой системы можно выделить необходимые связи и «лишние» связи. Необходимые связи – связи, отбрасывание которых приводит к геометрической или мгновенной изменяемости основной системы. Лишние связи – связи, отбрасывание которых не приводит к геометрической или мгновенной изменяемости системы.

2. *Выбор основной системы.*

Основная система получается из заданной путем отбрасывания лишних связей. Действие отброшенных связей заменяется неизвестными усилиями. Основная система должна быть: 1) статически определимой и 2) геометрически неизменяемой.

Количество возможных основных систем неограниченно. Для простых задач выбор той или иной основной системы диктуется, как правило, простотой построения в них единичных и грузовой эпюр, что приводит к уменьшению трудоемкости расчета. При образовании основной системы могут быть использованы следующие приемы (показаны на примере системы, изображенной на рис. 4.1, *а*):

- устранение опорных связей – рис. 4.1, *б*;
- введение шарниров – рис. 4.1, *в*;
- рассечение элементов – рис. 4.1, *г*;
- сочетание приемов – рис. 4.1, *д*;

На рис. 4.1, *е, ж* показаны примеры неудачного выбора основной системы.

Для симметричных рам (рис. 4.1, а) эффективна группировка неизвестных (рис. 4.1, з, и), приводящая к заметному сокращению количества счета.

3. Формирование системы канонических уравнений метода сил:

Система канонических уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} \delta_{11}x_1 + \delta_{12}x_2 + \dots + \delta_{1n}x_n + \Delta_{1F} = 0; \\ \delta_{21}x_1 + \delta_{22}x_2 + \dots + \delta_{2n}x_n + \Delta_{2F} = 0; \\ \vdots \\ \delta_{n1}x_1 + \delta_{n2}x_2 + \dots + \delta_{nn}x_n + \Delta_{nF} = 0. \end{cases}$$

Здесь: δ_{ij} ($i, j = 1, 2, \dots, n$) — перемещение в основной системе по направлению сил x_i от сил $\bar{x}_j = 1$; $\delta_{ij}x_j$ — перемещение в основной системе по направлению сил x_i от действительного значения силы x_j ; Δ_{iF} — перемещение в основной системе по направлению сил x_i от заданной нагрузки.

Канонические уравнения представляют собой условия эквивалентности основной и заданной систем: перемещения в основной системе по направлению отброшенных связей должны быть равны нулю.

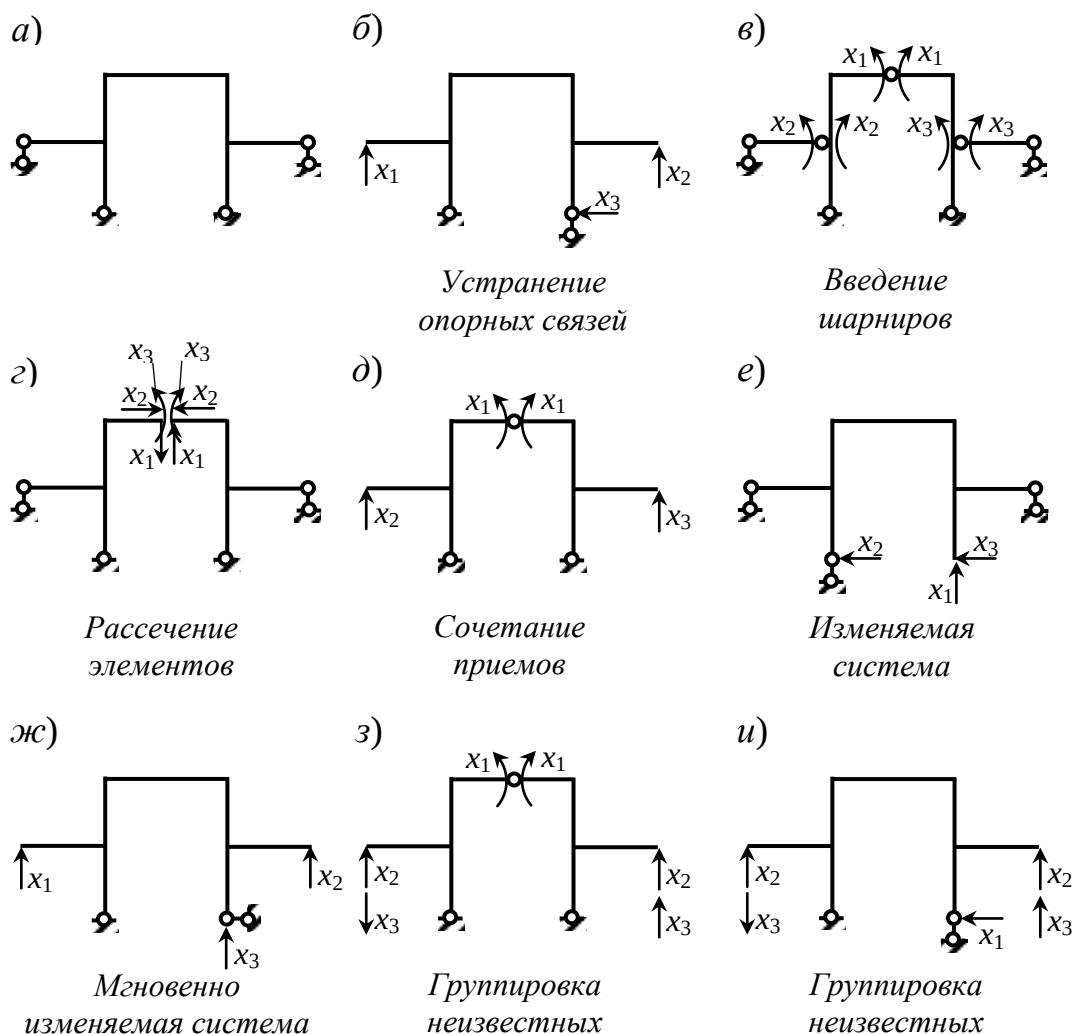


Рис. 4.1. К выбору основной системы

3.1. Построение единичных эпюр моментов $\bar{M}_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$);

Единичные эпюры $\bar{M}_i$ строятся в основной системе от соответствующей силы $\bar{x}_i = 1$. Для отыскания возможных ошибок при построении единичных эпюр следует построить суммарную единичную эпюру $\bar{M}_s$ от сил $\bar{x}_i = 1$ ($i = 1, 2, \dots, n$), действующих одновременно. Если построенная таким образом эпюра $\bar{M}_s$ окажется равной сумме единичных эпюр $\bar{M}_s = \sum_{i=1}^n \bar{M}_i$, то можно переходить к выполнению следующего пункта алгоритма.

3.2. Определение коэффициентов системы канонических уравнений δ_{ij} ;

Коэффициенты δ_{ij} канонических уравнений подсчитываются по формуле Максвелла-Мора $\delta_{ij} = \sum_{k=1}^K \int_0^{l_k} \frac{\bar{M}_i \bar{M}_j}{EI_k} dz$. Условно эта операция интегрирования обозначается $\bar{M}_i \times \bar{M}_j$ и называется «перемножение эпюр». Для вычислений удобно воспользоваться правилом Симпсона (рис. 4.2, а)

$$\delta_{ij} = \bar{M}_i \times \bar{M}_j = \sum_{k=1}^K \frac{l_k}{6EI_k} (\bar{M}_i^H \cdot \bar{M}_j^H + 4 \cdot \bar{M}_i^c \cdot \bar{M}_j^c + \bar{M}_i^K \cdot \bar{M}_j^K), \quad (4.2)$$

где l_k, EI_k — длина и жесткость участка k , K — количество участков. Перемножаемые эпюры в пределах участков не должны иметь разрывов и изломов. Напомним, что произведение значений моментов положительно, если соответствующие ординаты отложены по одну сторону от оси участка, и отрицательно, если соответствующие ординаты отложены по разные стороны от оси участка.

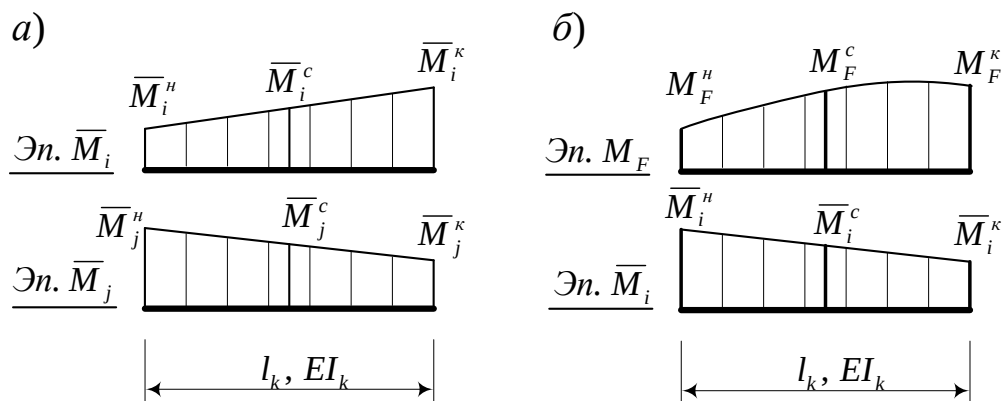


Рис. 4.2. К правилу Симпсона вычисления интеграла Мора

3.3. Проверка коэффициентов канонических уравнений;

Проверка правильности вычисления коэффициентов δ_{ij} ($i, j = 1, 2, \dots, n$) заключается в проверке выполнения условия $\bar{M}_s \times \bar{M}_s = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \delta_{ij}$ или

$$\left| \overline{M}_S \times \overline{M}_S - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \delta_{ij} \right| / \min \left(\left| \overline{M}_S \times \overline{M}_S \right|, \left| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \delta_{ij} \right| \right) \cdot 100 \leq 1\%.$$

Если проверка выполняется, то можно переходить к выполнению следующего пункта алгоритма.

3.4. Построение грузовой эпюры изгибающих моментов M_F ;

Грузовая эпюра моментов $\overline{M}_F$ строится в основной системе от заданной нагрузки.

3.5. Определение свободных членов канонических уравнений Δ_{iF} ;

Свободные члены подсчитываются по формуле Максвелла-Мора $\Delta_{iF} = \sum_{k=1}^K \int_0^{l_k} \frac{\overline{M}_i \overline{M}_F}{EI_k} dz$ с использованием правила Симпсона (рис. 4.2, б):

$$\Delta_{iF} = \overline{M}_i \times M_F = \sum_{k=1}^K \frac{l_k}{6EI_k} (\overline{M}_i'' \cdot M_F'' + 4 \cdot \overline{M}_i^c \cdot M_F^c + \overline{M}_i^\kappa \cdot M_F^\kappa). \quad (4.3)$$

3.6. Проверка свободных членов канонических уравнений;

Проверка правильности вычисления Δ_{iF} ($i = 1, 2, \dots, n$) заключается в проверке выполнения условия $\overline{M}_S \times M_F = \sum_{i=1}^n \Delta_{iF}$ или

$$\left| \overline{M}_S \times M_F - \sum_{i=1}^n \Delta_{iF} \right| / \min \left(\left| \overline{M}_S \times M_F \right|, \left| \sum_{i=1}^n \Delta_{iF} \right| \right) \cdot 100 \leq 1\%.$$

Если проверка выполняется, то можно переходить к выполнению следующего пункта алгоритма.

4. Решение системы канонических уравнений.

Канонические уравнения метода сил представляют собой систему линейных алгебраических уравнений относительно x_i ($i = 1, 2, \dots, n$). Эта система уравнений решается любым подходящим методом.

5. Построение расчетных эпюр изгибающих моментов, поперечных и продольных сил:

5.1. Построение расчетной эпюры моментов;

Расчетная эпюра моментов M строится как сумма грузовой эпюры M_F и исправленных $\overline{M}_i \cdot x_i$: $M = M_F + \sum_{i=1}^n \overline{M}_i \cdot x_i$. Исправленные эпюры $\overline{M}_i \cdot x_i$ получаются умножением ординат единичной эпюры $\overline{M}_i$ на x_i .

5.2. Кинематическая проверка;

Проверка правильности построения расчетной эпюры моментов заключается в проверке выполнения условия $\overline{M}_S \times M = 0$ (либо $\overline{M}_i \times M = 0$,

$i = 1, 2, \dots, n$) или $\frac{s^+ + s^-}{\min(s^+, |s^-|)} 100 \leq 1\%$, где s^+ , s^- – суммы положительных и отрицательных слагаемых в выражении $\overline{M}_S \times M$. Если проверка

выполняется, то можно переходить к выполнению следующего пункта алгоритма.

5.3. Построение расчетной эпюры поперечных сил;

Эпюра поперечных сил на каждом участке строится по уже проверенной расчетной эпюре моментов по формулам:

$$Q_n = \frac{M_k - M_n}{l} + \frac{ql}{2}; \quad Q_k = \frac{M_k - M_n}{l} - \frac{ql}{2}. \quad (4.4)$$

Здесь $q > 0$, если равномерно распределенная нагрузка направлена вниз; изгибающие моменты в начале (M_n) и конце (M_k) участка положительны, если растягивают нижние волокна; l – длина участка; Q_n , Q_k – поперечные силы в начале и конце участка. Для вертикальных стержней условно принимаем правые волокна за нижние.

5.4. Построение расчетной эпюры продольных сил;

Эпюра продольных сил строится по расчетной эпюре поперечных сил методом вырезания узлов. Незвестные продольные силы в стержнях, сходящихся в узел, определяются из уравнений равновесия узла: сумма проекций на продольную ось стержня всех сил, действующих на узел, должна быть равна нулю. Начинать следует с узла, в котором сходится не более двух стержней. Далее перебираются узлы в такой последовательности, которая обеспечивает присутствие в узле не более двух стержней с неизвестными продольными силами.

5.5. Статическая проверка.

Для контроля правильности построения эпюр поперечных и продольных сил выполняется статическая проверка: в заданной системе отбрасываются опоры, и их действие на раму заменяется усилиями согласно построенным эпюрам M , Q , N ; проверяется выполнение уравнений равновесия.

Алгоритм метода перемещений

1. Кинематический анализ, определение степени кинематической неопределимости n .

В методе перемещений в качестве основных неизвестных принимаются характерные перемещения системы – перемещения ее узлов. Узлы – места сопряжения стержней – как правило, бывают шарнирными или жесткими. Шарнирный узел может иметь линейное перемещение, которое можно разложить на вертикальную и горизонтальную составляющие. Жесткий узел, кроме линейных перемещений может получить и угловое перемещение. Жестким считается узел, в котором не менее двух стержней соединены между собой жестко. Полагается, что перемещения узлов малы и происходят за счет изгибных деформаций стержней системы. Степень кинематической неопределимости системы подсчитывается по формуле

$$n = n_y + n_l, \quad (4.5)$$

где n_y , n_l – число угловых и линейных перемещений системы. Количество неизвестных углов поворота n_y равно числу жестких узлов рассматриваемой системы, исключая опорные. Число линейных перемещений n_l равно числу степеней свободы системы, полученной из заданной врезанием шарниров во все жесткие узлы, включая и опорные.

2. Выбор основной системы.

Основная система получается из заданной путем введения n связей, устраняющих возможные линейные и угловые перемещения узлов. Основная система должна быть кинематически определимой. Наиболее просто это достигается введением таких связей, которые расчленяют раму на отдельные и независимые одна от другой статически неопределимые балки. Эти балки заранее рассчитаны на все виды нагрузок (в табл. 4.1 приведены результаты таких расчетов, необходимые для расчета рамы на действие силовой нагрузки).

Поскольку в заданной раме узлы могут иметь перемещения, основную систему надо рассчитать на смещение этих узлов по направлению введенных связей.

3. Формирование системы канонических уравнений метода перемещений:

Система канонических уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} r_{11}z_1 + r_{12}z_2 + \dots + r_{1n}z_n + R_{1F} = 0; \\ r_{21}z_1 + r_{22}z_2 + \dots + r_{2n}z_n + R_{2F} = 0; \\ \vdots \\ r_{n1}z_1 + r_{n2}z_2 + \dots + r_{nn}z_n + R_{nF} = 0. \end{cases}$$

Здесь: r_{ij} ($i, j = 1, 2, \dots, n$) – реакции в связи i основной системы от единичного перемещения связи j (от $\bar{z}_j = 1$); $r_{ij}z_j$ – реакции в связи i основной системы от действительного перемещения z_j ; R_{iF} – реакции в связи i основной системы от заданной нагрузки. Реакции r_{ij} , R_{iF} положительны, если совпадают с положительным направлением перемещения z_i .

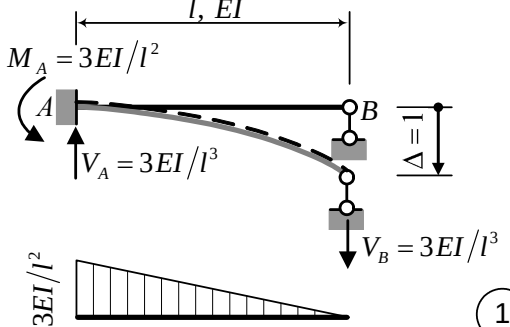
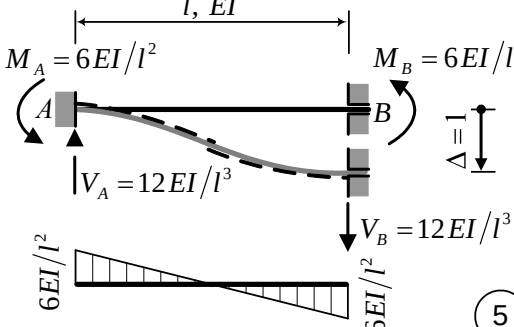
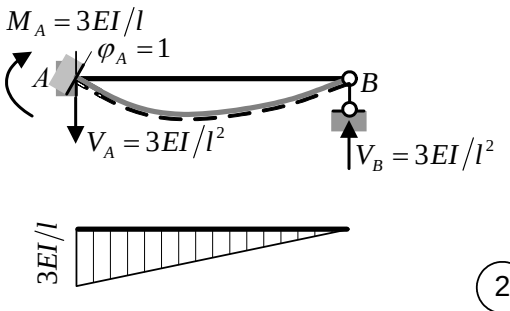
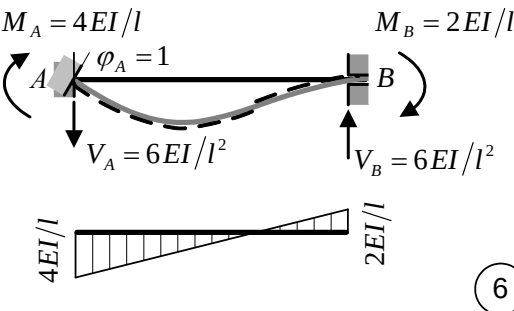
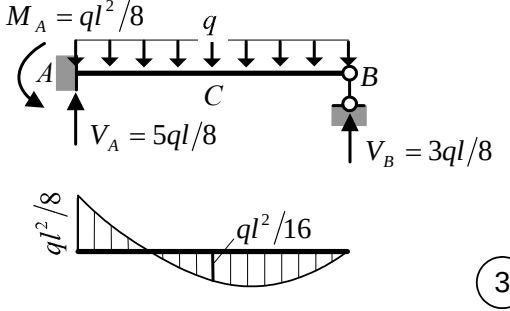
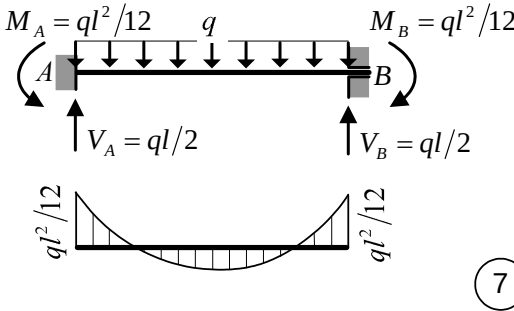
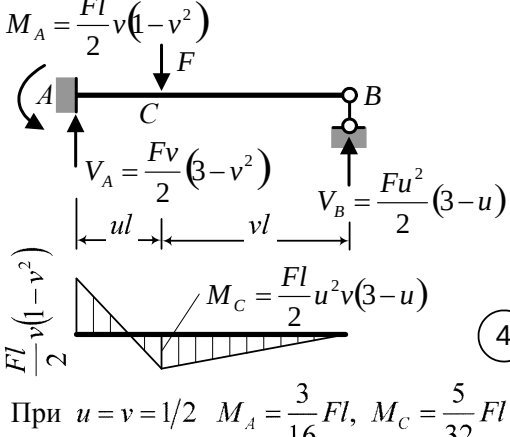
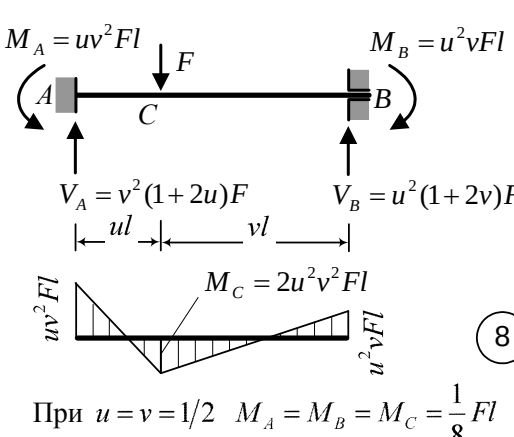
Реакцией защемляющей связи является момент; реакцией связи, запрещающей линейные смещения – сила.

Канонические уравнения представляют собой условия эквивалентности основной и заданной систем: реакции во введенных связях основной системы должны быть равны нулю. Тем самым введенные связи устраняются (поскольку в заданной системе их нет) и узлы уравниваются внутренними усилиями стержней, примыкающих к ним.

3.1. Построение единичных эпюр моментов $\bar{M}_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$);

Единичные эпюры моментов $\bar{M}_i$ строятся в основной системе от соответствующего перемещения $\bar{z}_i = 1$ с использованием табл. 4.1. Рекомендуется для каждого единичного смещения вычертить деформированную схему рамы с указанием растянутых волокон, что поможет правильно воспользоваться указанной таблицей.

Таблица 4.1

 1	 5
 2	 6
 3	 7
 4	 8

3.2. Определение коэффициентов системы канонических уравнений r_{ij} ;

Существуют два способа определения коэффициентов r_{ij} , ($i, j = 1, 2, \dots, n$). Первый способ состоит в определении реакций r_{ij} из условия равновесия узлов или фрагментов рамы. Вторым способом коэффициенты r_{ij} определяются перемножением эпюр, как это делалось в методе сил: $r_{ij} = \bar{M}_i \times \bar{M}_j$.

3.3. Проверка коэффициентов канонических уравнений;

Проверка правильности вычисления коэффициентов r_{ij} ($i, j = 1, 2, \dots, n$) заключается в проверке выполнения условия $\bar{M}_S \times \bar{M}_S = \sum_{i,j=1}^n r_{ij}$ или

$$\left| \bar{M}_S \times \bar{M}_S - \sum_{i,j=1}^n r_{ij} \right| / \min \left(\left| \bar{M}_S \times \bar{M}_S \right|, \left| \sum_{i,j=1}^n r_{ij} \right| \right) \cdot 100 \leq 1\%.$$
 Здесь $\bar{M}_S = \sum_{i=1}^n \bar{M}_i$ – суммарная единичная эпюра. Если проверка выполняется, то можно переходить к выполнению следующего пункта алгоритма.

3.4. Построение грузовой эпюры изгибающих моментов M_F ;

Грузовая эпюра моментов M_F строится в основной системе от заданной нагрузки с использованием табл. 4.1.

3.5. Определение свободных членов канонических уравнений R_{iF} ;

Коэффициенты R_{iF} , ($i = 1, 2, \dots, n$) определяются из условия равновесия узлов или фрагментов рамы, либо перемножением эпюр:

$$R_{iF} = - \sum_{k=1}^K \int_0^{l_k} \frac{\bar{M}_i M_F^o}{EI_k} dz.$$
 Здесь эпюра M_F^o строится от заданной нагрузки в статически определимой системе, которая получается из основной системы метода перемещений или заданной системы устранением лишних связей. В состав этих устраняемых связей обязательно должны входить связи, реакции в которых определяются.

3.6. Проверка свободных членов канонических уравнений;

Проверка правильности вычисления коэффициентов R_{iF} ($i = 1, 2, \dots, n$) заключается в проверке выполнения условия $\sum_{i=1}^n R_{iF} = -\bar{M}_S \times M_F^o$ или

$$\left| \sum_{i=1}^n R_{iF} + \bar{M}_S \times M_F^o \right| / \min \left(\left| \bar{M}_S \times M_F^o \right|, \left| \sum_{i=1}^n R_{iF} \right| \right) \cdot 100 \leq 1\%.$$

Эпюра M_F^o строится от заданной нагрузки в статически определимой системе, которая получается из основной системы метода перемещений или заданной системы устранением лишних связей. В состав этих устраняемых связей обязательно должны входить связи метода перемещений. Если проверка выполняется, то можно переходить к выполнению следующего пункта алгоритма.

4. Решение системы канонических уравнений.

Канонические уравнения метода перемещений представляют собой систему линейных алгебраических уравнений относительно z_i ($i = 1, 2, \dots, n$). Эта система уравнений решается любым подходящим методом.

5. Построение расчетных эпюр изгибающих моментов, поперечных и продольных сил:

5.1. Построение расчетной эпюры моментов;

Расчетная эпюра моментов строится как сумма грузовой эпюры M_F и исправленных $\bar{M}_i \cdot z_i$: $M = M_F + \sum_{i=1}^n \bar{M}_i \cdot z_i$. Исправленные эпюры $\bar{M}_i \cdot z_i$ получаются умножением ординат единичной эпюры $\bar{M}_i$ на z_i .

5.2. Статическая проверка эпюры моментов;

Статическая проверка заключается в проверке равновесия узлов рамы.

5.3. Построение расчетной эпюры поперечных сил;

Эпюра поперечных сил на каждом участке строится по уже проверенной расчетной эпюре моментов так же, как и в методе сил.

5.4. Построение расчетной эпюры продольных сил;

Эпюра продольных сил строится, как и в методе сил по расчетной эпюре поперечных сил методом вырезания узлов.

5.5. Статическая проверка рамы в целом;

В заданной системе отбрасываются опоры, их действие на раму заменяется усилиями согласно построенным эпюрам M , Q , N ; проверяется выполнение уравнений равновесия рамы в целом.

Порядок расчета:

Расчет статически неопределимой рамы методом сил.

Для рамы, изображенной на рис. 4.3, а, требуется построить эпюры изгибающих моментов, поперечных и продольных сил.

1. Кинематический анализ

По формуле (4.1) определяем число лишних связей n (степень статической неопределимости) заданной стержневой системы:

$$n = 2III + C_o - 3D = 2 \cdot 2 + 7 - 3 \cdot 3 = 2.$$

Здесь: $D = 3$ – диски ABD , BC , CE ; $III = 2$ – шарниры B , C ; $C_o = 7$, поскольку имеется по три связи в заделках D , E и одна связь в шарнирно подвижной опоре A (рис. 4.3, а).

2. Выбор основной системы

На рис. 4.3, б и рис. 4.4, а представлены два варианта основной системы, удовлетворяющие требованиям статической определимости и геометрической неизменяемости. На рис. 4.4, б приведен пример

неудачного выбора основной системы: для диска ABD оставлена одна лишняя связь (например, опора A), в то время как для дисков BC , CE удалена необходимая связь (например, вертикальная), что превращает эту часть сооружения в механизм с одной степенью свободы.

Будем работать с основной системой, представленной на рис. 4.3, *а*. В стержне BC возникает только продольная сила. Разрежем этот стержень: на рис. 4.3, *б* концы стержня в месте разреза (точки b , c) условно разнесены один от другого. Неизвестную продольную силу обозначим x_1 . Отбросим опору в точке A и ее действие на раму заменим усилием x_2 . Таким образом, x_2 – это опорная реакция в точке A .

3. Формирование системы канонических уравнений метода сил

Для нашей задачи система канонических уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} \delta_{11}x_1 + \delta_{12}x_2 + \Delta_{1F} = 0 \\ \delta_{21}x_1 + \delta_{22}x_2 + \Delta_{2F} = 0 \end{cases}.$$

Здесь:

δ_{11} –сближение точек b и c , вызванное силами $\bar{x}_1 = 1$;

$\delta_{11}x_1$ –сближение точек b и c от действительного значения силы x_1 ;

δ_{12} –сближение точек b и c , вызванное силой $\bar{x}_2 = 1$;

$\delta_{12}x_2$ –сближение точек b и c от действительного значения силы x_2 ;

Δ_{1F} –сближение точек b и c от заданной нагрузки.

δ_{21} – вертикальное перемещение точки A , вызванное силами $\bar{x}_1 = 1$);

$\delta_{21}x_1$ – вертикальное перемещение точки A от действительного значения силы x_1 ;

δ_{22} – вертикальное перемещение точки A , вызванное силой $\bar{x}_2 = 1$;

$\delta_{22}x_2$ – вертикальное перемещение точки A от действительного значения силы x_2 ;

Δ_{2F} –вертикальное перемещение точки A от заданной нагрузки.

Смысл первого уравнения состоит в запрещении сближения/удаления точек b и c , смысл второго уравнения – в запрещении вертикального перемещения точки A . Именно при этих условиях основная система (рис. 4.3, *б*) будет работать эквивалентно заданной (рис. 4.3, *а*).

3.1. Построение единичных эпюр изгибающих моментов

Единичные эпюры моментов $\bar{M}_1$ и $\bar{M}_2$ строятся в основной системе от $\bar{x}_1 = 1$ и $\bar{x}_2 = 1$ соответственно (рис. 4.3, *в*, *г*). Суммарная единичная эпюра $\bar{M}_s$ от сил $\bar{x}_1 = 1$ и $\bar{x}_2 = 1$, действующих одновременно, показана на рис. 4.3, *д*. Поскольку эпюра $\bar{M}_s$ равна сумме эпюр $\bar{M}_1$ и $\bar{M}_2$, то можно переходить к следующему пункту задачи.

На рис. 4.3, *в*, *г*, *д* ординаты эпюр в начале участков выделены более крупным шрифтом в сравнение с ординатами в середине участков.

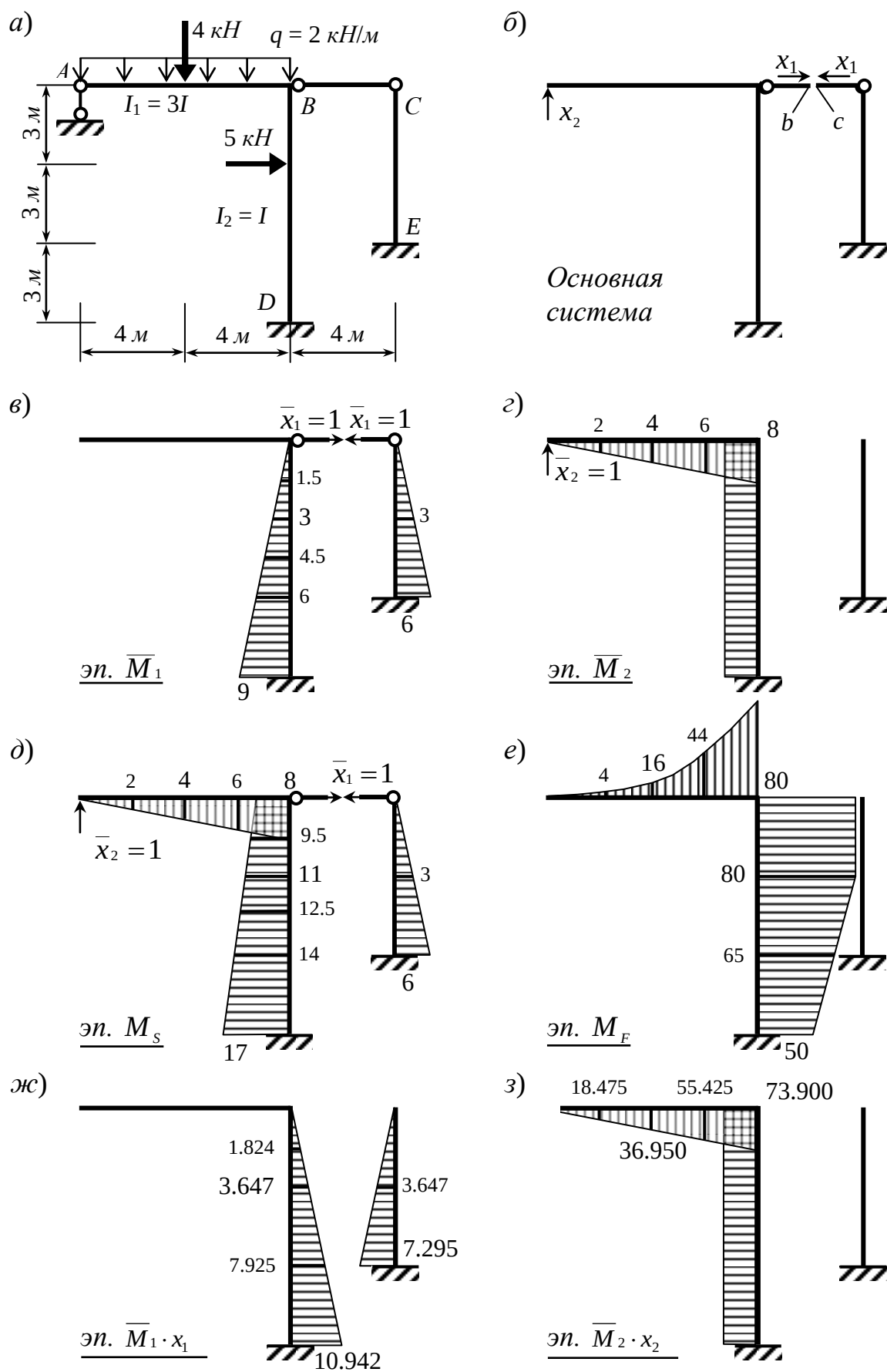
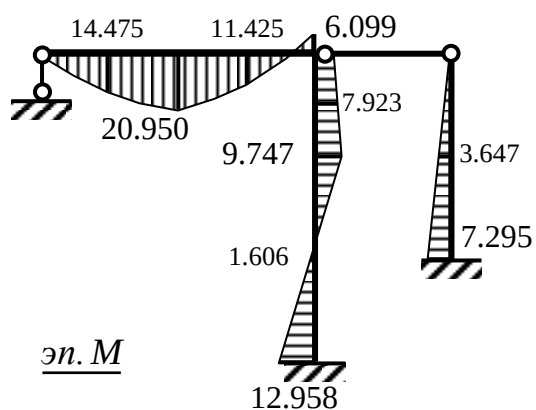
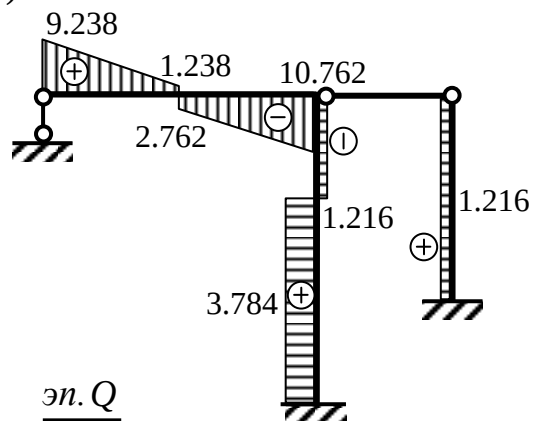


Рис. 4.3. К расчету рамы методом сил (начало).

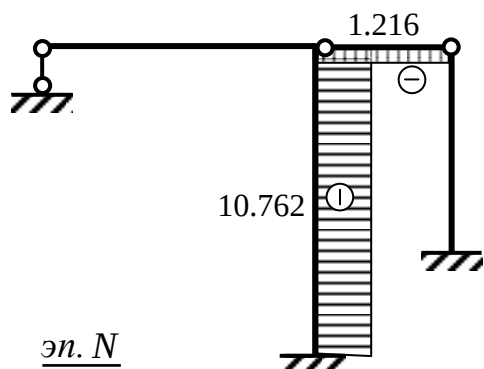
у)



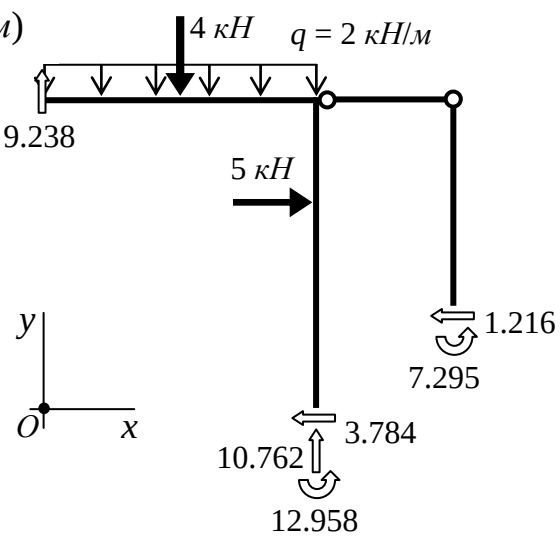
к)



л)



м)



н)

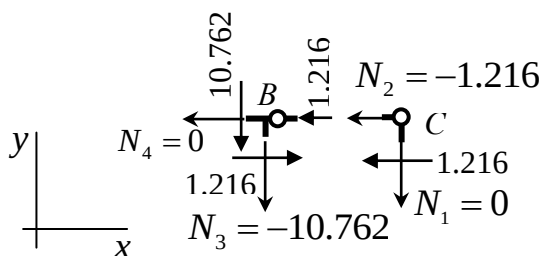
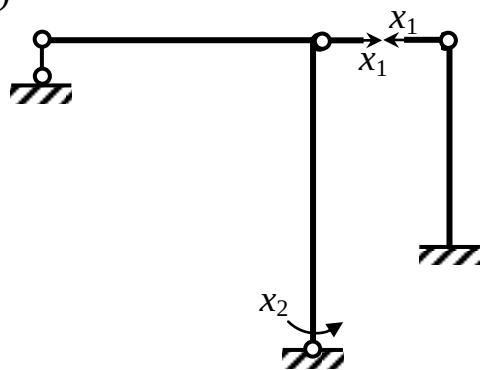


Рис. 4.3. К расчету рамы методом сил (окончание).

а)



б)

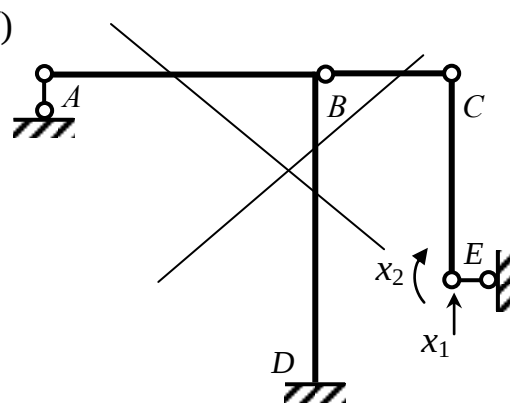


Рис. 4.4. К выбору основной системы метода сил

3.2. Определение коэффициентов системы канонических уравнений

Коэффициенты системы уравнений подсчитываем по формуле (4.2).

$$\delta_{11} = \bar{M}_1 \times \bar{M}_1 = \frac{9}{6 \cdot EI} (0 \cdot 0 + 4 \cdot 4.5 \cdot 4.5 + 9 \cdot 9) + \frac{6}{6 \cdot EI} (0 \cdot 0 + 4 \cdot 3 \cdot 3 + 6 \cdot 6) = \frac{315}{EI}.$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \bar{M}_1 \times \bar{M}_2 = \frac{9}{6 \cdot EI} (0 \cdot 8 + 4 \cdot 4.5 \cdot 8 + 9 \cdot 8) = \frac{324}{EI}.$$

$$\delta_{22} = \bar{M}_2 \times \bar{M}_2 = \frac{9}{6 \cdot EI} (8 \cdot 8 + 4 \cdot 8 \cdot 8 + 8 \cdot 8) + \frac{8}{6 \cdot 3EI} (0 \cdot 0 + 4 \cdot 4 \cdot 4 + 8 \cdot 8) = \frac{632.9}{EI}.$$

3.3. Проверка коэффициентов канонических уравнений

$$\begin{aligned} \bar{M}_s \times \bar{M}_s &= \frac{8}{6 \cdot 3EI} (4 \cdot 4 \cdot 4 + 8 \cdot 8) + \frac{9}{6 \cdot EI} (8 \cdot 8 + 4 \cdot 12.5 \cdot 12.5 + 17 \cdot 17) + \\ &+ \frac{6}{6 \cdot EI} (4 \cdot 3 \cdot 3 + 6 \cdot 6) = \frac{1595.9}{EI}. \end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \delta_{ij} = \frac{1}{EI} (315 + 2 \cdot 324 + 632.889) = \frac{1595.9}{EI}.$$

Поскольку $\bar{M}_s \times \bar{M}_s = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \delta_{ij}$, то переходим к следующему пункту задачи.

3.4. Построение грузовой эпюры изгибающих моментов

Грузовая эпюра моментов $\bar{M}_F$ строится в основной системе от заданной нагрузки (рис. 4.3, е) – ординаты эпюры в начале участков выделены более крупным шрифтом в сравнение с ординатами в середине участков.

3.5. Определение свободных членов системы канонических уравнений

Свободные члены подсчитываем по формуле (4.3).

$$\Delta_{1F} = \bar{M}_1 \times M_F = \frac{3}{6 \cdot EI} (-4 \cdot 1.5 \cdot 80 - 3 \cdot 80) + \frac{6}{6 \cdot EI} (-3 \cdot 80 - 4 \cdot 6 \cdot 65 - 9 \cdot 50) = -\frac{2610}{EI}.$$

$$\begin{aligned} \Delta_{2F} &= \bar{M}_2 \times M_F = \frac{4}{6 \cdot 3EI} (-4 \cdot 2 \cdot 4 - 4 \cdot 16) + \frac{4}{6 \cdot 3EI} (-4 \cdot 16 - 4 \cdot 6 \cdot 44 - 8 \cdot 80) + \\ &+ \frac{3}{6 \cdot EI} (-8 \cdot 80 - 4 \cdot 8 \cdot 80 - 8 \cdot 80) + \frac{6}{6 \cdot EI} (-8 \cdot 80 - 4 \cdot 8 \cdot 65 - 8 \cdot 50) = -\frac{5452.4}{EI}. \end{aligned}$$

3.6. Проверка свободных членов канонических уравнений

$$\begin{aligned} \bar{M}_s \times M_F &= \frac{4}{6 \cdot 3EI} (-4 \cdot 2 \cdot 4 - 4 \cdot 16) + \frac{4}{6 \cdot 3EI} (-4 \cdot 16 - 4 \cdot 6 \cdot 44 - 8 \cdot 80) + \\ &+ \frac{3}{6 \cdot EI} (-8 \cdot 80 - 4 \cdot 9.5 \cdot 80 - 11 \cdot 80) + \frac{6}{6 \cdot EI} (-11 \cdot 80 - 4 \cdot 14 \cdot 65 - 17 \cdot 50) = -\frac{8062.4}{EI}. \end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^2 \Delta_{iF} = \frac{1}{EI} (-2610 - 5452.4) = -\frac{8062.4}{EI}.$$

Поскольку $\bar{M}_s \times M_F = \sum_{i=1}^2 \Delta_{iF}$, то переходим к следующему пункту задачи.

4. Решение системы канонических уравнений

Система канонических уравнений с учетом подсчитанных значений коэффициентов приобретает вид:

$$\begin{cases} 315x_1 + 324x_2 - 2610 = 0 \\ 324x_1 + 632.9x_2 - 5452.4 = 0 \end{cases}$$

Решаем полученную систему уравнений. Для этого умножим второе уравнение на $-315/324$:

$$\begin{cases} 315x_1 + 324x_2 = 2610 \\ -315x_1 - 615.3x_2 = -5301.0 \end{cases}$$

и сложим первое уравнение с измененным вторым. В результате получим

$$\begin{cases} 315x_1 + 324x_2 = 2610 \\ -291.3x_2 = -2691.0 \end{cases}$$

Откуда $x_2 = \frac{-2691.0}{-291.3} = 9.238$ и $x_1 = \frac{2610 - 324 \cdot 9.238}{315} = -1.216$.

5. Построение окончательных (расчетных) эпюр изгибающих моментов, поперечных и продольных сил

5.1. Построение расчетной эпюры моментов

Строим исправленные эпюры $\bar{M}_1 \cdot x_1$, $\bar{M}_2 \cdot x_2$ (рис. 4.3, ж, з). Расчетная эпюра моментов (рис. 4.3, и) получается сложением грузовой эпюры (рис. 4.3, е) с единичными исправленными: $M = M_F + \bar{M}_1 \cdot x_1 + \bar{M}_2 \cdot x_2$. Сложение эпюр осуществляется поточечно.

Например, для вертикального участка от точки D до точки приложения силы имеем: в точке D $M_n = 10.942 - 73.900 + 50 = -12.958$; в сечении под силой $M_k = 3.647 - 73.900 + 80 = 9.747$. Соединяем эти две ординаты прямой линией. Для горизонтального участка от точки A до точки приложения силы имеем: в точке A $M_n = 0$; в точке под силой $M_k = 0 + 36.950 - 16 = 20.950$; посередине участка $M_c = 0 + 18.475 - 4 = 14.475$. По этим трем точкам строим квадратную параболу. Для других участков вычисления аналогичны.

5.2. Кинематическая проверка

$$\begin{aligned} \bar{M}_s \times M &= \frac{4}{6 \cdot 3EI} (4 \cdot 2 \cdot 14.475 + 4 \cdot 20.95) + \frac{4}{6 \cdot 3EI} (4 \cdot 20.95 + 4 \cdot 6 \cdot 11.425 - 8 \cdot 6.099) + \\ &+ \frac{3}{6 \cdot EI} (-8 \cdot 6.099 - 4 \cdot 9.5 \cdot 7.923 - 11 \cdot 9.747) + \frac{6}{6 \cdot EI} (-11 \cdot 9.747 + 4 \cdot 14 \cdot 1.606 + 17 \cdot 12.958) + \\ &+ \frac{6}{6 \cdot EI} (-4 \cdot 3 \cdot 3.647 - 6 \cdot 7.295) = \frac{434.133 - 434.135}{EI} = -\frac{0.002}{EI} \approx 0, \end{aligned}$$

поскольку $\frac{434.135 - 434.133}{434.133} \cdot 100 = 0.0005 < 1\%$.

5.3. Построение расчетной эпюры поперечных сил

Поперечную силу на участке определяем по формуле (4.4).
Участок от опоры A до точки приложения силы:

$$Q_H = \frac{20.950 - 0}{4} + \frac{2 \cdot 4}{2} = 9.238; \quad Q_K = \frac{20.950 - 0}{4} - \frac{2 \cdot 4}{2} = 1.238.$$

Участок от точки приложения силы до точки *B*:

$$Q_H = \frac{-6.099 - 20.950}{4} + \frac{2 \cdot 4}{2} = -2.762; \quad Q_K = \frac{-6.099 - 20.950}{4} - \frac{2 \cdot 4}{2} = -10.762.$$

Участок *CE*:

$$Q_H = Q_K = \frac{0 - (-7.295)}{6} = 1.216.$$

Вертикальный участок от точки *B* до точки приложения силы:

$$Q_H = Q_K = \frac{6.099 - 9.747}{3} = -1.216.$$

Вертикальный участок от точки приложения силы до точки *D*:

$$Q_H = Q_K = \frac{9.747 - (-12.958)}{6} = 3.784.$$

По данным проведенного расчета построена расчетная эпюра поперечных сил (рис. 4.3, *к*).

5.4. Построение расчетной эпюры продольных сил

В нашем случае определение продольных сил следует начать либо с узла *A*, либо с узла *C*, и продолжить рассмотрением узла *B*.

Начнем с узла *C* (рис. 4.3, *н*).

Из уравнения равновесия $\sum F_x = 0$: $-N_{BC} - 1.216 = 0$ находим $N_{BC} = -1.216$.

Из уравнения равновесия $\sum F_y = 0$ находим $N_{CE} = 0$.

Узел *B*:

$$\sum F_x = 0: -N_{AB} - 1.216 + 1.216 = 0; \quad N_{AB} = 0;$$

$$\sum F_y = 0: -N_{BD} - 10.762 = 0; \quad N_{BD} = -10.762.$$

По данным проведенного расчета построена расчетная эпюра продольных сил (рис. 4.3, *л*).

5.5. Статическая проверка

В заданной системе (рис. 4.3, *а*) отбрасываем опоры. Их действие на раму заменяем усилиями согласно построенным эпюрам *M*, *Q*, *N* (рис. 4.3, *м*). Проверяем выполнение уравнений равновесия

$$\sum F_y = 0: 9.238 + 10.762 - 4 - 2 \cdot 8 = 20 - 20 = 0,$$

$$\sum F_x = 0: 5 - 3.784 - 1.216 = 5 - 5 = 0,$$

$$\begin{aligned} \sum M_O = 0: 2 \cdot 8 \cdot 4 + 4 \cdot 4 + 5 \cdot 6 - 10.762 \cdot 8 - 12.958 - 1.216 \cdot 3 - 7.295 = \\ = 110 - 109.997 = -0.003 \approx 0 \quad [(110 - 109.997) / 109.997 \cdot 100 = 0.003 < 1\%] \end{aligned}$$

Выполнение кинематической и статической проверок подтверждает правильность построения эпюр *M*, *Q*, *N*.

Расчет статически неопределимой рамы методом перемещений.

Для рамы, изображенной на рис. 4.5, а (рис. 4.3, а), требуется построить эпюру изгибающих моментов и сравнить с результатами расчета методом сил.

1. Кинематический анализ, определение степени кинематической неопределимости n .

Число угловых перемещений $n_y = 1$ – один жесткий узел B . Для определения числа линейных перемещений во все жесткие узлы системы (узлы B, D, E) врезаем шарниры (рис. 4.6, а) и подсчитываем число степеней свободы получившейся системы: $n_o = 3 \cdot D - 2 \cdot III - C_o = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 3 - 5 = 1$, где $D = 4$ – диски AB, BC, BD, CE ; $III = 3$ – шарниры B (двукратный) и C ; $C_o = 5$, поскольку имеется по две связи в шарнирах D, E и одна связь в шарнирно подвижной опоре A . Таким образом, имеем механизм с одной степенью свободы. На рис. 4.6, б показана схема малых перемещений этого механизма без деформации его элементов. Число линейных перемещений $n_n = n_o = 1$. Степень кинематической неопределимости $n = n_y + n_n = 1 + 1 = 2$.

2. Выбор основной системы.

Основная система получается из заданной введением защемляющей связи в узле B и линейной связи в узле C (рис. 4.5, б). В качестве неизвестных принимаются угол поворота z_1 жесткого узла и линейное перемещение z_2 горизонтальных элементов рамы.

3. Формирование системы канонических уравнений метода перемещений.

Для нашей задачи система канонических уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} r_{11}z_1 + r_{12}z_2 + R_{1F} = 0 \\ r_{21}z_1 + r_{22}z_2 + R_{2F} = 0 \end{cases}.$$

Здесь:

r_{11} – реактивный момент в защемляющей связи, вызванный поворотом этой связи на единицу (реакция в связи 1 от $\bar{z}_1 = 1$);

$r_{11}z_1$ – реактивный момент в защемляющей связи от действительного значения поворота z_1 ;

r_{12} – реактивный момент в защемляющей связи, вызванный единичным линейным смещением $\bar{z}_2 = 1$ (реакция в связи 1 от $\bar{z}_2 = 1$);

$r_{12}z_2$ – реактивный момент в защемляющей связи от действительного значения линейного смещения z_2 ;

R_{1F} – реактивный момент в защемляющей связи от заданной нагрузки;

r_{21} – реакция в линейной связи от поворота защемляющей связи (реакция в связи 2 от $\bar{z}_1 = 1$);

$r_{21}z_1$ – реакция в линейной связи от действительного значения поворота z_1 ;

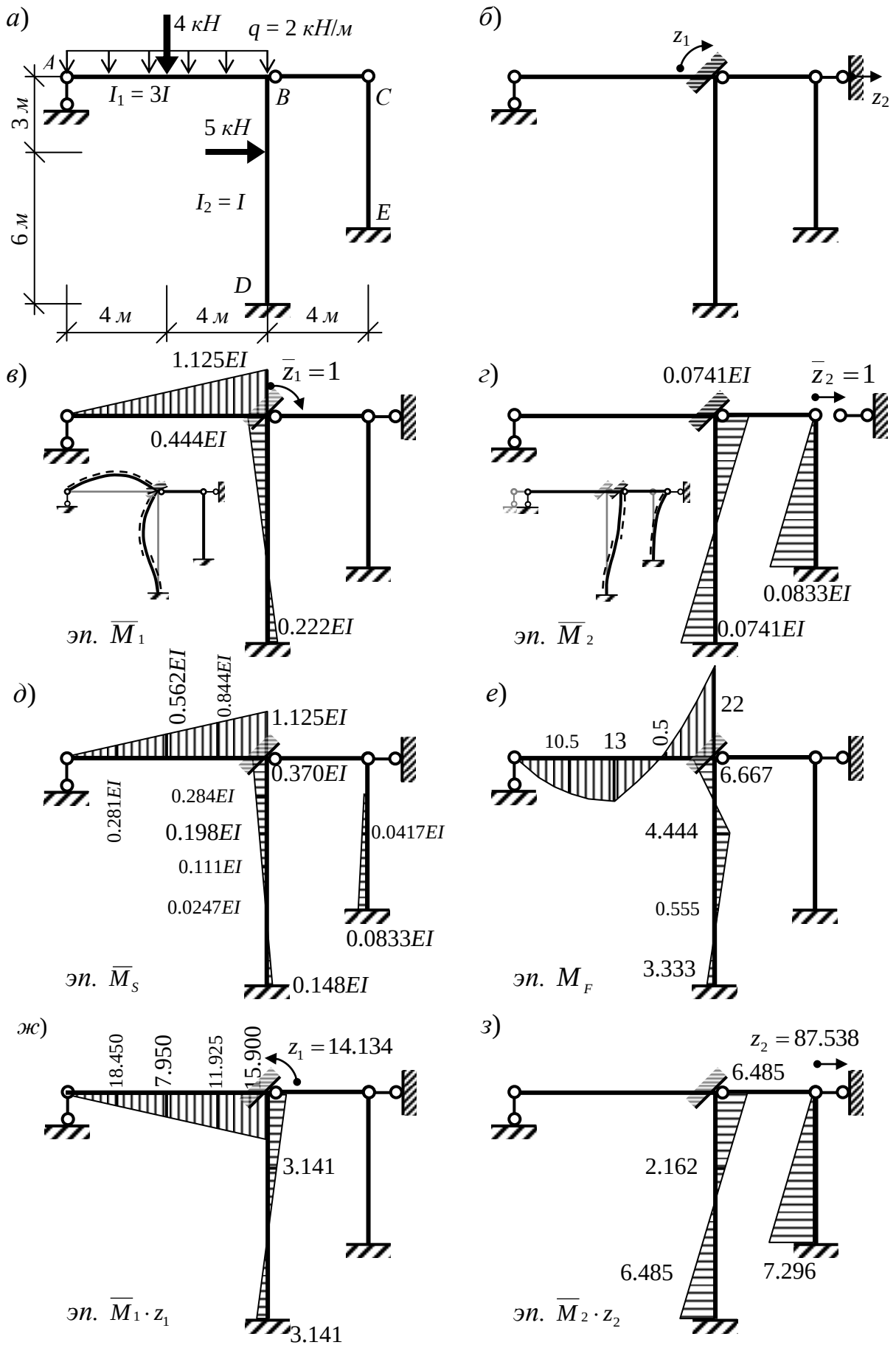
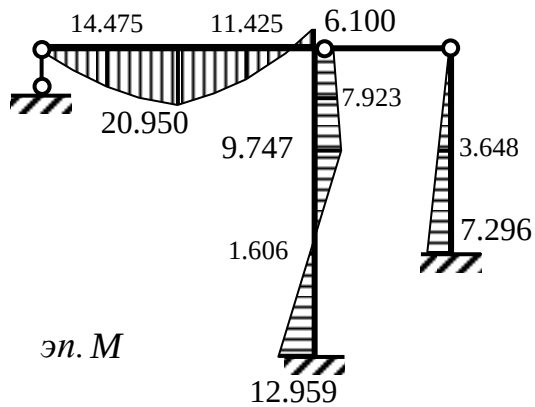
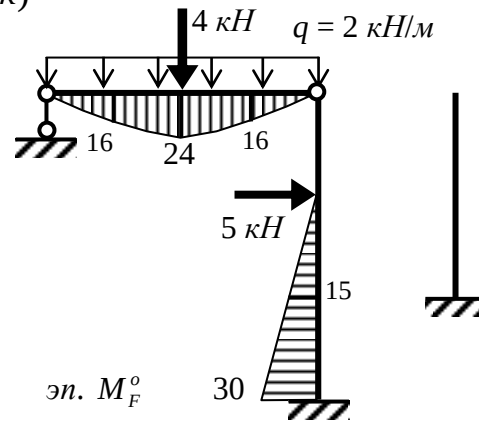


Рис. 4.5. К расчету рамы методом перемещений

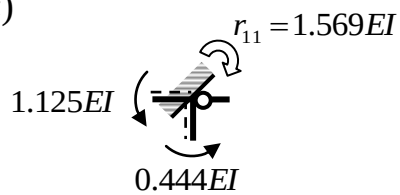
u)



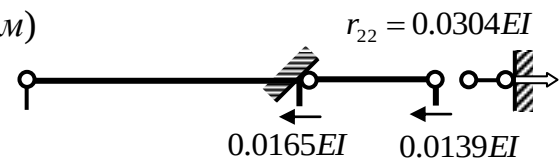
к)



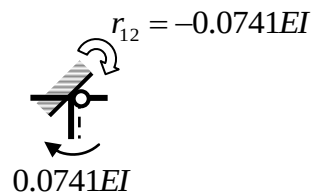
л)



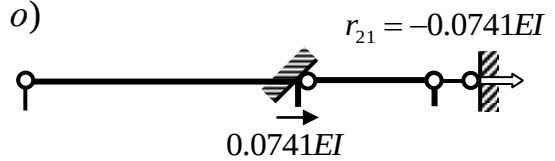
м)



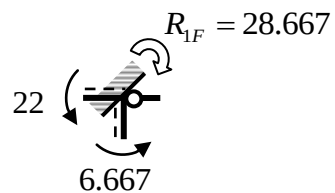
н)



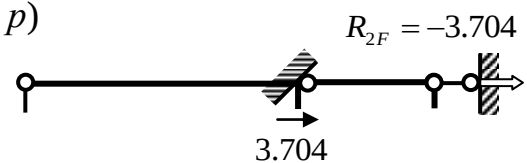
о)



п)



р)



с)

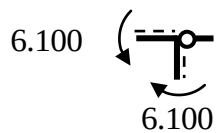


Рис. 4.5. К расчету рамы методом перемещений. Окончание

r_{22} — реакция в линейной связи, вызванная единичным линейным смещением $\bar{z}_2 = 1$ (реакция в связи 2 от $\bar{z}_2 = 1$);

$r_{22}z_2$ – реакция в линейной связи от действительного значения линейного смещения z_2 ;

R_{2F} – реакция в линейной связи от заданной нагрузки.

Смысл первого уравнения состоит в требовании равенства нулю реакции в защемляющей связи 1, смысл второго уравнения – в требовании равенства нулю реакции в линейной связи 2. Именно при этих условиях основная система (рис. 4.5, б) будет работать эквивалентно заданной (рис. 4.5, а).

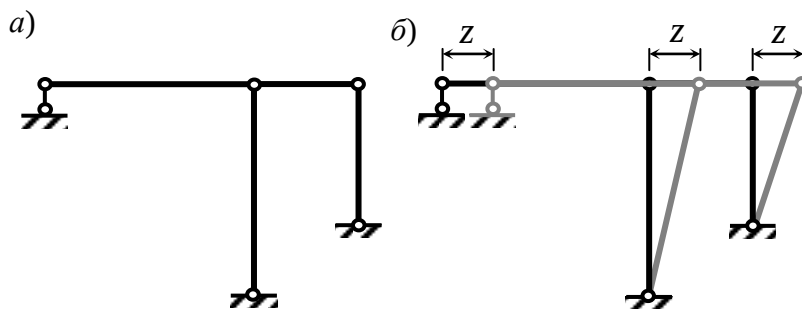


Рис. 4.6. К определению числа линейных перемещений

3.1. Построение единичных эпюр моментов;

Единичные эпюры моментов $\bar{M}_1$ и $\bar{M}_2$ строятся в основной системе от $\bar{z}_1=1$ и $\bar{z}_2=1$ соответственно (рис. 4.5, в, г) с использованием табл. 4.1. Рекомендуется изобразить деформированную схему рамы и отметить на ней растянутые волокна (показаны пунктиром на рис. 4.5, в, г).

Покажем подробнее построение эпюры $\bar{M}_1$ от $\bar{z}_1=1$ (рис. 4.5, в). В основной системе (рис. 4.5, б) стержень AB представляет собой балку шарнирно опертую с одной стороны и жестко заделанную с другой стороны. Кинематическим воздействием является единичный поворот жесткой заделки. В табл. 4.1 этому случаю соответствует схема 2 (номер схемы в табл. 4.1 заключен в кружок). Для построения эпюры моментов на участке AB следует схему 2 таблицы расположить на раме так, чтобы совпали растянутые волокна на схеме из таблицы и на деформированной схеме рамы. Этого можно добиться зеркальным отражением схемы 2 относительно оси 1 – 1 и зеркальным отражением получившейся схемы относительно оси 2 – 2 (рис. 4.7, а). Значение момента в защемляющей связи подсчитывается с учетом заданной жесткости рассматриваемого элемента рамы: $3 \cdot EI_1/l_{AB} = 3 \cdot 3EI/8 = 1.125EI$. Стержень BD в основной системе представляет собой балку, защемленную с обеих сторон. Кинематическим воздействием является единичный поворот заделки B . В табл. 4.1 этому случаю соответствует схема 6. Совпадение растянутых волокон на схеме 6 и на деформированной схеме рамы достигается

поворотом схемы 6 на 90° по часовой стрелке (рис. 4.7, б). Эпюра $\bar{M}_2$ строится аналогичным образом. Кинематическое воздействие $\bar{z}_2 = 1$ приводит к единичному смещению: жесткой заделки для балки BD (схема 5 табл. 4.1); шарнирной опоры – для балки CE (схема 1 табл. 4.1). В обоих случаях табличные схемы следует повернуть на 90° против часовой стрелки. При этом

$$M_E = 3EI_2/l_{CE}^2 = 3EI/6^2 = 0.0833EI, \quad M_D = M_B = 6EI_2/l_{BD}^2 = 6EI/9^2 = 0.0741EI.$$

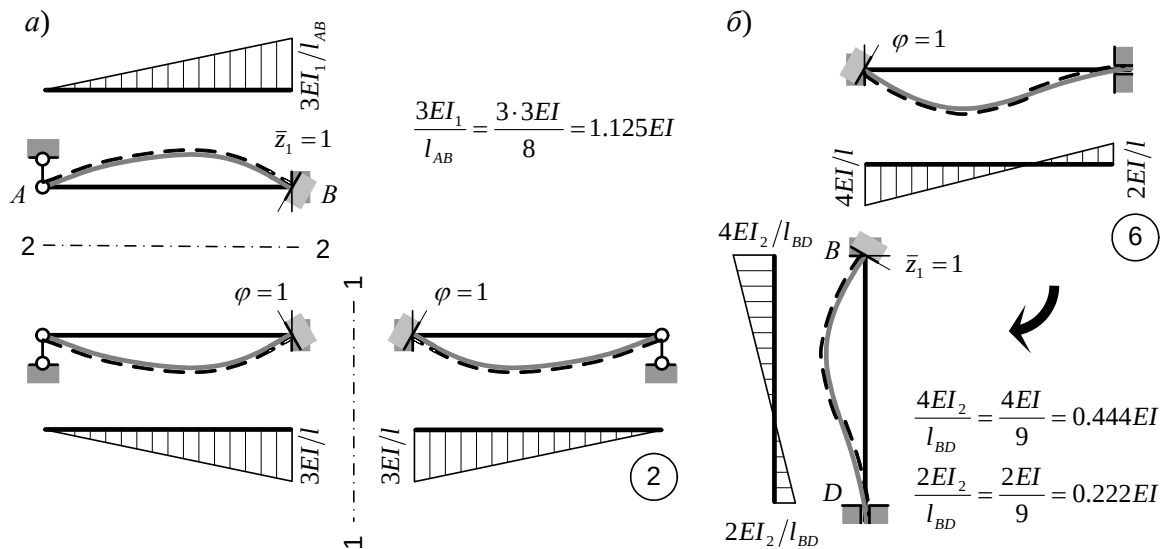


Рис. 4.7. К построению единичных эпюр моментов

Суммарная единичная эпюра $\bar{M}_s$ от перемещений $\bar{z}_1 = 1$ и $\bar{z}_2 = 1$, действующих одновременно, строится суммированием единичных эпюр ($\bar{M}_s = \bar{M}_1 + \bar{M}_2$) и показана на рис. 4.5, д.

На рис. 4.5, в, г, д ординаты эпюр в начале участков выделены более крупным шрифтом в сравнение с ординатами в середине участков.

3.2. Определение коэффициентов системы канонических уравнений;

Коэффициент r_{11} – реакцию в связи 1 от $\bar{z}_1 = 1$ – определяем из условия равновесия узла B (рис. 4.5, л). Для этого рассматриваем эн. $\bar{M}_1$ (единичную эпюру от $\bar{z}_1 = 1$) и проводим процедуру метода сечений: 1) вырезаем узел B ; 2) отбрасываем оставшуюся часть рамы; 3) действие отброшенной части заменяем силами взаимодействия (на рис. 4.5, л показаны только моменты, необходимые в дальнейшем при составлении уравнения равновесия); 4) из условия равновесия $\sum M = 0$: $r_{11} - 1.125EI - 0.444EI = 0$ определяем $r_{11} = 1.125EI + 0.444EI = 1.569EI$.

Остановимся подробнее на п. 3 метода сечений. Согласно эн. $\bar{M}_1$ для стержня AB в точке B момент равен $1.125EI$ и растягивает *верхние* волокна (ординаты эн. $\bar{M}_1$ отложены *сверху*, см. также деформированную схему на рис. 4.5, в). Для стержня BD в точке B момент равен $0.444EI$ и растягивает

левые волокна (ординаты эн. $\bar{M}_1$ отложены слева, см. также деформированную схему на рис. 4.5, в). На рис. 4.5, л растянутые волокна в стержнях узла В отмечены пунктиром; моменты $1.125EI$ и $0.444EI$ направлены так, чтобы растягивать отмеченные пунктиром волокна.

Реакцию в связи 1 от линейного смещения $\bar{z}_2 = 1$ определяем аналогично из условия равновесия узла В (рис. 4.5, н), рассматривая эн. $\bar{M}_2$:

$$r_{12} = -0.0741EI.$$

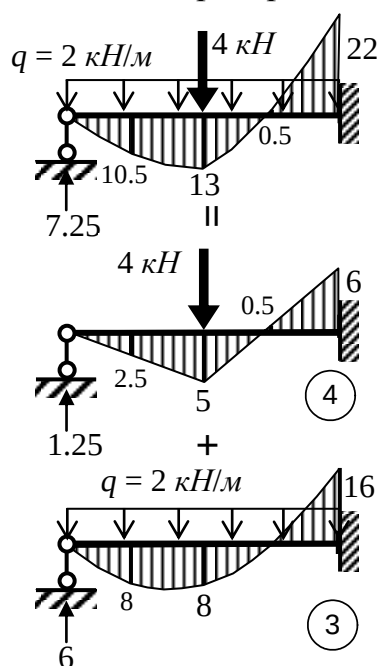
Реакцию в связи 2 от поворота $\bar{z}_1 = 1$ определяем из условия равновесия фрагмента рамы, показанного на рис. 4.5, о, рассматривая эн. $\bar{M}_1$. Из сил взаимодействия с отброшенной частью рамы показаны только горизонтальные силы (поперечные силы для балок из таблицы), необходимые в дальнейшем для составления уравнения равновесия $\sum F_x = 6EI/9^2 + r_{21} = 0$, где x – горизонтальная ось. Из указанного уравнения равновесия находим

$$r_{21} = -\frac{6 \cdot EI}{9^2} = -0.0741EI.$$

Аналогично, рассматривая эн. $\bar{M}_2$, находим реакцию r_{22} (рис. 4.5, м):

$$r_{22} = \frac{12 \cdot EI}{9^3} + \frac{3 \cdot EI}{6^3} = 0.0165EI + 0.0139EI = 0.0304EI$$

3.3. Проверка коэффициентов канонических уравнений;



$$\begin{aligned} \bar{M}_s \times \bar{M}_s &= \frac{8}{6 \cdot 3EI} (4 \cdot 0.5625EI \cdot 0.5625EI + 1.125EI \cdot 1.125EI) + \\ &+ \frac{9}{6 \cdot EI} (0.370EI \cdot 0.370EI + 4 \cdot 0.111EI \cdot 0.111EI + 0.148EI \cdot 0.148EI) + \\ &+ \frac{6}{6 \cdot EI} (4 \cdot 0.0417EI \cdot 0.0417EI + 0.0833EI \cdot 0.0833EI) = 1.452EI. \end{aligned}$$

$$\sum_{i,j} r_{i,j} = 1.569EI - 0.0741EI - 0.0741EI + 0.0304EI = 1.451EI.$$

Поскольку $\frac{1.452EI - 1.451EI}{1.451EI} \cdot 100 = 0.07 < 1\%$, то можно

переходить к следующему пункту алгоритма.

3.4. Построение грузовой эпюры изгибающих моментов;

Грузовая эпюра моментов M_F строится в основной системе от заданной нагрузки с использованием табл. 4.1 (рис. 4.5, е). В случае действия на балку нескольких нагрузок грузовая эпюра получается суммированием эпюр от каждой

Рис. 4.8. К построению грузовой эпюры

нагрузки в отдельности. В нашем случае для балки AB эта процедура показана на рис. 4.8 (схема 4 при $u = v = 0.5$ плюс схема 3). Для балки DB согласно табл. 4.1 (схема 8) имеем:

$$u = 2/3; v = 1/3; M_D = uv^2 Fl = \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot 5 \cdot 9 = 3.333;$$

$$M_B = u^2 v Fl = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{3} \cdot 5 \cdot 9 = 6.667;$$

момент под силой равен

$$2u^2 v^2 Fl = 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot 5 \cdot 9 = 4.444;$$

$$\text{реакция } V_B = u^2(1+2v)F = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(1+2 \cdot \frac{1}{3}\right) \cdot 5 = 3.704.$$

3.5. Определение свободных членов канонических уравнений;

Коэффициент R_{1F} – реакцию в связи 1 от заданной нагрузки (рассматриваем, следовательно, эп. M_F) – определяем из условия равновесия узла B (рис. 4.5, n): $R_{1F} = 22 + 6.667 = 28.667$.

R_{2F} – реакцию в связи 2 от заданной нагрузки – определяем из условия равновесия $\sum F_x = 3.704 + R_{2F} = 0$ фрагмента рамы, изображенного на рис. 4.5, p : $R_{2F} = -3.704$.

3.6. Проверка свободных членов канонических уравнений;

Построим эп. M_F^o – эпюру моментов от заданной нагрузки в любой основной системе метода сил. Можно в качестве эп. M_F^o принять эп. M_F метода сил (рис. 4.3, e). Рекомендуется, однако, выбрать такую основную систему метода сил, чтобы эп. M_F^o была как можно проще – см. рис. 4.5, k . Тогда

$$-\bar{M}_s \times M_F^o = \frac{4}{6 \cdot 3EI} (-4 \cdot 0.281EI \cdot 16 - 0.562EI \cdot 24) + \frac{4}{6 \cdot 3EI} (-0.562EI \cdot 24 - 4 \cdot 0.844EI \cdot 16) + \\ + \frac{6}{6 \cdot EI} (4 \cdot 0.0247EI \cdot 15 - 0.148EI \cdot 30) = 24.963.$$

$$\sum_i R_{iF} = 28.667 - 3.704 = 24.963.$$

Поскольку $\sum_i R_{iF} = -\bar{M}_s \times M_F^o$, то переходим к следующему пункту

алгоритма.

4. Решение системы канонических уравнений.

Система канонических уравнений с учетом подсчитанных значений коэффициентов приобретает вид:

$$\begin{cases} 1.569EI \cdot z_1 - 0.0741 \cdot z_2 + 28.667 = 0 \\ -0.0741 \cdot z_1 + 0.0304 \cdot z_2 - 3.704 = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему уравнений каким-либо способом (например, так, как это показано в п. 4 алгоритма метода сил) получаем:

$$z_1 = -14.134/EI; \quad z_2 = 87.538/EI.$$

5. *Построение расчетных эпюр изгибающих моментов, поперечных и продольных сил:*

5.1. *Построение расчетной эпюры моментов;*

Строим исправленные эпюры $\bar{M}_1 \cdot z_1$, $\bar{M}_2 \cdot z_2$ (рис. 4.5, ж, з). Расчетная эпюра моментов (рис. 4.5, и) получается сложением грузовой эпюры (рис. 4.5, е) с единичными исправленными: $M = M_F + \bar{M}_1 \cdot z_1 + \bar{M}_2 \cdot z_2$. Данная процедура подробно описана в п. 5.1 алгоритма метода сил.

5.2. *Статическая проверка эпюры моментов;*

Проверяем равновесие жесткого узла В (рис. 4.5, с). Узел уравновешен: $\sum M = 6.100 - 6.100 = 0$.

Последующие п.п. 5.3, 5.4, 5.5 алгоритма метода перемещений выполняются так же, как и в методе сил.

Расчетные эпюры моментов метода сил (рис. 4.3, и) и метода перемещений (рис. 4.5, и) практически совпадают.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ.....	3
ЗАДАЧА № 1.	
Расчет статически	
определимой многопролетной балки.....	7
ЗАДАЧА № 2.	
Расчет трехшарнирной арки.....	9
ЗАДАЧА № 3.1.	
Расчет простой плоской статически	
определимой фермы.....	20
ЗАДАЧА № 3.2.	
Расчет сложной статически	
определимой фермы.....	28
ЗАДАЧА № 4.	
Расчет плоской статически	
неопределимой рамы.....	37
ОГЛАВЛЕНИЕ.....	60

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Основная

1. Дарков А.В., Н.Н. Шапошников. Строительная механика. М: Высшая школа, 1986. 607 с.
2. Киселев В.А. Строительная механика. Общий курс. М: Стройиздат, 1986, 520 с.
3. Клейн Г.К. и др. Руководство к практическим занятиям по курсу строительной механики (Статика стержневых систем). М: Высшая школа, 1980, 384 с.
4. Вайсфельд А.А., Иванников Л.М., Киселев В.Е., Ловцов А.Д., Лукашевич А.А. Строительная механика. Часть I. Примеры выполнения контрольных работ для студентов строительных специальностей заочной и дистанционной формы обучения. – Хабаровск: Изд-во Тихоокеан. гос. ун-та, 2007. – 52с.

Дополнительная

1. Леонтьев, Н.Н. Основы строительной механики стержневых систем. [Текст] Н.Н. Леонтьев, Д.Н. Соболев, А.А. Амосов. - М.: Изд-во Ассоциации строительных вузов, 1996. - 542 с.
2. Киселев В.Е. Строительная механика. Методические указания к выполнению контрольных работ по курсу «Строительная механика» для студентов строительных специальностей заочной формы обучения. Часть 1. Хабаровск, ХГТУ, 2003. 17 с.
3. Даниловский Ю.М. Расчет трехшарнирных систем. Часть 1. Методические указания к изучению раздела курса «Строительная механика» для студентов архитектурно-строительных и дорожных специальностей. Хабаровск, ХГТУ, 2004. 20 с.
4. Лукашевич А.А. Современные численные методы строительной механики: Учебное пособие. – Хабаровск, ХГТУ, 2003. 135 с.

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

Часть II

Примеры выполнения контрольных работ для студентов строительных специальностей заочной и дистанционной формы обучения

Аркадий Аронович. Вайсфельд,
Леонид Матвеевич Иванников,
Виталий Евгеньевич Киселев,
Александр Дмитриевич Ловцов,
Анатолий Анатольевич Лукашевич.

Под общей редакцией докт. техн. наук
А. Д. Ловцова

Главный редактор *Л. А. Суевалова*
Редактор *Л.С. Бакаева*
Оператор компьютерной верстки *А.А.Вайсфельд*

Подписано в печать _____. Формат 60×84 ¹/₁₆.
Бумага писчая. Гарнитура «Таймс». Печать цифровая.
Усл. печ. л. _____. Тираж 200 экз. Заказ _____

Издательство Тихоокеанского государственного университета
680035, Хабаровск, ул. Тихоокеанская, 136.

Отдел оперативной полиграфии издательства
Тихоокеанского государственного университета.
680035, Хабаровск, ул. Тихоокеанская, 136.

Д Л Я З А М Е Т О К

Вставка в стр.