

A decorative graphic on the right side of the page. It features three sets of concentric circles in shades of blue. Two sets are in the upper right, and one is in the lower right. Thin blue lines extend from the top left towards the circles, and another line extends from the top right towards the circles.

Моделирование Пуассоновского потока требований

лабораторная работа для студентов направления
220400.62 – «Управление в технических
системах» всех форм обучения

Изучить свойства и характеристики пуассоновского (простейшего) потока. Сравнить теоретические и модельные значения полученных характеристик.

ст. преподаватель кафедры КС У. В. Лаптева
01.09.2014

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА

На тему «Моделирование Пуассоновского потока требований»

Цель работы: изучить свойства и характеристики пуассоновского (простейшего) потока. Сравнить теоретические и модельные значения полученных характеристик.

1. Краткие теоретические сведения

Простейший поток обладает следующими свойствами: стационарность, ординарность и отсутствие последействия.

Свойство стационарности означает, что с течением времени вероятностные характеристики потока не меняются. Поток можно назвать стационарным, если для любого числа k требований, поступивших за промежуток времени длиной Δt , вероятность поступления требований зависит только от величины промежутка и не зависит от его расположения на оси времени (1).

$$P_k(t + \Delta t) = P_k(t_1 + \Delta t) = P_k(\Delta t), \quad (1)$$

где $P_k(t)$ - вероятность поступления k требований.

Свойство ординарности означает практическую невозможность группового поступления требований. Поэтому поток требований можно назвать ординарным тогда, когда вероятность поступления двух или более требований за любой бесконечно малый промежуток времени Δt есть величина бесконечно малая, более высокого порядка, чем Δt , т.е.

$$P_{i \geq 2}(\Delta t) = 0(\Delta t). \quad (2)$$

Свойство отсутствия последействия означает независимость вероятностных характеристик потока от предыдущих событий. Иными словами, вероятность поступления k требований в промежуток $[t_1, t_2]$ зависит от числа, времени поступления и длительности обслуживания требований до момента t_1 . Для случайного потока без последействия условная вероятность поступления требований в промежутке $[t_1, t_2]$, вычисленная при любых предположениях о течении процесса обслуживания требований до момента t_1 , равна безусловной

$$P_i([t_1, t_2])_{t < t_1} = P_i([t_1, t_2]). \quad (3)$$

К основным характеристикам случайного потока относят ведущую функцию, параметр и интенсивность. Ведущая функция случайного потока $\bar{x}(0, t)$, есть математическое ожидание числа требований в промежутке $[0, t)$. Функция $\bar{x}(0, t)$ - неотрицательная, неубывающая, в практических задачах теории распределения информации непрерывна и принимает только конечные значения.

Параметр потока $\lambda(t)$ в момент времени t есть предел отношения вероятности поступления не менее одного требования в промежутке $[t, t + \Delta t]$ к величине этого промежутка Δt при $\Delta t \rightarrow 0$

$$\lambda(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P_{k \geq 1}(t, t + \Delta t)}{\Delta t}. \quad (4)$$

Параметр потока определяет плотность вероятности наступления вызывающего момента в момент t . Определение параметра равносильно предположению, что вероятность поступления хотя бы одного требования в промежутке $[t, t + \Delta t]$ с точностью до бесконечно малой величины пропорциональна промежутку и параметру потока $\lambda(t)$:

$$P_{k \geq 1}(t, t + \Delta t) = \lambda(t)\Delta t + o(\Delta t). \quad (5)$$

Для стационарных потоков вероятность поступления требований не зависит от времени, т. е. $P_{k \geq 1}(t, t + \Delta t) = P_{k \geq 1}(\Delta t)$, поэтому параметр стационарного потока постоянен.

Соответственно получаем

$$P_{k \geq 1}(\Delta t) = \lambda \Delta t + o(\Delta t). \quad (6)$$

Интенсивность стационарного потока μ есть математическое ожидание числа требований в единицу времени.

Если интенсивность характеризует поток требований, то параметр - поток вызывающих моментов. Поэтому всегда $\mu(t) \geq \lambda(t)$, а равенство имеет место только для ординарных потоков, когда в каждый вызывающий момент поступает только одно требование.

2. Моделирование простейшего потока

Для простейшего потока требований длины промежутков времени между последовательными требованиями потока $z_i = t_i - t_{i-1} > 0$ распределены по показательному закону с тем же параметром λ :

$$P(z < t) = F(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t}, & t > 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases} \quad (7)$$

Это утверждение позволяет моделировать простейший поток требований на заданном промежутке времени при помощи метода Монте-Карло, в основе которого лежит следующая теорема.

Если x_i – случайные числа, равномерно распределенные на $(0, 1)$, то возможное значение x_i получаемой случайно непрерывной величины X с заданной функцией распределения $F(x)$, соответствующее r_i , является корнем уравнения

$$F(x_i) = r_i. \quad (8)$$

Согласно этой теореме для получения последовательности случайных значений z_i , распределенных по показательному закону с параметром λ , требуется для каждого случайного числа $r_i(0,1)$, получаемого на ПЭВМ генератором псевдослучайных чисел, решить уравнение

$$1 - e^{-\lambda z_i} = r_i, \quad i = 1, 2, \dots \quad (9)$$

Решая это уравнение относительно z_i , имеем

$$z_i = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - r_i) \quad (10)$$

или

$$z_i = -\frac{1}{\lambda} \ln r_i, \quad i = 1, 2, \dots \quad (11)$$

3. Порядок выполнения работы

3.1. Сгенерировать случайные равномерно распределённые числа $r_i(0,1)$.

3.2. Вычислить $\lambda = 10 * m / N_n$ (треб/мин); где N_n – номер по журналу, m – номер подгруппы.

3.3. По формуле

$$Z_i = -\frac{1}{\lambda} \ln(r_i),$$

где $i = 1, 2, \dots$, получить Z_i для промежутков между требованиями.

3.4. На промежутке $[T_1, T_2]$, $T_1 = N_n + 1$, $T_2 = N_n + 5$ мин., получить последовательность t_k моментов поступления требований, где

$$t_k = T_1 + \sum_{i=1}^k Z_i$$

до тех пор, пока $t_k \leq T_2$

Полученные результаты занести в таблицу 1.

Таблица 1

r_i	Z_i	t_k
r_1	z_1	t_1
r_2	z_2	t_2
.	.	.

3.5. Провести статистическую обработку полученных результатов, для этого разделить заданный интервал на 25 равных промежутков длиной

$$\tau = \frac{T_2 - T_1}{25} \text{ (мин).}$$

Для каждого промежутка определить $x(\tau)$ – количество требований, попавших в промежуток длиной τ , занести в таблицу 2.

Таблица 2

№ интервала	1	2	...	25
$x_N(\tau)$				

Из таблицы 2 определить параметры статистического распределения случайной величины и занести их в таблицу 3.

Таблица 3

$x_k(\tau)$	0	1	2	...	k
n_k	n_1	n_2	n_3	...	k

$\sum n_k = N$, где n_k – количество интервалов, в которое попало k требований.

3.6. Определить модельное значение параметра потока:

$$a = \bar{x}(\tau) = \frac{1}{N} \sum_k x_k(\tau) n_k$$

– мат. ожидание числа требований в k интервале, отсюда следует

$$a = \bar{\lambda} \tau \Rightarrow \bar{\lambda} = \frac{a}{\tau}.$$

3.7. Для заданного (λ) и модельного значения ($\bar{\lambda}$) определить:

1. Вероятность отсутствия требования $P_0(t)$ за промежуток $t = T_2 - T_1$.
2. Вероятность поступления одного требования $P_1(t)$.
3. Вероятность поступления четырёх требований $P_4(t)$.
4. Вероятность поступления не менее пяти требований $P_{\geq 5}(t) = 1 - (P_0 + P_1 + P_2 + P_3 + P_4)$.
5. Вероятность поступления менее трёх требований $P_{< 3}(t) = P_0 + P_1 + P_2$.
6. Вероятность поступления не более семи требований $P_{\leq 7}(t) = P_0 + \dots + P_7$.
7. Вероятность, что промежуток между требованием z_k
 $P[0,1 < z_k < 0,5] = F(0,5) - F(0,1)$.

3.8. Вывод.

4. Контрольные вопросы

1. По каким свойствам классифицируются случайные потоки?
2. Дать определение свойствам: стационарность; ординарность; отсутствие последствия.
3. Дать определения числовым характеристикам случайных потоков: параметр потока λ ; интенсивность потока μ ; ведущая функция потока.
4. Для каких потоков совпадают значения параметра потока и интенсивности: $\lambda = \mu$?
5. По какому закону распределён промежуток между соседними требованиями в простейшем потоке?
6. По какому закону распределена случайная величина, характеризующая количество требований простейшего потока, попавших в некоторый промежуток?

Алгоритмы получения псевдослучайных чисел.

Алгоритм середины квадратов Неймана

Первый алгоритм для получения псевдослучайных чисел был предложен Дж. Фон Нейманом в 1951 г. Он называется методом середины квадратов. Поясним его на примере.

Пусть задано случайно выбранное 4-значное число

$$R_0 = 0.9876.$$

Возведя его в квадрат, получим 8-значное число

$$R_0^2 = 0.97\textbf{5353}76.$$

Выбрав четыре средних цифры этого числа (они подчеркнуты), получим следующее псевдослучайное число:

$$R_1 = 0.5353.$$

Повторив операцию возведения в квадрат $R_1^2 = 0.28\textbf{6546}09$ и процедуру выбора средних цифр числа R_1^2 , получим очередное псевдослучайное число:

$$R_2 = 0.6546.$$

Действуя аналогично, далее получим

$$R_2^2 = 0.42\textbf{8501}16, \quad R_3 = 0.8501,$$

$$R_3^2 = 0.72\textbf{2670}01, \quad R_4 = 0.2670,$$

$$R_4^2 = 0.07\textbf{1289}00, \quad R_5 = 0.1289 \text{ и т.д.}$$

Таким образом, получен очень простой рекуррентный алгоритм генерирования псевдослучайных точек, который называется *методом Неймана* или *методом серединных квадратов*. Для запуска (или инициализации) алгоритма достаточно задать некоторое произвольное начальное (или *стартовое*) число R_0 . Разным *стартовыми числами*, вообще говоря, будут соответствовать разные последовательности чисел.

Но этот алгоритм не оправдал себя: получалось больше чем нужно для равномерного распределения малых значений R_i . Кроме того, весьма часто последовательность случайных чисел оказывается слишком короткой, т.е. после некоторого R_i числа начинают повторяться.

Но, что еще хуже, в последовательности может вообще отсутствовать случайность. Посмотрим, например, что будет, если в качестве начального числа выбрано $R_0=0.4500$.

В этом случае получим следующую последовательность:

$$R_0^2 = 0.20\textbf{2500}00, \quad \rightarrow \quad R_1 = 0.2500,$$

$$R_1^2 = 0.06\textbf{2500}00, \quad \rightarrow \quad R_2 = 0.2500,$$

$$R_2^2 = 0.06\textbf{2500}00, \quad \rightarrow \quad R_3 = 0.2500 \text{ и т.д.,}$$

т.е. числа в последовательности вообще не меняются.

Задача 1.

Сгенерировать базовую последовательность N случайных чисел методом Неймана (срединых квадратов). $N=6$, $R_0=0,5836$.

$$R_0=0,5836$$

$$R_0^2=0,34058896$$

$$R_1=0,0588$$

$$R_1^2=0,00345744$$

$$R_2=0,3457$$

$$R_2^2=0,11950849$$

$$R_3=0,9508$$

$$R_3^2=0,90402064$$

$$R_4=0,4020$$

$$R_4^2=0,16160400$$

$$R_5=0,1604$$

Модифицированный метод Неймана

Значительно лучшие результаты дает определенная *модификация* алгоритма Неймана, состоящая в том, что вначале произвольно выбирается пара чисел R_0 и R_1 . Составляется их произведение R_0R_1 , и его средние цифры используются в качестве числа R_2 . Процесс повторяется для R_1, R_2 с получением R_3 и т. д.

Такой рекуррентный метод дает меньшее отклонение образуемых псевдослучайных чисел от равномерного распределения, нежели метод Неймана.

Задача 2.

Сгенерировать базовую последовательность N случайных чисел модифицированным методом Неймана. $N=6$, $R_0=0,5836$; $R_1=0,2176$.

$$R_0R_1=0,5836 \cdot 0,2176=0,12699136, \quad R_2=0,6991$$

$$R_1R_2=0,2176 \cdot 0,6991=0,15212416, \quad R_3=0,2124$$

$$R_2R_3=0,6991 \cdot 0,2124=0,14848884, \quad R_4=0,8488$$

$$R_3R_4=0,2124 \cdot 0,8488=0,18028512, \quad R_5=0,0285$$

$$R_4R_5=0,8488 \cdot 0,0285=0,02419080, \quad R_6=0,4190$$

$$R_5R_6=0,0285 \cdot 0,4190=0,01194150, \quad R_7=0,1941$$

Варианты заданий

N_n	m	R₀	R₁
1	1	0,4913	0,2385
2	2	0,5218	0,4692
3	3	0,1324	0,3467
4	4	0,2871	0,5263
5	5	0,3564	0,2164
6	2	0,7291	0,9756
7	3	0,8259	0,3285
8	4	0,6677	0,1937
9	1	0,9278	0,2864
10	3	0,1952	0,9173
11	2	0,1298	0,2658
12	1	0,2283	0,3645
13	5	0,2464	0,2164
14	3	0,7513	0,9825
15	5	0,8421	0,5698
16	1	0,4379	0,8124
17	3	0,9895	0,6432
18	5	0,5372	0,6459
19	1	0,2617	0,3265
20	5	0,4298	0,6498
21	2	0,3974	0,5282
22	5	0,3542	0,9363
23	3	0,6319	0,1747
24	1	0,6979	0,2645
25	5	0,5253	0,3298
26	4	0,4821	0,2154
27	4	0,3923	0,8754
28	2	0,3659	0,6598
29	3	0,5487	0,2356
30	1	0,8765	0,1929