

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования

**«ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ» (ТУСУР)**

Факультет дистанционного обучения (ФДО)

А. А. Мицель

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ И ИМИТАЦИОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

Лабораторный практикум

Томск 2021

Корректор: А. Н. Миронова

Мицель А. А.

Математическое и имитационное моделирование экономических процессов : лабораторный практикум / А. А. Мицель. – Томск : ФДО, ТУСУР, 2021. – 150 с.

В пособии приведено описание пяти лабораторных работ по дисциплине «Математическое и имитационное моделирование экономических процессов». Первые три работы связаны с детерминированными процессами: «Производственные функции», «Балансовые модели», «Моделирование финансовых операций». Другие две работы связаны с имитационным моделированием: «Биржевой игрок» и «Способы построения моделирующих алгоритмов систем массового обслуживания».

К каждой лабораторной работе дана краткая теория, включающая основные понятия и описание существующих в данной области решений, приводятся примеры выполнения заданий в пакете Mathcad.

Лабораторный практикум предназначен для студентов бакалавриата направления подготовки 09.03.03 «Прикладная информатика» по профилю «Прикладная информатика в экономике». Кроме того, практикум может быть использован студентами других смежных экономических специальностей.

© Мицель А. А., 2021

© Оформление.

ФДО, ТУСУР, 2021

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение.....	5
1 Лабораторная работа № 1 «Производственные функции»	6
1.1 Однофакторная модель.....	6
1.2 Двухфакторная модель	7
1.3 Свойства производственных функций.....	9
1.4 Предельные (маржинальные) и средние значения производственной функции	11
1.5 Примеры выполнения заданий в Mathcad	14
1.6 Задания к лабораторной работе № 1	24
2 Лабораторная работа № 2 «Балансовые модели»	26
2.1 Коэффициенты прямых и полных материальных затрат.....	30
2.2 Свойства матрицы прямых и полных материальных затрат	32
2.3 Модель затрат труда	35
2.4 Модель фондоемкости продукции	39
2.5 Задание к лабораторной работе № 2	42
3 Лабораторная работа № 3 «Моделирование финансовых операций»	48
3.1 Потоки платежей	48
3.1.1 Конечная годовая рента.....	49
3.1.2 Определение параметров годовой ренты	52
3.1.3 Общая рента.....	53
3.1.4 «Вечная» годовая рента	55
3.1.5 Объединение и замена рент	56
3.1.6 Примеры решения типовых задач в Mathcad	57
3.2 Доходность финансовой операции.....	66
3.2.1 Различные виды доходности операций.....	66
3.2.2 Учет налогов	67
3.2.3 Учет инфляции	68

3.2.4 Поток платежей и его доходность.....	69
3.3 Кредитные расчеты	71
3.3.1 Расходы по обслуживанию долга.....	71
3.3.2 Формирование погасительного фонда по более высоким процентам.....	74
3.3.3 Потребительский кредит и его погашение	76
3.3.4 Льготные кредиты	77
3.4 Задания к лабораторной работе № 3	78
4 Лабораторная работа № 4 «Биржевой игрок»	88
4.1 Описание модели.....	88
4.2 Результаты моделирования	89
4.3 Задания к лабораторной работе № 4	92
5 Лабораторная работа № 5 «Способы построения моделирующих алгоритмов систем массового обслуживания»	97
5.1 Поток неперекрывающихся заявок	97
5.2 Поток перекрывающихся заявок	99
5.2.1 Проводка заявок без приоритета	99
5.2.2 Проводка заявок с приоритетом	100
5.3 Задания к лабораторной работе № 5	110
6 Требования к оформлению отчета по лабораторной работе	112
Литература	113
Приложение А Пример отчета по лабораторной работе № 3.....	114
Приложение Б Пример отчета по лабораторной работе № 4	127
Приложение В Пример отчета по лабораторной работе № 5.....	135

ВВЕДЕНИЕ

Основная цель лабораторного практикума заключается в получении практических навыков решения задач по математическому и имитационному моделированию экономических процессов.

В лабораторном практикуме приведено описание 5 лабораторных работ по следующим темам: «Производственные функции», «Балансовые модели», «Моделирование финансовых операций», «Биржевой игрок», «Способы построения моделирующих алгоритмов систем массового обслуживания». В каждой работе приводятся краткие теоретические сведения, варианты заданий. Работы «Производственные функции», «Балансовые модели» и «Моделирование финансовых операций» можно выполнять с помощью пакета Mathcad или Excel. В практикуме приведены примеры расчетов в пакете Mathcad.

Следует обратить внимание, что в работе «Моделирование финансовых операций» рассматриваются 3 темы: «Потоки платежей», «Доходность финансовой операции» и «Кредитные расчеты». Соответственно, в задании приводятся задачи по этим темам.

Результатом работ № 4 и 5 должны стать компьютерные программы для моделирования. Программы могут быть написаны как в среде Mathcad, так и в других средах на языке высокого уровня. В отчетах по этим работам приводятся результаты моделирования в виде скриншотов программ с комментариями и листинги программ.

Выбор варианта лабораторной работы осуществляется по общим правилам с использованием следующей формулы:

$$V = (N \times K) \operatorname{div} 100,$$

где V – искомый номер варианта,

N – общее количество вариантов,

K – код варианта,

div – целочисленное деление.

При $V = 0$ выбирается максимальный вариант.

1 ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 1

«ПРОИЗВОДСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ»

1.1 Однофакторная модель

Производственная функция (ПФ) – это функция, независимая переменная которой принимает значения объемов затрачиваемого или используемого ресурса (фактора производства), а зависимая переменная – значения объемов выпускаемой продукции:

$$y = f(x, a), \quad (1.1)$$

где $x \geq 0$, $y \geq 0$, a – вектор параметров.

В *микроэкономической* теории принято считать, что y – это максимально возможный объем выпуска продукции, если ресурс затрачивается или используется в количестве x единиц.

ПФ могут иметь разные области использования. Принцип «затраты – выпуск» может быть реализован как на микро-, так и на макроэкономическом уровне. Сначала остановимся на микроэкономическом уровне. Например, ПФ $y = ax^b$ может быть использована для описания взаимосвязи между величиной затрачиваемого или используемого ресурса x в течение года на отдельном предприятии (в фирме) и годовым выпуском продукции y этого предприятия (фирмы). В роли производственной системы здесь выступает отдельное предприятие (фирма) – имеем *микроэкономическую* ПФ (МИПФ). На микроэкономическом уровне в роли производственной системы может выступать также отрасль или межотраслевой производственный комплекс.

ПФ может быть использована для описания взаимосвязи между годовыми затратами труда в масштабе региона или страны в целом и годовым конечным выпуском продукции (или доходом) этого региона или страны в целом. Здесь в роли производственной системы выступает регион

или страна в целом (точнее, хозяйственная система региона или страны) – имеем *макроэкономический* уровень и *макроэкономическую* ПФ (МАПФ). МАПФ строятся и активно используются для решения всех трех типов задач (анализа, планирования и прогнозирования).

На микроэкономическом уровне затраты и выпуск могут измеряться как в натуральных, так и в стоимостных единицах (показателях). Годовые затраты труда могут быть измерены в человеко-часах (объем человеко-часов – натуральный показатель) или в рублях выплаченной заработной платы (ее величина – стоимостный показатель); выпуск продукции может быть представлен в штуках или других натуральных единицах (тоннах, метрах и т. п.) либо в виде своей стоимости.

На *макроэкономическом* уровне затраты и выпуск измеряются, как правило, в стоимостных показателях и представляют собой стоимостные (ценностные) агрегаты, т. е. суммарные величины произведений объемов затрачиваемых (или используемых) ресурсов и выпускаемых продуктов на их цены.

1.2 Двухфакторная модель

Производственная функция двух переменных – это функция, независимые переменные x_1, x_2 которой принимают значения объемов затрачиваемых или используемых ресурсов, а значение функции имеет смысл величин объемов выпуска:

$$y = f(x) = f(x_1, x_2, a). \quad (1.2)$$

В формуле (1.2) y ($y \geq 0$) – скалярная, а x – векторная величина ($x \geq 0$), x_1, x_2 – координаты вектора x , т. е. $f(x_1, x_2)$ есть числовая функция двух переменных x_1, x_2 . В связи с этим ПФ $f(x_1, x_2, a)$ называют двух-ресурсной или двухфакторной ПФ.

Для отдельного предприятия (фирмы), выпускающего однородный продукт, ПФ может связывать объем выпуска (в натуральном или стоимостном выражении) с затратами рабочего времени по различным видам трудовой деятельности, различных видов сырья, комплектующих изделий, энергии, основного капитала (измеренных обычно в натуральных единицах). ПФ такого типа характеризуют действующую технологию предприятия (фирмы).

При построении ПФ для региона или страны в целом в качестве величины годового выпуска Y (будем обозначать объем выпуска, или дохода, на макроуровне большой буквой) чаще берут совокупный продукт (доход) региона или страны, исчисляемый обычно в неизменных, а не в текущих ценах. В качестве ресурсов рассматривают основной капитал ($x_1 = K$ – объем используемого в течение года основного капитала), живой труд ($x_2 = L$ – количество единиц затрачиваемого в течение года живого труда), исчисляемые обычно в стоимостном выражении. Таким образом строят двухфакторную ПФ $y = f(K, L, a)$. От двухфакторных ПФ переходят к трехфакторным. В качестве третьего фактора иногда вводят объемы используемых природных ресурсов.

Для моделирования отдельного региона или страны в целом (т. е. для решения задач на макроэкономическом, а также и на микроэкономическом уровне) часто используется ПФ Кобба – Дугласа (ПФКД) $y = a_0 K^{a_1} L^{a_2}$, где a_0, a_1, a_2 – параметры ПФ. Это положительные постоянные (часто a_1 и a_2 таковы, что $a_1 + a_2 = 1$). ПФКД принадлежит к классу мультипликативных ПФ.

Линейная ПФ (ЛПФ) имеет вид: $y = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2$ (двухфакторная). ЛПФ принадлежит к классу аддитивных ПФ. Переход от мультипликативной ПФ к аддитивной осуществляется с помощью операции логарифмирования. Для двухфакторной мультипликативной ПФ

$$y = a_0 x_1^{a_1} x_2^{a_2}$$

этот переход имеет вид: $\ln y = \ln a_0 + a_1 \ln x_1 + a_2 \ln x_2$. Полагая $\ln y = w$; $\ln x_1 = v_1$; $\ln x_2 = v_2$, получаем аддитивную ПФ: $w = \ln a_0 + a_1 v_1 + a_2 v_2$.

Выполняя обратный переход, из аддитивной ПФ получим мультипликативную ПФ.

Если сумма показателей степени в ПФ Кобба – Дугласа $y = a_0 K^{a_1} L^{a_2}$ равна единице ($a_1 + a_2 = 1$), то двухфакторная модель может быть представлена как однофакторная:

$$z = a_0 k^{a_1},$$

где $z = \frac{y}{L}$ – производительность труда; $k = \frac{K}{L}$ – капиталовооруженность труда.

1.3 Свойства производственных функций

ПФ должна удовлетворять ряду свойств:

1. $f(0, 0) = 0$; $f(0, x_2) = f(x_1, 0) = 0$.
2. $\forall x(1) > x(0) \Rightarrow f(x(1)) > f(x(0))$; $\frac{\partial f(x)}{\partial x_i} > 0$; $i = 1, 2$;

$$x(k) = (x_1(k), x_2(k)).$$

3. $\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i^2} \leq 0$; $\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_2} \geq 0$; ($i = 1, 2$).

4. $f(tx_1, tx_2) = t^p f(x_1, x_2)$.

5. Матрица Гессе, составленная из вторых производных производственной функции:

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{pmatrix}$$

отрицательно определена.

Свойство 1 означает, что без ресурсов (даже при отсутствии хотя бы одного из ресурсов) нет выпуска.

Свойство 2 означает, что с ростом затрат хотя бы одного ресурса объем выпуска растет. Положительность первой частной производной означает, что с ростом затрат одного ресурса при неизменном количестве другого ресурса объем выпуска растет.

Свойство 3 (вторая частная производная ПФ неположительна) означает, что с ростом затрат одного (1-го) ресурса при неизменном количестве другого ресурса величина прироста выпуска на каждую дополнительную единицу 1-го ресурса не растет (закон убывающей эффективности).

Неотрицательность второй смешанной производной означает, что при росте одного ресурса предельная эффективность другого ресурса возрастает. Если выполнены условия 3, то график ПФ есть поверхность, расположенная в неотрицательном октанте $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, y \geq 0$ трехмерного пространства и выпуклая вверх. Вообще геометрический образ ПФ должен прежде всего ассоциироваться с выпуклой горкой, крутизна которой убывает, если точка $(x_1 x_2)$ уходит в плоскости $Ox_1 x_2$ «на северо-восток».

Свойство 4 означает, что ПФ является однородной функцией (ОФ) степени $p > 0$. При $p > 1$ с ростом масштаба производства в t раз (число $t > 1$), т. е. с переходом от вектора x к вектору tx объем выпуска возрастает в t^p ($> t$) раз, т. е. имеем рост эффективности производства при росте масштаба производства. При $p < 1$ имеем падение эффективности производства при росте масштаба производства. При $p = 1$ имеем постоянную

эффективность производства при росте его масштаба (или имеем независимость удельного выпуска от масштаба производства – в английской терминологии *constant returns to scale*).

Свойство 5 означает, что ПФ является выпуклой вверх функцией.

Для ПФКД $y = a_0 x_1^{a_1} x_2^{a_2}$ ($a_1 + a_2 = 1$) свойства 1–5 выполняются.

Для ЛПФ $y = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2$ ($a_0 > 0, a_1 > 0, a_2 > 0$) свойство 1 (при $a_0 = 0$) и свойство 4 не выполняются.

Множество точек (линия) ℓ_q уровня $q = f(x_1, x_2)$ ($q > 0$ – действительное число) ПФ $y = f(x_1, x_2)$ называется *изоквантой или линией уровня* ПФ. Иными словами, линия уровня q – это множество точек, в котором ПФ постоянна и равна q .

1.4 Предельные (маржинальные) и средние значения производственной функции

Производительность ресурса. Пусть задана ПФ $y = f(x) = f(x_1, x_2)$.

Выражение

$$A_i = \frac{f(x)}{x_i} \quad (1.3)$$

называется средней производительностью i -го ресурса (фактора производства) (СПФ) или средним выпуском по i -му ресурсу (фактору производства).

Средние производительности $\frac{y}{K}$ и $\frac{y}{L}$ основного капитала и труда называют *капиталоотдачей (фондоотдачей)* и *производительностью труда* соответственно. Обратные дроби $f = \frac{K}{y}$ и $t = \frac{L}{y}$ называются соответственно *капиталоемкостью* и *трудоемкостью выпуска*.

Предельной (маржинальной) производительностью i -го ресурса (или предельным выпуском по i -му ресурсу) называют первую частную производную $M_i = \frac{\partial f(x)}{\partial x_i}$ ($i=1,2$). При малых Δx_i имеем приближенное равенство

$$M_i = \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} \approx \frac{\Delta_i f(x)}{\Delta x_i} \quad i=1,2. \quad (1.4)$$

Следовательно, M_i показывает, на сколько единиц увеличится объем выпуска y , если объем затрат x_i i -го ресурса вырастет на одну единицу при неизменных объемах другого затрачиваемого ресурса.

Эластичность. $E_i = \frac{M_i}{A_i} = \frac{x_i}{f(x)} \frac{\partial f(x)}{\partial x_i}$ $i=1,2$ – отношение предельной производительности M_i i -го ресурса к его средней производительности A_i называется эластичностью выпуска по i -му ресурсу.

Сумма $E_1 + E_2 = E_x$ называется *эластичностью производства*.

Для эластичности приближенно можно записать

$$E_i = \frac{M_i}{A_i} = \frac{\Delta_i f(x)}{f(x)} / \frac{\Delta x_i}{x_i},$$

т. е. E_i приближенно показывает, на сколько процентов увеличится выпуск y , если затраты i -го ресурса увеличатся на один процент при неизменных объемах другого ресурса.

Предельная норма замены (замещения) ресурсов. Пусть $y = f(x)$ – ПФ. Предельной нормой замены (замещения) i -го ресурса (фактора производства) j -м называется выражение

$$R_{ij} = -\frac{\partial x_j}{\partial x_i} = \frac{\partial f / \partial x_i}{\partial f / \partial x_j} > 0 \quad (i, j=1,2) \quad (1.5)$$

при постоянной y .

Для двухфакторной ПФ справедливо равенство

$$R_{12} = \frac{E_1 x_2}{E_2 x_1}, \quad (1.6)$$

т. е. предельная норма замены первого ресурса вторым равна отношению эластичностей выпуска по первому и второму ресурсам, умноженному на отношение объема второго ресурса к объему первого ресурса. Если $x_1 = K$, $x_2 = L$, то норма замены основного капитала трудом равна отношению эластичностей выпуска по основному капиталу и труду, деленному на капиталовооруженность труда.

Заменяя бесконечно малые приращения dx_i на конечные Δx_i , можно приближенно записать выражение для предельной нормы замещения ресурсов (для двухфакторной ПФ):

$$R_{12} \approx -\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1}. \quad (1.7)$$

На основании (1.5) предельная норма замены ресурсов R_{12} (приближенно) показывает, на сколько единиц надо увеличить затраты второго ресурса (при неизменном выпуске $y = a$), если затраты первого ресурса уменьшатся на одну единицу.

Эластичность замещения ресурсов. Эластичностью замещения ресурсов называется выражение

$$E_{ij} = \frac{d \ln(x_j / x_i)}{d \ln R_{ij}} = -\frac{d(x_j / x_i) / (x_j / x_i)}{dR_{ij} / R_{ij}} \approx -\frac{\Delta(x_j / x_i) / (x_j / x_i)}{\Delta R_{ij} / R_{ij}}. \quad (1.8)$$

Эластичность замещения i -го ресурса j -м ресурсом приближенно показывает, на сколько процентов нужно увеличить отношение ресурсов (x_j / x_i) при увеличении нормы замещения i -го ресурса j -м на 1% для того, чтобы объем выпуска продукции не изменился. В частности, эластичность замещения труда капиталом приближенно показывает, на сколько процентов нужно увеличить фондовооруженность труда при увеличении

нормы труда капиталом на 1% для того, чтобы объем выпуска продукции не изменился.

1.5 Примеры выполнения заданий в Mathcad

Пример 1.1. Зависимость количества выпускаемых холодильников y от затрачиваемого рабочего времени L (у.е.) имеет вид:

$$y = a \cdot L^b, \text{ где } a = 50, b = 0.5.$$

Построить график функции $y(L)$ и ее производной. Рассчитать предельную и среднюю производительность труда (M и A) и трудоемкость ($t = \frac{1}{A} = \frac{L}{y}$) выпуска, а также эластичность выпуска E по труду.

Решение

Обратимся к рисункам 1.1 и 1.2.

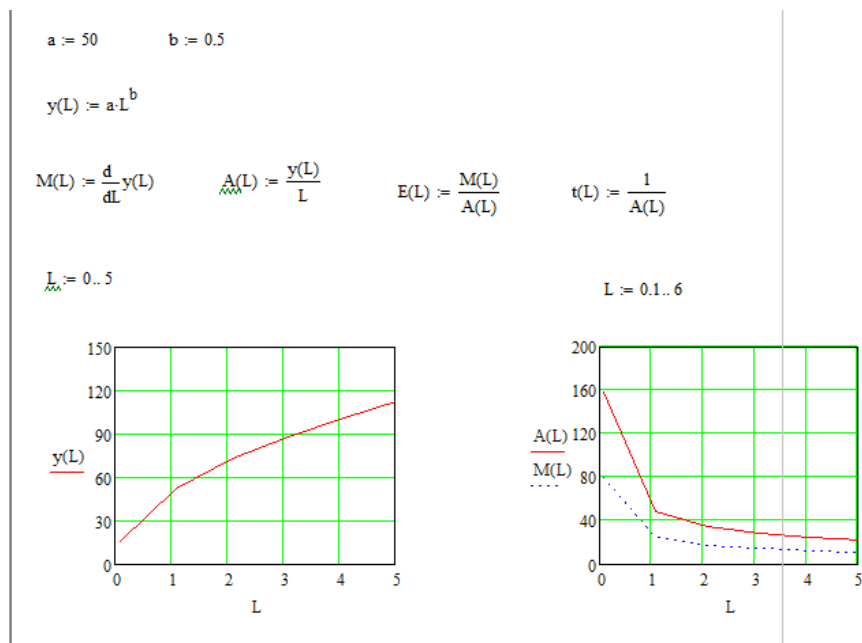


Рис 1.1 – График производственной функции и ее характеристик

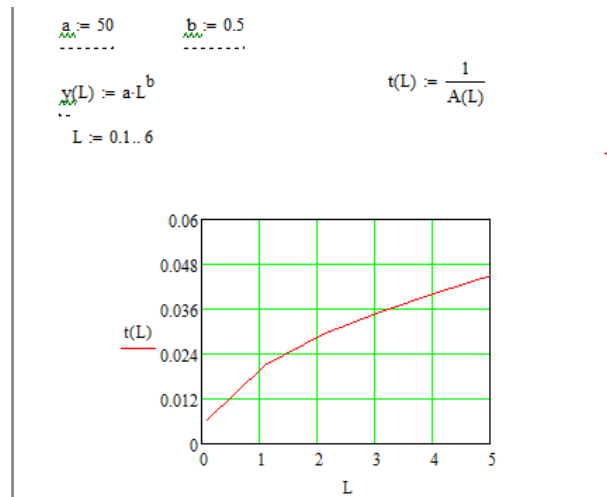


Рис. 1.2 – Трудоемкость продукции

Из рисунка 1.1 следует:

1. С ростом затрат рабочего времени L объем выпуска продукции растет.

2. Предельная производительность труда M с увеличением затрат рабочего времени L убывает. Это является отражением закона убывающей эффективности: *каждая дополнительная единица ресурса дает все меньший прирост объема выпускаемой продукции.*

3. Средняя производительность труда A также убывает с ростом L , оставаясь выше предельной производительности труда.

Рисунок 1.2 показывает, что с ростом трудовых затрат трудоемкость продукции возрастает.

Пример 1.2. В таблице представлена зависимость выпуска автомобилей от количества работающего оборудования.

Период	Количество работающего оборудования, у.е.	Объем выпуска автомобилей, шт.
1-й год	1	150
2-й год	2	198
3-й год	3	233
4-й год	4	261

Построить производственную функцию и рассчитать основные ее характеристики.

Решение

В качестве модели ПФ возьмем функцию

$$y = a \cdot K^b. \quad (1.9)$$

Параметры модели найдем с помощью метода наименьших квадратов. Предварительно преобразуем эту функцию с помощью операции логарифмирования. Получим

$$z = c + b \cdot v, \quad (1.10)$$

где $z = \ln y$, $v = \ln K$.

Запишем невязку для модели (1.10):

$$F = \sum_{i=1}^4 (z_i - c - b \cdot v_i)^2. \quad (1.11)$$

Параметры c и b будем искать из условия минимума невязки (1.11). Необходимое условие минимума (1.11) – это равенство нулю частных производных по c и b . В результате получим систему линейных уравнений относительно c и b :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^4 z_i &= 4 \cdot c + b \cdot \sum_{i=1}^4 v_i, \\ \sum_{i=1}^4 z_i v_i &= c \cdot \sum_{i=1}^4 v_i + b \cdot \sum_{i=1}^4 v_i^2 \end{aligned}$$

или в матричном виде

$$A \cdot x = g, \quad (1.12)$$

$$\text{где } A = \begin{pmatrix} 4 & \sum_{i=1}^4 v_i \\ \sum_{i=1}^4 v_i & \sum_{i=1}^4 v_i^2 \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^4 z_i \\ \sum_{i=1}^4 z_i v_i \end{pmatrix}.$$

Решаем систему (1.12), находим c и b , затем параметр $a = e^c$. Вычисления проводим с помощью математического пакета Mathcad.

$$\begin{aligned}
K &:= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} & y &:= \begin{pmatrix} 150 \\ 198 \\ 233 \\ 261 \end{pmatrix} & v &:= \ln(K) & z &:= \ln(y) & v &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0.693 \\ 1.099 \\ 1.386 \end{pmatrix} & z &= \begin{pmatrix} 5.011 \\ 5.288 \\ 5.451 \\ 5.565 \end{pmatrix} & v1 &:= v^2 \\
A_{1,1} &:= 4 & A_{1,2} &:= \sum v & A_{2,1} &:= A_{1,2} & A_{2,2} &:= \sum v1 & g_1 &:= \sum z & v1 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0.48 \\ 1.207 \\ 1.922 \end{pmatrix} \\
g_2 &:= z \cdot v \\
A &= \begin{pmatrix} 4 & 3.178 \\ 3.178 & 3.609 \end{pmatrix} & g &= \begin{pmatrix} 21.314 \\ 17.368 \end{pmatrix} & x &:= \text{lsolve}(A, g) & a &:= \exp(x_1) & b &:= x_2 \\
a &= 150.039 & b &= 0.4
\end{aligned}$$

Таким образом, получили ПФ $y = 150 \cdot K^{0.4}$. Исследования полученной ПФ проводим так же, как в примере 1.1.

Пример 1.3. Объем выпускаемой продукции в стоимостном выражении определяется через объем трудовых ресурсов и объем основных фондов формулой Кобба – Дугласа:

$$Y = 1000 \cdot K^{0.5} \cdot L^{0.4} \text{ (тыс. руб.)}.$$

- Построить график ПФ как функции K при фиксированных значениях $L = 30, 40, 50$ тыс. руб.
- Построить график ПФ как функции L при фиксированных значениях $K = 100, 150, 200$ тыс. руб.
- Рассчитать характеристики ПФ: предельные и средние производные M_i, A_i ресурсов, эластичности выпуска по труду E_L и по капиталу E_K , капиталоемкость $f = 1/A_K$ и трудоемкость выпуска $t = 1/A_L$.
- Построить изокванты $Y = 38980$ руб. и $Y = 50000$.
- Рассчитать капиталовооруженность труда $k = K/L$.

- Вычислить предельную норму замещения ресурсов R_{LK} , R_{KL} и эластичность замещения ресурсов E_{LK} , E_{KL} .
- Дать экономическую интерпретацию полученным результатам (рис. 1.3–1.7).

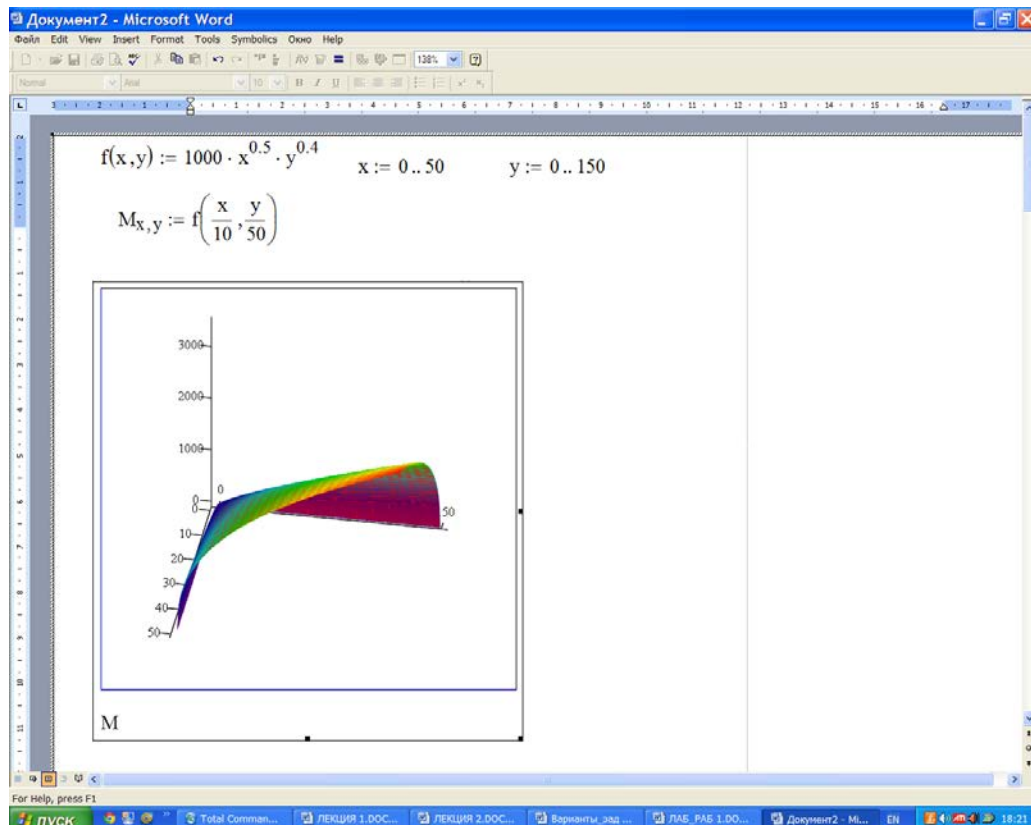


Рис. 1.3 – Трехмерный график ПФ

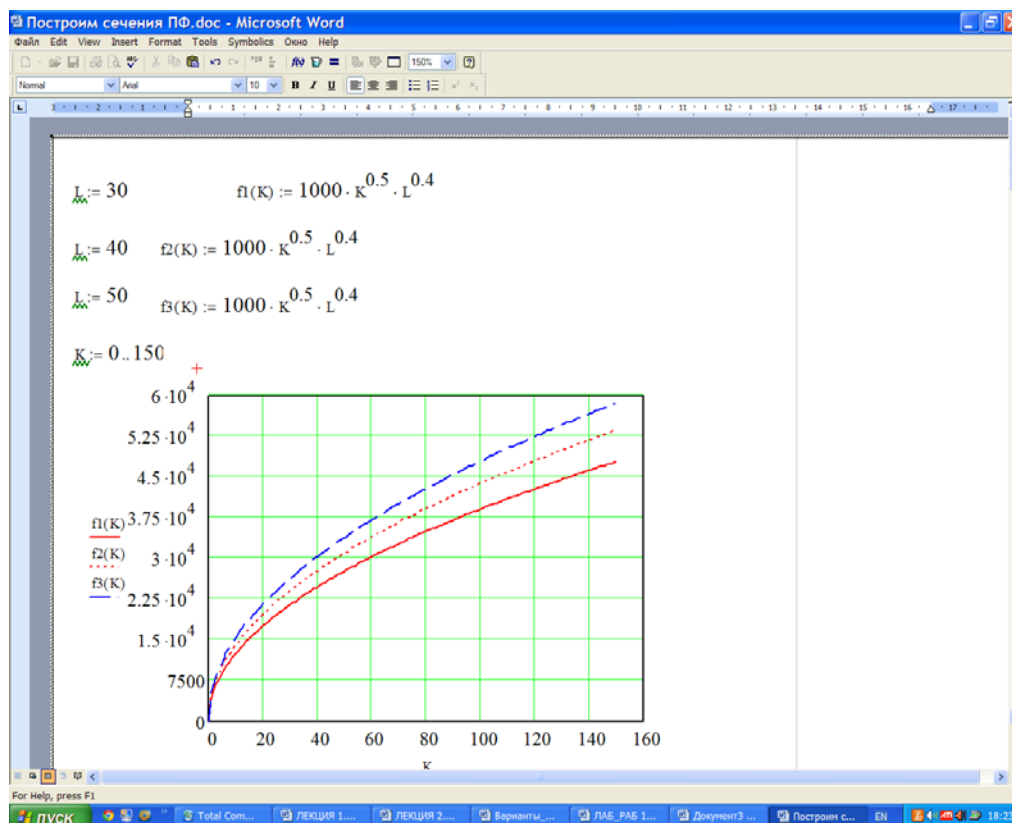


Рис. 1.4 – Сечения ПФ по K

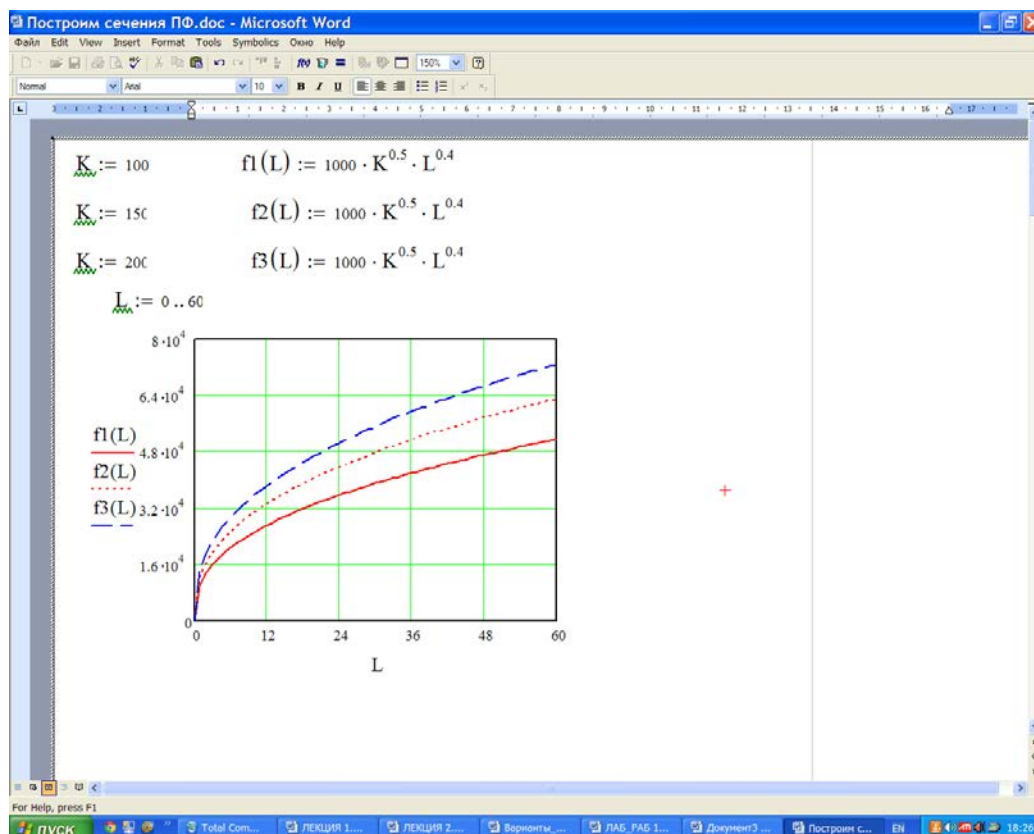


Рис. 1.5 – Сечения ПФ по L

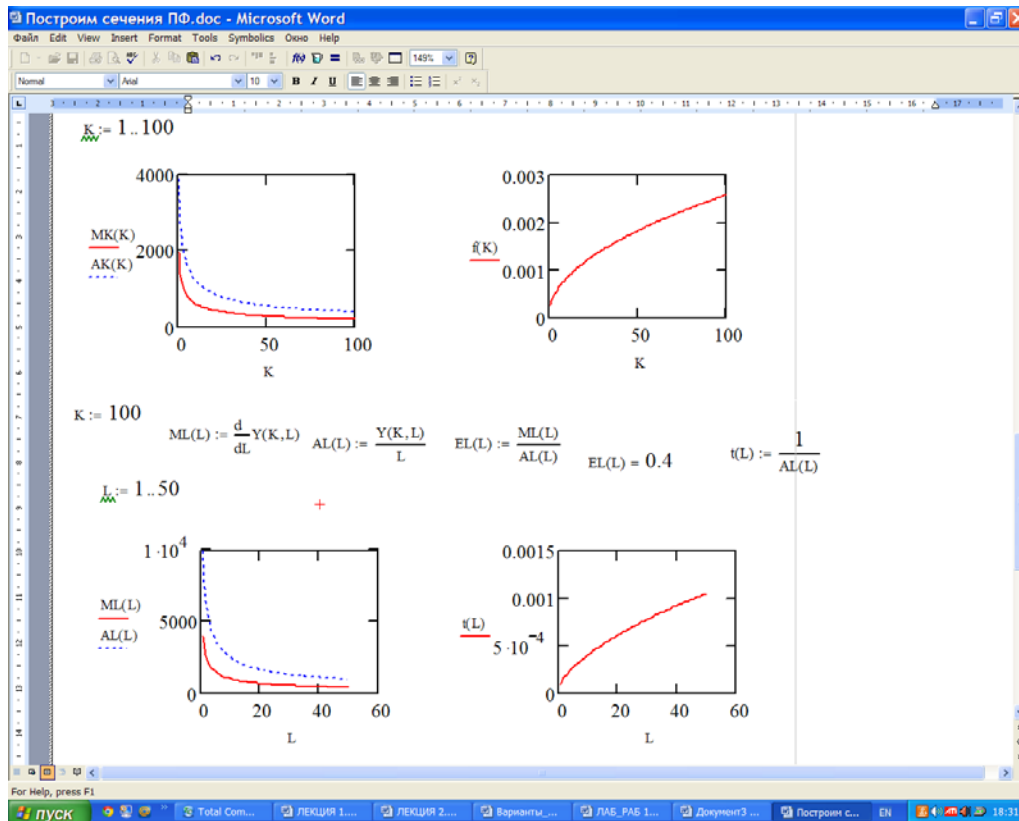


Рис. 1.6 – Расчет характеристик ПФ. Шаг 1

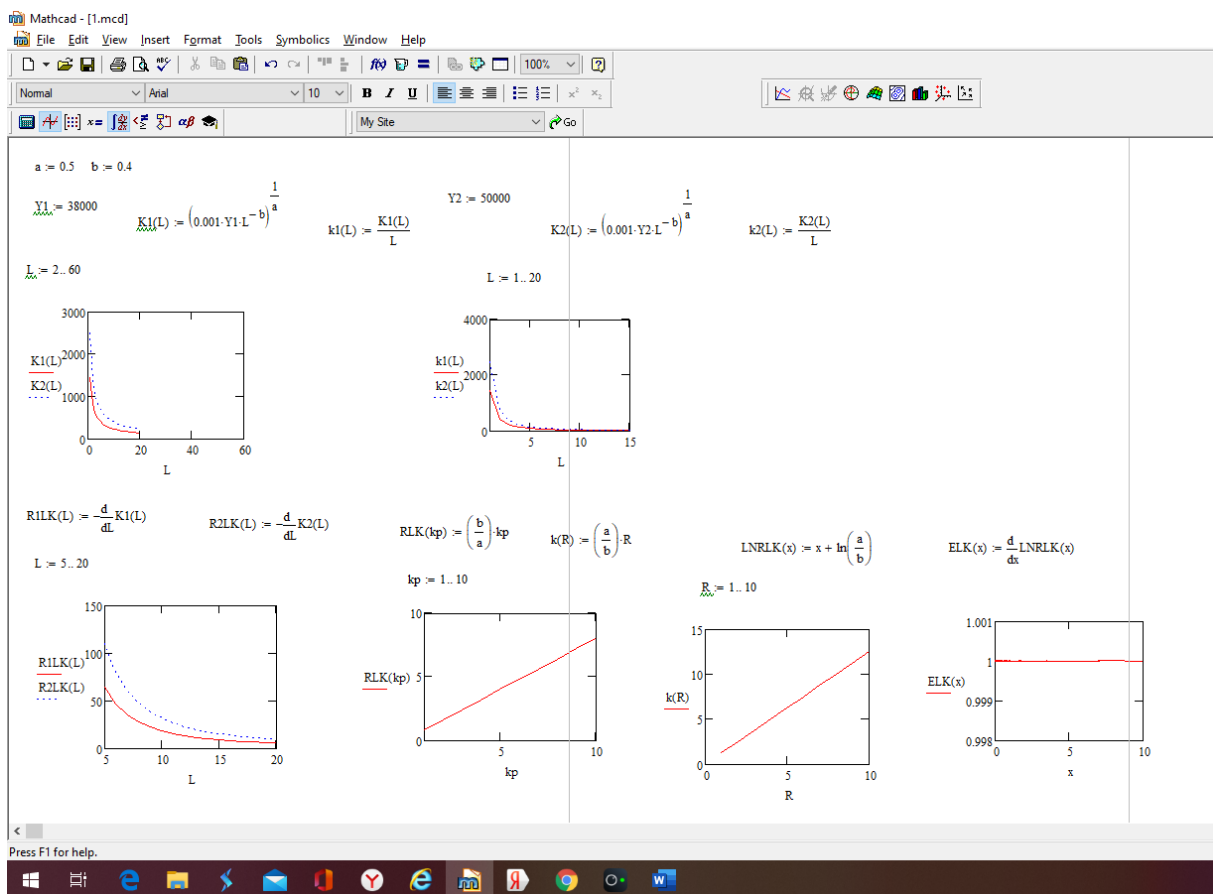


Рис. 1.7 – Расчет характеристик ПФ. Шаг 2

Дадим краткий комментарий к полученным результатам:

Двухмерная ПФ определена в первом квадранте и является выпуклой вверх по обоим переменным функцией.

С увеличением объема ресурсов объем производства растет.

При фиксированных значениях объема одного из ресурсов зависимость ПФ от второго ресурса является возрастающей по второму ресурсу, при этом чем больше значение фиксированного ресурса, тем выше кривая на графике.

Предельная и средняя производительности ресурсов являются убывающими функциями своих ресурсов, что отражает экономический закон убывающей эффективности производства. Средняя производительность выше предельной.

Капиталоемкость и трудоемкость выпуска продукции возрастают с ростом затрат ресурсов.

Построим изокванты и рассчитаем капиталовооруженность труда, предельную норму и эластичность замещения труда капиталом.

Экономический анализ полученных результатов:

Изокванта (или линия уровня) является убывающей функцией своего аргумента, т. е. при уменьшении затрат одного ресурса для сохранения объема производства необходимо увеличить затраты второго ресурса. Чем выше объем производства, тем выше график изокванты.

Капиталовооруженность труда уменьшается с увеличением затрат труда.

Предельная норма замещения труда капиталом уменьшается с ростом объема труда. Чем выше объем производства, тем выше график кривой предельной нормы замены труда капиталом.

Эластичность замещения труда капиталом равна единице и не зависит от затрат труда и капитала.

Пример 1.4. В таблице приведены значения объема выпуска для различных значений затрат ресурсов.

$\begin{matrix} \text{L} \\ \text{K} \end{matrix}$	50	60	70	80
10	31.518	35.162	38.569	41.786
20	41.589	46.396	50.892	55.138
30	48.912	54.566	59.854	64.846
40	54.877	61.220	67.153	72.754

Найти параметры ПФКД: $Y = a \cdot K^\alpha \cdot L^\beta$.

Решение

Выполним поиск параметров a , α , β с помощью пакета Mathcad. Для этого предварительно логарифмируем исходные данные, что эквивалентно переходу от нелинейной ПФ к линейной:

$$Z(a, \alpha, \beta) = \ln(Y) = \ln(a) + \alpha \cdot \ln(K) + \beta \cdot \ln(L).$$

Ищем параметры a , α , β путем минимизации невязки

$$F = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (Z_{ij} - c - \alpha \cdot x_i - \beta \cdot y_j)^2 \rightarrow \min,$$

где $Z = \ln(Y)$, $c = \ln(a)$, $x = \ln(K)$, $y = \ln(L)$;

$n = 4$ – число значений аргумента x ;

$m = 4$ – число значений аргумента y .

Минимизация невязки эквивалентна решению системы линейных уравнений относительно искоемых параметров c , α , β :

$$A \cdot p = g.$$

Здесь вектор $p = (c, \alpha, \beta)$ – искомый вектор параметров ПФ;

$g = (\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m Z_{ij}, \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m Z_{ij} \cdot x_i, \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m Z_{ij} \cdot y_j)$ – вектор правой части;

$$A = \begin{pmatrix} n \cdot m & m \cdot \sum_{i=1}^n x_i & n \cdot \sum_{j=1}^m y_j \\ m \cdot \sum_{i=1}^n x_i & m \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 & \sum_{j=1}^m y_j \cdot \sum_{i=1}^n x_i \\ n \cdot \sum_{j=1}^m y_j & \sum_{j=1}^m y_j \cdot \sum_{i=1}^n x_i & n \cdot \sum_{j=1}^m y_j^2 \end{pmatrix} - \text{матрица системы.}$$

Проведем расчет параметров ПФ путем минимизации невязки.

$$Y := \begin{pmatrix} 31.518 & 35.162 & 38.569 & 41.786 \\ 41.589 & 46.396 & 50.892 & 55.138 \\ 48.912 & 54.566 & 59.854 & 64.846 \\ 54.877 & 61.220 & 67.153 & 72.754 \end{pmatrix} \quad K := \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 30 \\ 40 \end{pmatrix} \quad L := \begin{pmatrix} 50 \\ 60 \\ 70 \\ 80 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} Z &:= \overrightarrow{\ln(Y)} \quad x := \overrightarrow{\ln(K)} \quad y := \overrightarrow{\ln(L)} \quad A_{1,1} := 16 \quad A_{1,2} := 4 \cdot \sum x \quad A_{1,3} := 4 \cdot \sum y \\ A_{2,1} &:= 4 \cdot \sum x \quad x1 := \overrightarrow{x^2} \quad A_{2,2} := 4 \cdot \sum x1 \quad A_{2,3} := \sum x \cdot \sum y \quad A_{3,1} := 4 \cdot \sum y \\ A_{3,2} &:= \sum x \cdot \sum y \quad y1 := \overrightarrow{y^2} \quad A_{3,3} := 4 \cdot \sum y1 \quad v_1 := \sum Z^{(1)} \quad v_2 := \sum Z^{(2)} \\ v_3 &:= \sum Z^{(3)} \quad v_4 := \sum Z^{(4)} \quad g_1 := \sum v \quad b_1 := y_1 \cdot \sum Z^{(1)} \quad b_2 := y_2 \cdot \sum Z^{(2)} \\ b_3 &:= y_3 \cdot \sum Z^{(3)} \quad b_4 := y_4 \cdot \sum Z^{(4)} \quad g_3 := \sum b \\ ZT &:= Z^T \quad d_1 := x_1 \cdot \sum ZT^{(1)} \quad d_2 := x_2 \cdot \sum ZT^{(2)} \quad d_3 := x_3 \cdot \sum ZT^{(3)} \quad d_4 := x_4 \cdot \sum ZT^{(4)} \\ A &= \begin{pmatrix} 16 & 49.554 & 66.548 \\ 49.554 & 157.809 & 206.104 \\ 66.548 & 206.104 & 277.278 \end{pmatrix} \quad g_2 := \sum d \quad g = \begin{pmatrix} 62.667 \\ 195.821 \\ 260.941 \end{pmatrix} \\ p &:= \text{lsolve}(A, g) \quad a := \exp(p_1) \quad \alpha := p_2 \quad \beta := p_3 \\ a &= 1.2 \quad \alpha = 0.4 \quad \beta = 0.6 \end{aligned}$$

Ответ: $a=1.2$, $\alpha=0.4$, $\beta=0.6$.

1.6 Задания к лабораторной работе № 1

Работа выполняется в пакете Mathcad.

Задание 1. Построить графики ПФ и их сечений (для двухфакторных ПФ).

Задание 2. Рассчитать характеристики ПФ и построить их графики.

Задание 3. Дать экономическую интерпретацию результатов согласно своему варианту.

Вариант	Однофакторные ПФ $y = a \cdot x^b$	Двухфакторные ПФ $Y = a \cdot K^\alpha \cdot L^\beta$
1	$x = L; a = 140; b = 0.3$	$a = 1000; \alpha = 0.4; \beta = 0.6$
2	$x = L; a = 100; b = 0.35$	$a = 1500; \alpha = 0.45; \beta = 0.4$
3	$x = K; a = 200; b = 0.6$	$a = 5; \alpha = 0.3; \beta = 0.6$
4	$x = K; a = 250; b = 0.9$	$a = 100; \alpha = 0.2; \beta = 0.8$
5	$x = K; a = 150; b = 0.85$	$a = 150; \alpha = 0.45; \beta = 0.55$
6	$x = L; a = 90; b = 0.1$	$a = 200; \alpha = 0.5; \beta = 0.5$
7	$x = L; a = 35; b = 0.15$	$a = 1; \alpha = 0.2; \beta = 0.6$
8	$x = L; a = 1000; b = 0.5$	$a = 3; \alpha = 0.15; \beta = 0.7$
9	$x = K; a = 1; b = 0.3$	$a = 300; \alpha = 0.45; \beta = 0.45$
10	$x = L; a = 10; b = 0.35$	$a = 350; \alpha = 0.6; \beta = 0.4$
11	$x = K; a = 15; b = 0.25$	$a = 8; \alpha = 0.6; \beta = 0.2$
12	$x = L; a = 20; b = 0.7$	$a = 10^4; \alpha = 0.2; \beta = 0.8$
13	$x = K; a = 30; b = 0.4$	$a = 10^3; \alpha = 0.3; \beta = 0.3$
14	$x = L; a = 1000; b = 0.3$	$a = 750; \alpha = 0.2; \beta = 0.2$
15	$x = K; a = 240; b = 0.3$	$a = 800; \alpha = 0.6; \beta = 0.2$

Задание 4. По заданным значениям параметров a, b рассчитать однофакторную ПФ y для пяти значений аргумента x и сформировать два массива: x и y . Рассматриваем полученные массивы как входные данные.

Используя эти массивы данных, вычислить параметры a, b модели $y = a \cdot x^b$ тремя способами:

- а) методом наименьших квадратов, предварительно линеаризовав ПФ;
- б) с помощью линейной регрессии;
- в) с помощью нелинейной регрессии.

Задание 5. По заданным значениям параметров a, α, β рассчитать двухфакторную ПФ Y для пяти значений ресурсов K и L и сформировать три массива: K, L и Y . Рассматриваем полученные массивы как входные данные. Используя эти массивы данных, вычислить параметры a, α, β модели $Y = a \cdot K^\alpha \cdot L^\beta$ двумя способами:

- а) методом наименьших квадратов, предварительно линеаризовав ПФ;
- б) с помощью линейной многомерной регрессии.

2 ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 2

«БАЛАНСОВЫЕ МОДЕЛИ»

Балансовые модели, как статистические, так и динамические, широко применяются при экономико-математическом моделировании экономических систем и процессов. В основе создания этих моделей лежит балансовый метод, т. е. метод взаимного сопоставления имеющихся материальных, трудовых и финансовых ресурсов и потребностей в них. Если описывать экономическую систему в целом, то под балансовой моделью понимается система уравнений, каждое из которых выражает требование баланса между производимым отдельными экономическими объектами количеством продукции и совокупной потребностью в этой продукции.

Принципиальная схема межотраслевого баланса (МОБ) производства и распределения совокупного общественного продукта в стоимостном выражении приведена в таблице 2.1. В основу этой схемы положено разделение совокупного продукта на две части: промежуточный и конечный продукт; все народное хозяйство представлено в виде совокупности n отраслей (имеются в виду чистые отрасли), при этом каждая отрасль фигурирует в балансе как производящая и как потребляющая.

Таблица 2.1 – Межотраслевой баланс производства и распределения

Производящие отрасли	Потребляющие отрасли					Конечный продукт	Валовой продукт
	1	2	3	...	n		
1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	...	x_{1n}	Y_1	X_1
2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	...	x_{2n}	Y_2	X_2
3	x_{31}	x_{32}	x_{33}	...	x_{3n}	Y_3	X_3
...	...	...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	I	...	II	...
...	...	...	...	...	...	...	...
n	x_{n1}	x_{n2}	x_{n3}	...	x_{nn}	Y_n	X_n

Окончание таблицы 2.1

Производящие отрасли	Потребляющие отрасли					Конечный продукт	Валовой продукт
	1	2	3	...	n		
Амортизация	c_1	c_2	c_3	...	c_n	IV	
Оплата труда	v_1	v_2	v_3	III	v_n		
Чистый доход	m_1	m_2	m_3	...	m_n		
Валовой продукт	X_1	X_2	X_3	...	X_n		$\sum_{i=1}^n X_i = \sum_{j=1}^n X_j$

Рассмотрим схему МОБ в разрезе его крупных составных частей. Выделяются четыре части, имеющие различное экономическое содержание, они называются квадрантами баланса и на схеме обозначены римскими цифрами.

Первый квадрант МОБ – это шахматная таблица межотраслевых материальных связей. Показатели, помещенные на пересечениях строк и столбцов, представляют собой величины межотраслевых потоков продукции и в общем виде обозначаются x_{ij} , где i и j – номера производящих и потребляющих отраслей соответственно. Так, величина x_{32} понимается как стоимость средств производства, произведенных в отрасли с номером 3 и потребленных в качестве материальных затрат в отрасли с номером 2. Таким образом, первый квадрант по форме представляет собой квадратную матрицу порядка n , сумма всех элементов которой равняется годовому фонду возмещения затрат средств производства в материальной сфере.

Во втором квадранте представлена конечная продукция всех отраслей материального производства, при этом под конечной понимается продукция, выходящая из сферы производства в область конечного использования (на потребление и накопление). В таблице 2.1 этот раздел дан укрупненно в виде одного столбца величин Y , в развернутой схеме баланса конечный продукт каждой отрасли показан дифференцированно по направлениям использования: на личное потребление населения, общественное потребление,

накопление, возмещение потерь, экспорт и др. Итак, второй квадрант характеризует отраслевую материальную структуру национального дохода, а в развернутом виде – также распределение национального дохода на фонд накопления и фонд потребления, структуру потребления и накопление по отраслям производства и потребителям.

Третий квадрант МОБ также характеризует национальный доход, но со стороны его стоимостного состава, как сумму чистой продукции и амортизации; чистая продукция понимается при этом как сумма оплаты труда и чистого дохода отраслей. Сумму амортизации (c_j) и чистой продукции ($v_j + m_j$) некоторой j -й отрасли будем называть условно чистой продукцией этой отрасли и обозначать в дальнейшем Z_j .

Четвертый квадрант баланса находится на пересечении столбцов второго квадранта (конечной продукции) и строк третьего квадранта (условно чистой продукции). Этим определяется содержание квадранта: он отражает конечное распределение и использование национального дохода. В результате перераспределения первоначально созданного национального дохода образуются конечные доходы населения, предприятий, государства. Данные четвертого квадранта важны для отражения в межотраслевой модели баланса доходов и расходов населения, источников финансирования капиталовложений, текущих затрат непродуцированной сферы, для анализа общей структуры конечных доходов по группам потребителей. Более детально составляющие элементы этого квадранта здесь не рассматриваются, однако очень важным является тот факт, что общий итог четвертого квадранта, так же как второго и третьего, должен быть равен созданному за год национальному доходу.

Запишем два важных соотношения.

1. Рассматривая схему баланса по столбцам, можно сделать очевидный вывод, что итог материальных затрат любой потребляющей отрасли

и ее условно чистой продукции равен валовой продукции этой отрасли. Данный вывод можно записать в виде соотношения:

$$X_j = \sum_{i=1}^n x_{ij} + Z_j; \quad j = 1, \dots, n. \quad (2.1)$$

Напомним, что величина условно чистой продукции Z_j равна сумме амортизации, оплаты труда и чистого дохода j -й отрасли. Соотношение (2.1) охватывает систему из n уравнений, отражающих стоимостный состав продукции всех отраслей материальной сферы.

2. Рассматривая схему МОБ по строкам для каждой производящей отрасли, можно видеть, что валовая продукция той или иной отрасли равна сумме материальных затрат потребляющих ее продукцию отраслей и конечной продукции данной отрасли:

$$X_i = \sum_{j=1}^n x_{ij} + Y_i; \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.2)$$

Формула (2.2) описывает систему из n уравнений, которые называются уравнениями распределения продукции отраслей материального производства по направлениям использования.

Просуммируем по всем отраслям уравнения (2.1), в результате получим:

$$\sum_{j=1}^n X_j = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n x_{ij} + \sum_{j=1}^n Z_j.$$

Аналогичное суммирование уравнений (2.2) дает:

$$\sum_{i=1}^n X_i = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_{ij} + \sum_{j=1}^n Y_i.$$

Левые части обоих равенств равны, так как представляют собой весь валовой общественный продукт. Первые слагаемые правых частей этих равенств также равны, их величина равна итогу первого квадранта. Следовательно, должно соблюдаться соотношение:

$$\sum_{j=1}^n Z_j = \sum_{i=1}^n Y_i. \quad (2.3)$$

Левая часть уравнения (2.3) есть сумма третьего квадранта, а правая часть – итог второго квадранта. В целом же это уравнение показывает, что в межотраслевом балансе соблюдается важнейший принцип единства материального и стоимостного состава национального дохода.

2.1 Коэффициенты прямых и полных материальных затрат

Основу информационного обеспечения модели межотраслевого баланса составляет технологическая матрица, содержащая коэффициенты прямых материальных затрат на производство единицы продукции. Эта матрица является также основой экономико-математической модели межотраслевого баланса. Предполагается, что для производства единицы продукции в j -й отрасли требуется определенное количество затрат промежуточной продукции i -й отрасли, равное a_{ij} . Оно не зависит от объема производства в отрасли и является стабильной величиной во времени. Величины a_{ij} называются *коэффициентами прямых материальных затрат* и рассчитываются следующим образом:

$$a_{ij} = \frac{X_{ij}}{X_j}; \quad i, j = \overline{1, n}. \quad (2.4)$$

С учетом формулы (2.4) систему уравнений баланса (2.2) можно переписать в виде:

$$X_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} X_j + Y_i; \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.5)$$

Если ввести в рассмотрение матрицу коэффициентов прямых материальных затрат $A = (a_{ij})$, вектор-столбец валовой продукции X и вектор-столбец конечной продукции Y :

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \dots \\ X_n \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \dots \\ Y_n \end{pmatrix},$$

то система уравнений (2.5) в матричной форме примет вид:

$$X = AX + Y. \quad (2.6)$$

Система уравнений (2.5), или в матричной форме (2.6), называется *экономико-математической моделью межотраслевого баланса (моделью Леонтьева, моделью «затраты – выпуск»)*. С помощью этой модели можно выполнять три варианта расчетов:

- Задав в модели величины валовой продукции каждой отрасли (X_i), можно определить объемы конечной продукции каждой отрасли (Y_i):

$$Y = (E - A)X. \quad (2.7)$$

- Задав величины конечной продукции всех отраслей (Y_i), можно определить величины валовой продукции каждой отрасли (X_i):

$$X = (E - A)^{-1}Y. \quad (2.8)$$

- Для ряда отраслей задав величины валовой продукции, а для всех остальных отраслей задав объемы конечной продукции, можно найти величины конечной продукции первых отраслей и объемы валовой продукции вторых. Если определитель матрицы $(E - A)$ не равен нулю, т. е. эта матрица невырожденная, то обратная к ней матрица существует. Обозначим эту обратную матрицу через B , тогда систему уравнений в матричной форме (2.7) можно записать в виде:

$$X = BY. \quad (2.8a)$$

Элементы матрицы B будем обозначать через b_{ij} , тогда из матричного уравнения (2.8) для любой i -й отрасли можно получить следующее соотношение:

$$X_i = \sum_{j=1}^n b_{ij} Y_j, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.9)$$

Из соотношения (2.9) следует, что валовая продукция выступает как взвешенная сумма величин конечной продукции, причем весами являются коэффициенты b_{ij} , которые показывают, сколько всего нужно произвести продукции i -й отрасли для выпуска в сферу конечного использования единицы продукции j -й отрасли. В отличие от коэффициентов прямых затрат a_{ij} , коэффициенты b_{ij} называются *коэффициентами полных материальных затрат* и включают в себя как прямые, так и косвенные затраты всех порядков. Если прямые затраты отражают количество средств производства, израсходованных непосредственно при изготовлении данного продукта, то косвенные относятся к предшествующим стадиям производства и входят в производство продукта не прямо, а через другие (промежуточные) средства производства.

Коэффициенты полных материальных затрат можно применять, когда необходимо определить, как скажется на валовом выпуске некоторой отрасли предполагаемое изменение объемов конечной продукции всех отраслей:

$$\Delta X_i = \sum_{j=1}^n b_{ij} \Delta Y_j, \quad i = 1, \dots, n, \quad (2.10)$$

где ΔX_i и ΔY_j – изменения (приросты) величин валовой и конечной продукции соответственно.

2.2 Свойства матрицы прямых и полных материальных затрат

Коэффициенты прямых затрат по определению являются неотрицательными, следовательно, матрица A в целом может быть названа неотрицательной: $A \geq 0$. Так как процесс воспроизводства нельзя было бы

осуществлять, если бы для собственного воспроизводства в отрасли затрачивалось большее количество продукта, чем создавалось, то, очевидно, что диагональные элементы матрицы A меньше единицы: $a_{ii} < 1$.

Будем называть неотрицательную матрицу A *продуктивной*, если существует такой неотрицательный вектор $X \geq 0$, что

$$X > AX. \quad (2.11)$$

Очевидно, что условие (2.11) означает существование положительно-го вектора конечной продукции $Y > 0$ для модели межотраслевого баланса.

Для того чтобы матрица коэффициентов прямых материальных затрат A была продуктивной, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

1) матрица $(E - A)$ неотрицательно обратима, т. е. существует обратная матрица $(E - A)^{-1} \geq 0$;

2) наибольшее по модулю собственное значение λ матрицы A , то есть решение характеристического уравнения $(\lambda E - A) = 0$ строго меньше единицы;

3) все главные миноры матрицы $(E - A)$, т. е. определители матриц, образованные элементами первых строк и первых столбцов этой матрицы, порядка от 1 до n , положительны.

Перейдем к анализу матрицы коэффициентов полных материальных затрат, т. е. матрицы $B = (E - A)^{-1}$. Коэффициенты этой матрицы показывают, сколько всего нужно произвести продукции i -й отрасли, чтобы получить единицу конечной продукции j -й отрасли.

Как уже указывалось выше, коэффициент полных материальных затрат включает прямые и косвенные затраты. В отличие от коэффициентов прямых затрат, коэффициенты полных материальных затрат отражают не отраслевые, а народнохозяйственные затраты по производству единицы продукции.

Пример 2.1. Для трехотраслевой экономической системы заданы матрица коэффициентов прямых материальных затрат и вектор конечной продукции:

$$\underline{A} := \begin{pmatrix} 0.3 & 0.1 & 0.4 \\ 0.2 & 0.5 & 0.0 \\ 0.3 & 0.1 & 0.2 \end{pmatrix} \quad Y := \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \\ 300 \end{pmatrix}$$

1. Вычислим матрицу полных материальных затрат В:

$$E := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \underline{W} := E - A \quad W = \begin{pmatrix} 0.7 & -0.1 & -0.4 \\ -0.2 & 0.5 & 0 \\ -0.3 & -0.1 & 0.8 \end{pmatrix} \quad B := W^{-1} \quad B = \begin{pmatrix} 2.041 & 0.612 & 1.02 \\ 0.816 & 2.245 & 0.408 \\ 0.867 & 0.51 & 1.684 \end{pmatrix}$$

2. Вычислим вектор валовой продукции X:

$$X := B \cdot Y \quad X = \begin{pmatrix} 775.51 \\ 510.204 \\ 729.592 \end{pmatrix}$$

3. Вычислим матрицу межотраслевых потоков продукции x:

$$x^{(1)} := X_1 \cdot A^{(1)} \quad x^{(2)} := X_2 \cdot A^{(2)} \quad x^{(3)} := X_3 \cdot A^{(3)} \quad x = \begin{pmatrix} 232.653 & 51.02 & 291.837 \\ 155.102 & 255.102 & 0 \\ 232.653 & 51.02 & 145.918 \end{pmatrix}$$

4. Вычислим условно чистую продукцию Z:

$$Z_1 := X_1 - \sum_{k=1}^3 (x^{(1)})_k \quad Z_2 := X_2 - \sum_{k=1}^3 (x^{(2)})_k \quad Z_3 := X_3 - \sum_{k=1}^3 (x^{(3)})_k \quad Z = \begin{pmatrix} 155.102 \\ 153.061 \\ 291.837 \end{pmatrix}$$

Для определения элементов первого квадранта материального межотраслевого баланса мы воспользовались формулой, вытекающей из формулы (1.17): $x_{ij} = a_{ij}X_j$. Из этой формулы следует, что для получения первого столбца первого квадранта нужно элементы первого столбца заданной матрицы A умножить на величину $X_1 = 775,3$; элементы второго столбца матрицы A умножить на $X_2 = 510,1$; элементы третьего столбца матрицы A умножить на $X_3 = 729,6$.

Составляющие третьего квадранта (условно чистая продукция) находятся с учетом формулы (2.1) как разность между объемами валовой продукции и суммами элементов соответствующих столбцов найденного первого квадранта.

Четвертый квадрант в нашем примере состоит из одного показателя и служит, в частности, для контроля правильности расчета: сумма элементов второго квадранта должна в стоимостном материальном балансе совпадать с суммой элементов третьего квадранта. Результаты расчета представлены в таблице 2.2.

Таблица 2.2 – Межотраслевой баланс производства и распределения продукции

Производящие отрасли	Потребляющие отрасли				
	1	2	3	Конечная продукция	Валовая продукция
1	232,6	51,0	291,8	200,0	775,3
2	155,1	255,0	0,0	100,0	510,1
3	232,6	51,0	145,9	300,0	729,6
Условно чистая продукция	155,0	153,1	291,9	600,0	
Валовая продукция	775,3	510,1	729,6		2015,0

2.3 Модель затрат труда

Исходной моделью служит отчетный межпродуктовый баланс в *натуральном выражении*. В этом балансе по строкам представлено распределение каждого отдельного продукта на производство других продуктов и конечное потребление (первый и второй квадранты схемы межотраслевого баланса). Отдельной строкой дается распределение затрат живого труда в производстве всех видов продукции; предполагается, что трудовые затраты выражены в единицах труда одинаковой степени сложности.

Обозначим затраты живого труда в производстве j -го продукта через L_j , а объем производства этого продукта (валовой выпуск), как и раньше, через X_j . Тогда прямые затраты труда на единицу j -го вида продукции (*коэффициент прямой трудоемкости*) можно задать следующей формулой:

$$t_j = \frac{L_j}{X_j}; \quad j = \overline{1, n}. \quad (2.12)$$

Введем понятие *полных затрат труда* как суммы прямых затрат живого труда и затрат овеществленного труда, перенесенных на продукт через израсходованные средства производства. Если обозначить величину полных затрат труда на единицу продукции j -го вида через T_j , то произведения вида $a_{ij}T_i$ отражают затраты овеществленного труда, перенесенного на единицу j -го продукта через i -е средство производства; при этом предполагается, что коэффициенты прямых материальных затрат a_{ij} выражены в натуральных единицах. Тогда полные трудовые затраты на единицу j -го вида продукции (*коэффициент полной трудоемкости*) будут равны

$$T_j = \sum_{i=1}^n a_{ij}T_i + t_j; \quad j = \overline{1, n}. \quad (2.13)$$

Систему уравнений (2.13) можно переписать в матричном виде:

$$T = TA + t. \quad (2.14)$$

Из (2.14) получим следующее соотношение для вектора коэффициентов полной трудоемкости:

$$T = t(E - A)^{-1} \quad \text{или} \quad T = tB. \quad (2.15)$$

Обозначим через L величину совокупных затрат живого труда по всем видам продукции, которая с учетом формулы (2.12) будет равна

$$L = \sum_{j=1}^n L_j = \sum_{j=1}^n t_j X_j = tX. \quad (2.16)$$

Используя соотношения $X = BY$ из (2.4) и (2.5), приходим к следующему равенству:

$$tX = TY, \quad (2.17)$$

где t и T – вектор-строки коэффициентов прямой и полной трудоемкости, а X и Y – вектор-столбцы валовой и конечной продукции соответственно.

Для составления межотраслевого баланса затрат труда необходимо вычислить в соответствии с формулой $L_i = t_i \cdot X_i = \sum_{j=1}^n x_{ij} \cdot t_i + Y_i \cdot t_i$ продуктово-трудовую матрицу xt и затраты труда на конечную продукцию по формулам:

$$xt_{ij} = x_{ij} \cdot t_i, \quad Yt_i = Y_i \cdot t_i. \quad (2.18)$$

Соотношение (2.17) представляет собой основное балансовое равенство в теории межотраслевого баланса труда. В данном случае его конкретное экономическое содержание заключается в том, что стоимость конечной продукции, оцененной по полным затратам труда, равна совокупным затратам живого труда. Сопоставляя потребительский эффект различных взаимозаменяемых продуктов с полными трудовыми затратами на их выпуск, можно судить о сравнительной эффективности их производства. С помощью показателей полной трудоемкости более полно и точно, чем при использовании существующих стоимостных показателей, выявляется структура затрат на выпуск различных видов продукции и прежде всего соотношение между затратами живого и овеществленного труда.

На основе коэффициентов прямой и полной трудоемкости могут быть разработаны межотраслевые и межпродуктовые балансы затрат труда и использования трудовых ресурсов. Схематически эти балансы строятся по общему типу матричных моделей, однако все показатели в них (межотраслевые связи, конечный продукт, условно чистая продукция и др.) выражены в трудовых измерителях.

Пример 2.2. Пусть в дополнение к исходным данным примера 1 заданы затраты живого труда (трудовые ресурсы) в трех отраслях:

$$\underline{L} := (1160 \ 460 \ 875)$$

в некоторых единицах измерения трудовых затрат. Требуется определить коэффициенты прямой и полной трудоемкости и составить межотраслевой баланс затрат труда.

Решение

Приведем вычисленные в примере 1.5 вектор валовой продукции X , матрицу межотраслевых потоков x и матрицу полных материальных затрат B .

$$X = \begin{pmatrix} 775.51 \\ 510.204 \\ 729.592 \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} 232.653 & 51.02 & 291.837 \\ 155.102 & 255.102 & 0 \\ 232.653 & 51.02 & 145.918 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2.041 & 0.612 & 1.02 \\ 0.816 & 2.245 & 0.408 \\ 0.867 & 0.51 & 1.684 \end{pmatrix} \quad Y := \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \\ 300 \end{pmatrix}$$

1. Воспользовавшись формулой (1.25), находим коэффициенты прямой и полной трудоемкости:

$$t := \begin{pmatrix} \frac{\underline{L}^T}{X} \end{pmatrix} \quad t = \begin{pmatrix} 1.496 \\ 0.902 \\ 1.199 \end{pmatrix} \quad \underline{T} := t^T \cdot B \quad T = (4.829 \ 3.552 \ 3.914)$$

Умножая первую, вторую и третью строки первого и второго квадрантов межотраслевого материального баланса, построенного в примере 1.5, на соответствующие коэффициенты прямой трудоемкости, получаем схему межотраслевого баланса труда (в трудовых измерителях) (табл. 2.3).

$$x_1 := x^T \quad x_2^{(1)} := t_1 \cdot x_1^{(1)} \quad x_2^{(2)} := t_2 \cdot x_1^{(2)} \quad x_2^{(3)} := t_3 \cdot x_1^{(3)}$$

$$x_t := x_2^T \quad x_t = \begin{pmatrix} 348 & 76.316 & 436.526 \\ 139.84 & 230 & 0 \\ 279.021 & 61.189 & 175 \end{pmatrix}$$

$$Y_{t_1} := Y_1 \cdot t_1 \quad Y_{t_2} := Y_2 \cdot t_2 \quad Y_{t_3} := Y_3 \cdot t_3 \quad Y_t = \begin{pmatrix} 299.158 \\ 90.16 \\ 359.79 \end{pmatrix}$$

Таблица 2.3 – Межотраслевой баланс затрат труда

Производящие отрасли	Потребляющие отрасли				
	Межотраслевые затраты овеществленного труда			Затраты труда на конечную продукцию	Затраты труда в отраслях (трудовые ресурсы)
	1	2	3		
1	348,0	76,3	436,5	299,1	1159,9
2	139,8	230,0	0,0	90,1	459,9
3	279,0	61,2	175,0	359,8	875,0

Незначительные расхождения между данными таблицы и исходными данными вызваны погрешностями округления при вычислениях.

2.4 Модель фондоемкости продукции

В простейшем случае модель межпродуктового баланса дополняется отдельной строкой, в которой указаны в стоимостном выражении объемы производственных фондов Φ_j , занятые в каждой j -й отрасли. На основании этих данных и объемов валовой продукции всех отраслей определяются *коэффициенты прямой фондоемкости* продукции j -й отрасли:

$$f_j = \frac{\Phi_j}{X_j}; \quad j = 1, \dots, n. \quad (2.19)$$

Коэффициент прямой фондоемкости показывает величину производственных фондов, непосредственно занятых в производстве данной отрасли, в расчете на единицу ее валовой продукции. В отличие от этого показателя коэффициент полной фондоемкости F_j отражает объем фондов, необходимых во всех отраслях для выпуска единицы конечной продукции j -й отрасли. Если a_{ij} – коэффициент прямых материальных затрат, то для коэффициента полной фондоемкости справедливо равенство:

$$F_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} F_i + f_j; \quad j = \overline{1, n}. \quad (2.20)$$

Если ввести в рассмотрение вектор-строку коэффициентов прямой фондоемкости $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ и вектор-строку коэффициентов полной фондоемкости $F = (F_1, F_2, \dots, F_n)$, то систему уравнений (2.20) можно переписать в матричной форме:

$$F = FA + f, \quad (2.21)$$

откуда с помощью преобразований, аналогичных применяемым выше для коэффициентов трудоемкости, можно получить матричное соотношение

$$F = fB, \quad (2.22)$$

где $B = (E - A)^{-1}$ – матрица коэффициентов полных материальных затрат.

Для составления межотраслевого баланса фондоемкости продукции вычисляют в соответствии с формулой $\Phi_i = f_i \cdot X_i = \sum_{j=1}^n f_i \cdot x_{ij} + f_i \cdot Y_i$ продуктово-фондовую матрицу xf и стоимость фондов на конечную продукцию Yf :

$$xf_{ij} = x_{ij} \cdot f_i, \quad Yf_i = Y_i \cdot f_i. \quad (2.23)$$

Пример 2.3. Пусть в дополнение к исходным данным примера 1.5 заданы объемы фондов в у.е. в отраслях:

$$\Phi := (1200 \ 600 \ 900)$$

Требуется определить коэффициенты прямой и полной фондоемкости и составить межотраслевой баланс фондозатрат.

Решение

Приведем вычисленные в примере 1.5 вектор валовой продукции X , матрицу межотраслевых потоков x и матрицу полных материальных затрат B :

$$X = \begin{pmatrix} 775.51 \\ 510.204 \\ 729.592 \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} 232.653 & 51.02 & 291.837 \\ 155.102 & 255.102 & 0 \\ 232.653 & 51.02 & 145.918 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2.041 & 0.612 & 1.02 \\ 0.816 & 2.245 & 0.408 \\ 0.867 & 0.51 & 1.684 \end{pmatrix} \quad Y := \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \\ 300 \end{pmatrix}$$

Используя формулу (1.23), находим коэффициенты прямой и полной фондоемкости продукции:

$$f := \left(\frac{\Phi^T}{X} \right) \quad f = \begin{pmatrix} 1.547 \\ 1.176 \\ 1.234 \end{pmatrix} \quad \underline{F} := f^T \cdot B \quad F = (5.188 \quad 4.217 \quad 4.136)$$

Умножая первую, вторую и третью строки первого и второго квадрантов межотраслевого материального баланса, построенного в примере 1.5, на соответствующие коэффициенты прямой фондоемкости, получаем схему межотраслевого баланса труда (в трудовых измерителях) (табл. 2.4).

$$x1 := x^T \quad 1. \quad x2^{(1)} := f_1 \cdot x1^{(1)} \quad 2. \quad x2^{(2)} := f_2 \cdot x1^{(2)} \quad 3. \quad x2^{(3)} := f_3 \cdot x1^{(3)}$$

$$4. \quad \underline{ft} := x2^T \quad 5. \quad ft = \begin{pmatrix} 360 & 78.947 & 451.579 \\ 182.4 & 300 & 0 \\ 286.993 & 62.937 & 180 \end{pmatrix}$$

$$6. \quad Yf_1 := Y_1 \cdot f_1 \quad 7. \quad Yf_2 := Y_2 \cdot f_2 \quad 8. \quad Yf_3 := Y_3 \cdot f_3 \quad 9. \quad Yf = \begin{pmatrix} 309.474 \\ 117.6 \\ 370.07 \end{pmatrix}$$

Таблица 2.4 – Межотраслевой баланс фондоемкости продукции

Производящие отрасли	Потребляющие отрасли				
	Межотраслевые фондозатраты			Прямые фондозатраты на конечную продукцию	Фондозатраты в отраслях
	1	2	3		
1	360,0	78,9	451,6	309,4	1199.9
2	182,4	300,0	0,0	117,6	600,0
3	287,0	62,9	180,0	370,0	899,9

2.5 Задание к лабораторной работе № 2

Работа выполняется в пакете Mathcad или в Excel.

Задание

В таблицах приведены коэффициенты прямых материальных затрат, объемы конечной продукции, трудовые затраты и объемы фондов по отраслям в межотраслевом балансе для трех отраслей.

Необходимо:

- 1) проверить продуктивность матрицы коэффициентов прямых затрат;
- 2) рассчитать коэффициенты полных материальных затрат;
- 3) найти объемы валовой продукции отраслей и составить межотраслевой баланс производства и потребления;
- 4) рассчитать коэффициенты прямой и полной трудоемкости и составить межотраслевой баланс труда;
- 5) рассчитать коэффициенты прямой и полной фондоемкости, составить межотраслевой баланс фондов.

Вариант 1

Отрасль	Коэффициенты прямых затрат			Конечная продукция
	1	2	3	
1	0.25	0.12	0.51	700
2	0.52	0.33	0.24	0
3	0.11	0.02	0.0	300
L	100	300	250	
Ф	400	500	300	

Вариант 2

Отрасль	Коэффициенты прямых затрат			Конечная продукция
	1	2	3	
1	0.0	0.32	0.5	50
2	0.1	0.13	0.2	10
3	0.2	0.25	0.4	35
L	1500	300	1250	
Ф	4000	550	1300	

Вариант 3

Отрасль	Коэффициенты прямых затрат			Конечная продукция
	1	2	3	
1	0.02	0.29	0.8	58
2	0.5	0.0	0.2	100
3	0.2	0.2	0.14	45
L	500	200	300	
Ф	100	300	350	

Вариант 4

Отрасль	Коэффициенты прямых затрат			Конечная продукция
	1	2	3	
1	0.12	0.28	0.15	170
2	0.0	0.13	0.23	20
3	0.22	0.41	0.45	130
L	120	350	200	
Ф	150	500	310	

Вариант 5

Отрасль	Коэффициенты прямых затрат			Конечная продукция
	1	2	3	
1	0.5	0.4	0.1	50
2	0.5	0.0	0.2	300
3	0.2	0.3	0.4	20
L	10	30	25	
Ф	40	50	30	

Вариант 6

Отрасль	Коэффициенты прямых затрат			Конечная продукция
	1	2	3	
1	0.2	0.0	0.1	150
2	0.5	0.3	0.2	30
3	0.2	0.2	0.4	230
L	70	40	55	
Ф	400	500	300	

Вариант 7

Отрасль	Коэффициенты прямых затрат			Конечная продукция
	1	2	3	
1	0.2	0.2	0.1	500
2	0.5	0.3	0.2	100
3	0.0	0.7	0.8	300
L	100	350	250	
Ф	450	550	300	

Вариант 8

Отрасль	Коэффициенты прямых затрат			Конечная продукция
	1	2	3	
1	0.7	0.25	0.6	30
2	0.5	0.3	0.2	40
3	0.3	0.0	0.4	50
L	1000	3000	2500	
Ф	400	500	300	

Вариант 9

Отрасль	Коэффициенты прямых затрат			Конечная продукция
	1	2	3	
1	0.2	0.2	0.1	50
2	0.5	0.3	0.2	0
3	0.2	0.2	0.4	30
L	100	300	250	
Ф	400	500	300	

Вариант 10

Отрасль	Коэффициенты прямых затрат			Конечная продукция
	1	2	3	
1	0.25	0.28	0.19	50
2	0.57	0.34	0.21	70
3	0.22	0.23	0.46	30
L	100	300	250	
Ф	400	500	300	

Вариант 11

Отрасль	Коэффициенты прямых затрат			Конечная продукция
	1	2	3	
1	0.0	0.2	0.1	0.0
2	0.5	0.5	0.2	60
3	0.2	0.1	0.3	30
L	200	200	250	
Ф	300	400	200	

Вариант 12

Отрасль	Коэффициенты прямых затрат			Конечная продукция
	1	2	3	
1	0.7	0.4	0.2	50
2	0.5	0.5	0.2	40
3	0.4	0.3	0.2	30
L	500	200	250	
Ф	200	100	300	

Вариант 13

Отрасль	Коэффициенты прямых затрат			Конечная продукция
	1	2	3	
1	0.9	0.3	0.1	20
2	0.5	0.4	0.2	30
3	0.1	0.7	0.6	30
L	500	200	200	
Ф	300	800	400	

Вариант 14

Отрасль	Коэффициенты прямых затрат			Конечная продукция
	1	2	3	
1	0.4	0.6	0.8	50
2	0.5	0.6	0.2	70
3	0.5	0.3	0.7	30
L	100	300	250	
Ф	400	500	300	

Вариант 15

Отрасль	Коэффициенты прямых затрат			Конечная продукция
	1	2	3	
1	0.1	0.2	0.3	10
2	0.4	0.5	0.2	20
3	0.4	0.3	0.6	30
L	100	300	250	
Ф	400	500	300	

3 ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 3

«МОДЕЛИРОВАНИЕ ФИНАНСОВЫХ ОПЕРАЦИЙ»

Лабораторная работа «Моделирование финансовых операций» состоит из трех тем: «Потоки платежей», «Доходность финансовой операции», «Кредитные расчеты». Работа считается выполненной, если решены задания по всем трем темам.

3.1 Потоки платежей

Потоки платежей весьма часто встречаются на практике. Заработная плата выплачивается, как правило, в виде потока платежей 2 раза в месяц, примерно через 15 дней или один раз в месяц через 30 дней. Плата за квартиру – поток, как правило, ежемесячных платежей. Семья откладывает на покупку автомобиля, внося ежемесячно на счет в банк некоторую сумму, и т. д. Изучение потоков платежей очень важно.

Поток платежей – это последовательность величин самих платежей (со знаками) и моментов времени, когда они осуществлены.

Платеж со знаком плюс, который может быть опущен, – это поступление, платежи со знаком минус представляют собой выплаты.

Поток называется конечным или бесконечным в зависимости от количества платежей в нем.

Пусть $Q = \{R_k, t_k\}$ – поток платежей, в нем t_k – моменты времени, R_k – платежи. Кроме того, предполагается, что известна ставка процента i , обычно неизменная в течение всего потока.

Современной величиной потока в момент $t = t_0 = 0$ называется сумма платежей потока, дисконтированных к этому моменту –

$$A = Q(0) = \sum_{k=1}^n \frac{R_k}{(1+i)^{t_k}}.$$

Достаточно найти величину потока в момент $Q(0)$, тогда в любой другой момент t величина потока $Q(t) = Q(0)(1+i)^t$.

Величина $Q(0)$ называется *современной величиной потока*; величина потока в последний момент времени $t_n = T$ называется *наращенной величиной потока* $S = Q(T) = Q(0)(1+i)^T = \sum_{k=1}^n R_k \cdot (1+i)^{T-t_k}$.

Пример 3.1. Пусть поток есть $Q = \{(-2000, 1); (1000, 2); (2000, 3)\}$ (рис. 3.1).

Найдем характеристики этого потока при ставке процента $i = 10\%$.



Рис. 3.1 – Поток платежей примера 3.1

Сначала найдем современную величину потока:

$$Q(0) = -2000 \cdot (1+0.1)^{-1} + 1000 \cdot (1+0.1)^{-2} + 2000 \cdot (1+0.1)^{-3} = 510.8.$$

Теперь можно найти и наращенную величину потока:

$$S(3) = Q(0) \cdot (1+i)^3 = 679.8.$$

Поток положительных платежей с постоянными промежутками между ними называется *рентой*. Часто сами платежи также являются одинаковыми. Далее рассматриваются только ренты с одинаковыми платежами.

3.1.1 Конечная годовая рента

Конечная годовая рента – это самая простая рента: в ней только один платеж R в год, длительность ее n лет, годовая процентная ставка i . На рентные платежи начисляются сложные проценты.

Пример 3.2. Рассмотрим 5-летнюю ренту с годовым платежом 1 000 руб., процентная ставка $i = 10\%$ (см. рис. 3.2).

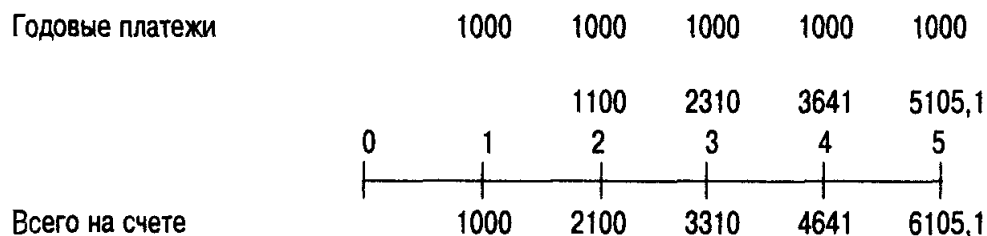


Рис. 3.2 – Пример начисления процентов на платежи ренты

Поясним движение денежных сумм. В конце 1-го года в банк вносится 1 000 руб. В конце 2-го года эта сумма возрастает до 1 100 руб. за счет начисленных 10%. Вместе с очередным внесенным платежом в 1 000 руб. на счете уже 2 100 руб. В конце 3-го года эта сумма возрастает до 2 310 руб. за счет начисленных 10%. Вместе с очередным внесенным платежом на счете теперь уже 3 310 руб. и т. д. Нарощенная сумма ренты равна 6 105,1 руб. Современную величину ренты найдем, дисконтируя к моменту 0 наращенную сумму 6 105,1. Получаем $6\,105,1 / (1 + 0,1)^5 = 3791$.

Если платежи поступают в конце очередного промежутка, то рента называется *постнумерандо*, в начале – *пренумерандо*. Рассматриваемая в примере рента постнумерандо. В дальнейшем рассматриваются только такие ренты.

Изучим подробно конечную годовую ренту $\{R, n, i\}$ в общем виде (см. рис. 3.3).

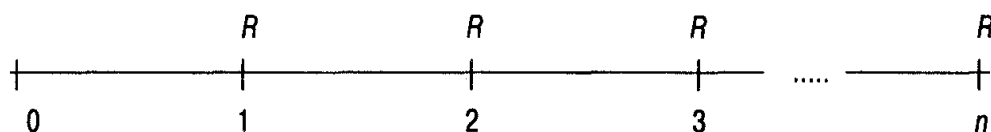


Рис. 3.3 – Вычисление современной величины ренты

Главная задача – найти современную величину этой ренты. Имеем

$$A = \sum_{t=1}^n \frac{R}{(1+i)^t} = R \sum_{t=1}^n \frac{1}{(1+i)^t}. \quad (3.1)$$

Это сумма n членов геометрической прогрессии с первым членом $(1+i)^{-1}$ и знаменателем $(1+i)^{-1}$. Как известно, сумма n членов геометрической прогрессии с первым членом a_1 и знаменателем q равна $a_1 \frac{(q^n - 1)}{q - 1}$.

Следовательно, сумма в фигурных скобках есть $\frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}$. И потому современная величина ренты есть

$$A = R \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}. \quad (3.2)$$

Величина $\frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}$ обозначается $a(n, i)$ и называется *коэффициентом приведения ренты*. С учетом этого обозначения имеем

$$A = R \cdot a(n, i).$$

Зная современную величину ренты, можно легко найти наращенную ее величину, которая также называется *конечной величиной ренты* S :

$$S = A \cdot (1+i)^n \text{ или}$$

$$S = R \cdot a(n, i) \cdot (1+i)^n = R \frac{(1+i)^n - 1}{i}. \quad (3.3)$$

Величина $\frac{(1+i)^n - 1}{i}$ обозначается $s(n, i)$ и называется *коэффициентом наращивания ренты*. С учетом этого обозначения имеем

$$S = R \cdot s(n, i).$$

Величины $a(n, i)$ и $s(n, i)$ связаны очевидным соотношением:

$$s(n, i) = a(n, i) \cdot (1+i)^n \text{ или}$$

$$s(n, i) = a(n, i) \cdot M(n, i).$$

Коэффициент наращенной величины $s(n, i)$ показывает, во сколько раз наращенная величина ренты больше ее годового платежа. Аналогичный смысл имеет и коэффициент приведения ренты: он показывает, во сколько раз современная величина ренты больше ее годового платежа. Можем дать другое толкование смысла понятия «современная величина ренты»: если в моменты времени $t = 1, 2, \dots, n$ вносить на счет в банк платежи R под i процентов годовых, то к концу n -го года она вырастет до наращенной величины ренты S . Итак, имеем формулы для конечной годовой ренты:

$$A = R \cdot a(n, i), \quad S = R \cdot s(n, i). \quad (3.4)$$

Эти формулы формально имеют смысл и для нецелых n . При этом надо использовать определяющие формулы для $a(n, i)$ и $s(n, i)$.

3.1.2 Определение параметров годовой ренты

Выше уже сказано, что годовая рента характеризуется годовым платежом R длительностью n лет и процентной ставкой i . Процентная ставка обычно неуправляема, но зато к параметрам можно причислить современную величину A и наращенную величину S . Все эти величины не являются независимыми, поэтому если задать некоторые из них, то остальные можно определить:

1. Если заданы R, n, i , тогда $A = R \cdot a(n, i)$, $S = R \cdot s(n, i)$.
2. Если заданы R, A, i , тогда для определения n имеем уравнение

$$A = R[1 - (1 + i)^{-n}] / i$$

и получаем

$$n = -\ln(1 - A \cdot i / R) / \ln(1 + i).$$

Если последнее выражение не целое, то n определяется как ближайшее целое к нему, смотря по конкретным требованиям. Можно обойтись и без нахождения n по указанной выше громоздкой формуле.

Имеем $a(n, i) = A/R$, затем подбираем по таблице коэффициентов приведения ренты приблизительно подходящее n (учитывая, что i известно).

Пример 3.3. Пусть $R = 1000$, $i = 8\%$. Найти длительность ренты с современной величиной $A = 4000$.

Решение

Имеем $a(n, i) = A/R = 4$. По формуле $n = -\ln(1 - A \cdot i / R) / \ln(1 + i)$ находим, что $n \approx 5$.

Продолжаем исследование по определению параметров рент:

3. Заданы R, S, i – действуем аналогично предыдущему случаю.

4. Заданы A, n, i , тогда для определения R имеем уравнение $A = R \cdot a(n, i)$, причем последняя величина известна, значит $R = A/a(n, i)$.

5. Заданы S, n, i – действуем аналогично п. 4.

6. Хотя процентная ставка неуправляема организатором ренты, можно задуматься о желаемой процентной ставке. Пусть заданы R, A, n , надо подобрать процентную ставку i . Это посложнее, чем в предыдущих задачах. Для определения i имеем уравнение $A = R \cdot [1 - (1 + i)^{-n}] / i$, но решить это уравнение аналитически невозможно, поэтому его надо решать численными методами.

3.1.3 Общая рента

Пусть платежи поступают p раз в году через равные интервалы и суммарный годовой платеж равен R , так что единичный платеж равен R/p ; проценты начисляются m раз в году также через равные интервалы. Рассмотрим подробно 1-й год (рис. 3.4).

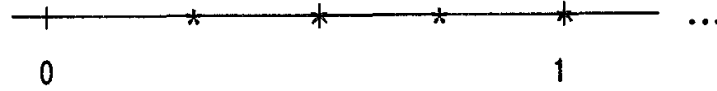


Рис. 3.4 – К вопросу о p -срочной ренте
с начислением процентов m раз в год

Рисунок отражает ситуацию при $p = 4$, $m = 2$ (платежи вносятся в моменты, обозначенные *, начисления процентов происходят в моменты +, т. е. в середине и в конце года).

Необходимы некоторые уточнения. В очередной момент начисления проценты начисляются по ставке сложных процентов на каждый более ранний платеж с учетом момента его поступления. Так как k -й платеж отстоит от конца на $(n - k/p)$ лет, то на него будет произведено $[(n - k/p) \cdot m]$ начислений по полной ставке i/m ($[a]$ – целая часть a) и, возможно, еще одно начисление по неполной ставке, и его частичный вклад в наращенную сумму ренты составит $S_k = (R/p) \cdot (1 + i/m)^{(n-k/p)m}$. Сумма всех таких частичных вкладов и составляет наращенную сумму ренты:

$$S = \sum_{k=1}^{n \cdot p} S_k = \sum_{k=1}^{n \cdot p} (R/p) \cdot (1 + i/m)^{(n-k/p)m}.$$

Здесь $n \cdot p$ – количество поступлений платежей.

Изменяя порядок суммирования, сумму можно записать так:

$$S = \sum_{k=0}^{n \cdot p - 1} (R/p) \cdot (1 + i/m)^{\frac{m}{p} k}.$$

Ясно, что слагаемые этой суммы есть члены геометрической прогрессии с первым членом R/p , знаменателем $(1 + i/m)^{m/p}$ и числом членов $n \cdot p$. Значит их сумма

$$S = (R/p) \frac{(1 + i/m)^{nm} - 1}{(1 + i/m)^{m/p} - 1}. \quad (3.5)$$

Найдя наращенную величину ренты, без труда можно найти современную величину ренты:

$$A = \frac{S}{(1 + i/m)^{nm}}. \quad (3.6)$$

Из этой общей формулы можно получить формулы для подсчета наращенной величины частных рент: когда платеж один раз в году, а начислений процентов несколько раз; когда, наоборот, начисление процентов только раз в году, зато платежей несколько, и т. п.

Например, пусть p – число платежей в году, а проценты начисляются один раз, т. е. $m = 1$, тогда наращенная величина такой ренты есть

$$S = (R/p) \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^{1/p} - 1} \text{ и } A = \frac{R}{p} \cdot \frac{1 - (1+i)^{-n}}{(1+i)^{1/p} - 1}. \quad (3.7)$$

Или, пусть в году один платеж ($p = 1$), зато проценты начисляются m раз в году, тогда наращенная величина такой ренты есть

$$S = R \frac{(1+i/m)^{nm} - 1}{(1+i/m)^m - 1} \text{ и } A = R \frac{1 - (1+i/m)^{-nm}}{(1+i/m)^m - 1}. \quad (3.8)$$

Весьма часто $m = p$, т. е. число платежей в году и число начислений процентов совпадают, тогда из общей формулы (3.8) получаем:

$$S = (R/p) \frac{(1+i/m)^{nm} - 1}{(i/m)}, \quad (3.9)$$

$$A = (R/p) \frac{1 - (1+i/m)^{-nm}}{(i/m)}. \quad (3.10)$$

3.1.4 «Вечная» годовая рента

Под «вечной» годовой рентой понимается рента, последовательность платежей которой неограниченна, предполагается, что рента будет выплачиваться неограниченно долго. Наращенная величина такой ренты бесконечна, но современная величина равна $A = R/i$. Докажем это.

Из формулы (3.2) для конечной годовой ренты имеем:

$$A = R \cdot a(n, i) = R \frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i}.$$

Перейдем в этой формуле к пределу при $n \rightarrow \infty$ и получим R/i .

Пример 3.4. Бизнесмен арендовал виллу за \$10 000 в год. Какова выкупная цена аренды при годовой ставке процента 5%?

Решение

Выкупная цена есть современная величина всех будущих арендных платежей: $A = R/i = 10\,000 / 0.05 = 200\,000$ долл. Между прочим, это в точности годовые процентные деньги \$10 000, которые стал бы получать арендодатель с \$200 000, помещенных в банк под упомянутую процентную ставку 5%.

3.1.5 Объединение и замена рент

Общее правило объединения рент очень просто: находятся современные величины рент-слагаемых и складываются, а затем подбирается рента-сумма с такой современной величиной и нужными остальными параметрами.

Пример 3.5. Найдём ренту-сумму для двух годовых рент: одна длительностью 5 лет с годовым платежом 1000, и другая – 8 лет и платежом 800. Годовая ставка процента 8%.

По формуле (3.2) вычисляем коэффициенты приведения: $a(5, 8) = 3,993$, $a(8, 8) = 5,747$. Далее, $A_1 = 1000 \cdot 3,993 = 3993$, $A_2 = 800 \cdot 5,747 = 4598$.

Значит, у ренты-суммы современная величина $A = A_1 + A_2 = 8591$.

Теперь можно задать либо длительность ренты-суммы, либо годовой платеж и затем второй из этих параметров определится. Такие задачи рассмотрены в п. 3.3.

Примерно так же решается и вопрос о замене данной ренты другой с измененными параметрами: находится современная величина данной ренты, а затем подбирается рента с такой современной величиной и нужными параметрами.

3.1.6 Примеры решения типовых задач в Mathcad

Задание 1. В банк помещен депозит $A = 5000$ руб. По этому депозиту в первом году будет начислено $i_1 = 10\%$, во втором – $i_2 = 12\%$, в третьем – $i_3 = 15\%$, в четвертом и пятом – $i_4 = i_5 = 16\%$ годовых. Сколько будет на счету в конце пятого года? Сколько надо было бы поместить на счет при постоянной процентной ставке $i = 13\%$, чтобы обеспечить ту же сумму? Расчеты провести для простой и сложной процентной ставки.

Решение

Формулы наращения по схеме сложных и простых процентов для переменной ставки имеют вид:

$$\text{а) } S = A(1 + i_1)^{n_1} \cdot (1 + i_2)^{n_2} \cdot (1 + i_3)^{n_3} \cdot (1 + i_4)^{n_4},$$

$$\text{б) } S = A(1 + \sum_{k=1}^4 n_k i_k),$$

где n_i – i -й период начисления процентов ($n_1 = n_2 = n_3 = 1, n_4 = 2$,

$$n = \sum_{i=1}^4 n_i = 5).$$

Вводим исходные данные:

$$A := 5000 \quad i := \begin{pmatrix} 10\% \\ 12\% \\ 15\% \\ 16\% \end{pmatrix} \quad n := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad i1 := 13\% \quad n1 := 5$$

Решение Mathcad для простой ставки:

$$S := A \cdot \left(1 + \sum_{k=1}^4 i_k \cdot n_k \right) \quad S = 8.45 \times 10^3$$

$$P := 1$$

Given

$$S = P \cdot (1 + i1 \cdot n1)$$

$$P := \text{Find}(P) \quad P = 5.121212 \times 10^3$$

Решение Mathcad для сложной ставки:

$$S1 := A \cdot \prod_{k=1}^4 (1 + i_k)^{n_k}$$

$$S1 = 9.532 \times 10^3 \quad n1 := 5 \quad i1 := 13\%$$

+

$$P1 := 1$$

Given

$$S1 = P1 \cdot (1 + i1)^{n1}$$

$$P1 := \text{Find}(P1)$$

$$P1 = 5.174 \times 10^3$$

Ответ. В конце 5-го года на счету будет 8 450 руб. либо 9 532 руб., если начисление процентов проводится по схеме простых процентов либо по схеме сложных процентов. Для получения суммы 8 450 руб. в конце пятого года при ставке $i = 13\%$ необходимо в начале периода поместить депозит в размере 5 121 руб. (по схеме простых процентов) либо 5 174 руб. (по схеме сложных процентов) для получения суммы 9 532 руб.

Задача 2. Вычислить размер платежа n -годовой ссуды покупки квартиры за A рублей с годовой ставкой i процентов и начальным взносом q процентов. Сделать расчет для ежемесячных выплат.

Расчет провести для следующих данных: $n = 20$ лет; $A = 1\,400\,000$ руб.; $i = 18\%$; $q = 30\%$.

Расчеты выполнить для сложной процентной ставки.

Решение. Сумма, которую нужно выплатить по ссуде: $A - q \cdot A = A \cdot (1 - q)$. Рассчитаем ежегодный платеж R выплаты ссуды из уравнения

$$A \cdot (1 - q) = R \cdot \frac{1 - (1 + j/m)^{-n \cdot m}}{(1 + j/m)^{m/p} - 1} = R \cdot a(p, n, j/m),$$

отсюда $R = \frac{A \cdot (1 - q)}{a(p, n, j/m)}$. Здесь $p = 12$ (количество платежей в год), $m = 12$ (количество начислений процентов в год).

Вводим исходные данные:

$A := 1400000$	$j := 18\%$	$q := 30\%$	$n1 := 20$
$p := 12$	$m := 12$		

Решение Mathcad:

$$a := \frac{1 - \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{-n1 \cdot m}}{\frac{m}{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^p - 1}} \quad a = 64.795732$$

$$R := \frac{A \cdot (1 - q)}{a} \quad R = 1.512445 \times 10^4$$

Ответ. Ежемесячные выплаты составят 15 124, 45 руб.

Задача 3. Семья хочет накопить \$12000 на машину, вкладывая в банк \$1000 ежегодно. Годовая ставка процента в банке 7%. Как долго ей придется копить?

Решение

Для решения данной задачи используем формулу наращенной величины ренты:

$$S = R \cdot (1 + i) \frac{((1 + i)^n - 1)}{i}.$$

Отсюда:

$$n = \frac{\ln\left(\frac{S \cdot i}{R(1 + i)} + 1\right)}{\ln(1 + i)}.$$

Запишем исходные данные:

$$\underline{S} := 12000 \quad \underline{R} := 1000 \quad \underline{i1} := 7\%$$

Решение Mathcad:

$$n1 := \frac{\ln \left[1 + \frac{S \cdot i1}{R \cdot (1 + i1)} \right]}{\ln(1 + i1)} \quad n1 = 8.564235$$

$$S1 := R \cdot (1 + i1) \cdot \frac{(1 + i1)^9 - 1}{i1} \quad S1 = 1.281645 \times 10^4$$

Ответ. Семье придется копить 9 лет. К концу 9-го года на счету будет 12 816,5 руб.

Задача 4. Заем взят под $i_1 = 16\%$ годовых, выплачивать осталось ежеквартально по 500 ден. ед. ($R_1 = 500$ ден. ед.) в течение $n = 2$ лет. Из-за изменения ситуации в стране процентная ставка снизилась до $i_2 = 6\%$ годовых. В банке согласились с необходимостью пересчета ежеквартальных выплат. Каков должен быть новый размер выплаты? Расчеты провести для сложной процентной ставки.

Решение

Для решения этой задачи необходимо записать современную величину невыплаченной суммы по ставке $i_1 = 16\%$ и приравнять современной величине потока платежей по ставке $i_2 = 6\%$.

$$\text{Имеем } R_1 \frac{1 - (1 + i_1/m)^{-n \cdot m}}{(1 + i_1/m)^{m/p} - 1} = R_2 \frac{1 - (1 + i_2/m)^{-n \cdot m}}{(1 + i_2/m)^{m/p} - 1}, \text{ где } m = 4 \text{ (количество начислений процентов в год), } p = 4 \text{ (количество платежей в год).}$$

Из этого уравнения находим размер платежа R_2 .

Исходные данные для Mathcad:

$$\begin{array}{llll} R1 := 500 & n := 2 & m := 4 & p := 4 \\ i1 := 16\% & i2 := 6\% & & \end{array}$$

Решение Mathcad:

$$R2 := 1$$

$$\text{Given}$$

$$R1 \cdot \frac{1 - \left(1 + \frac{i1}{m}\right)^{-n \cdot m}}{\frac{m}{\left(1 + \frac{i1}{m}\right)^p - 1}} = R2 \cdot \frac{1 - \left(1 + \frac{i2}{m}\right)^{-n \cdot m}}{\frac{m}{\left(1 + \frac{i2}{m}\right)^p - 1}}$$

$$R2 := \text{Find}(R2) \quad R2 = 449.693578$$

Ответ. Размер новой выплаты составит 449,7 руб.

Задача 5. Необходимо учесть долговое обязательство на сумму 50 000 ден. ед. за 4 года до погашения. Банк для учета обязательства применяет сложную процентную ставку 5% годовых. Проценты могут начисляться 1, 2 или 4 раза в год. Указать условия договора, по которому это обязательство может быть учтено.

Решение

В данной задаче необходимо найти современную величину суммы S , которая через 4 года составит 50 000 ден. ед. в зависимости от количества начисления процентов в год. Расчет проводим по формуле

$$P = \frac{S}{(1 + j/m)^{n \cdot m}}, \text{ где } j - \text{годовая ставка, } m - \text{количество начислений про-}$$

центов в год.

Исходные данные:

$$S := 50000 \quad i1 := 5\%$$

$$n1 := 4$$

Решение Mathcad:

$$P1(m1) := \frac{S}{\left(1 + \frac{i1}{m1}\right)^{n1 \cdot m1}}$$

$$P1(1) = 4.113512 \times 10^4$$

$$P1(2) = 4.103733 \times 10^4$$

$$P1(4) = 4.098732 \times 10^4$$

Ответ. Обязательство будет учтено на сумму 41 135 ден. ед. при начислении процентов один раз в год, на сумму 41 037 ден. ед. – при начислении процентов два раза в год, на сумму 40 987 ден. ед. – при начислении процентов четыре раза в год.

Задача 6. Как изменяется срок окупаемости проекта при изменении величины инвестиций, годовых доходов, ставки процента? Построить графики и дать объяснение.

Решение

Рассмотрим следующую модель инвестиционного проекта. Инвестиции в проект в размере K осуществляются единовременным платежом в начале срока, доход R поступает регулярно один раз в год в течение n лет, процентная ставка равна j . Срок окупаемости в этом случае рас-

считывается по формуле
$$n = -\frac{\ln(1 - \frac{K \cdot j}{R})}{\ln(1 + j)}.$$

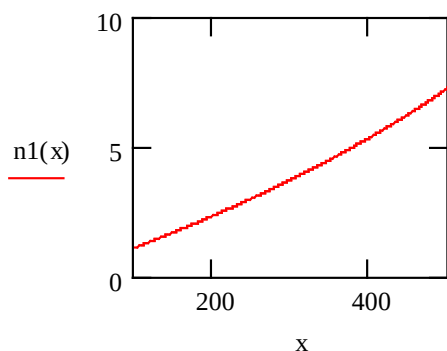
Исходные данные:

$$K := 500 \quad R := 100 \quad j := 10\%$$

Решение Mathcad:

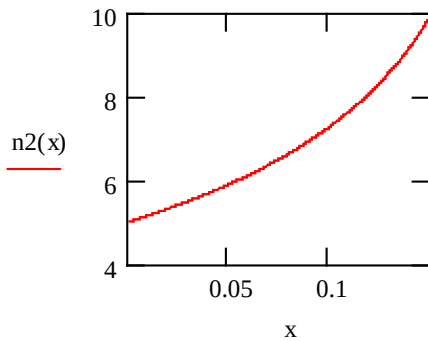
Зависимость срока окупаемости от размера инвестиций:

$$n1(x) := \frac{-\ln\left(1 - \frac{x \cdot j}{R}\right)}{\ln(1 + j)}$$



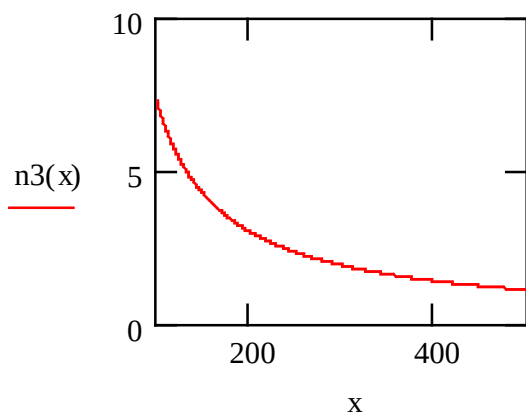
Зависимость срока окупаемости от ставки:

$$n2(x) := \frac{-\ln\left(1 - \frac{x \cdot K}{R}\right)}{\ln(1 + x)}$$



Зависимость срока окупаемости от величины годового дохода:

$$n3(x) := \frac{-\ln\left(1 - \frac{j \cdot K}{x}\right)}{\ln(1 + j)}$$



Ответ. Срок окупаемости с ростом объема инвестиций увеличивается, так как для окупаемости инвестиций требуется большее время получения дохода от проекта.

С ростом процентной ставки срок окупаемости растет. С экономической точки зрения это можно объяснить следующим образом. Если для инвестиций берется ссуда в банке под процентную ставку j , то с ростом ставки растут проценты по ссуде и, следовательно, растет долг заемщика.

Поэтому требуется большее время получения дохода от проекта для погашения ссуды.

С ростом дохода от проекта срок окупаемости уменьшается.

Задача 7. Проверьте план погашения основного долга равными годовыми платежами, если величина займа D составляет 600 ден. ед., а процентная ставка I – 8%.

Уплаты	168.0	158.4	148.8	139.2	129.6
Годы	1	2	3	4	5

Решение

Величина займа $D = 600$ ден. ед. погашается равными долями в течение 5 лет. Проценты по долгу выплачиваются каждый год на остаток долга.

Таким образом, размер срочной уплаты в году с номером t равен

$$Y_t = d + (D - (t - 1)d) \cdot i,$$

где $d = D/n$, n – срок долга.

Исходные данные:

$$D := 600 \quad n1 := 5 \quad j := 0.08$$

Решение Mathcad:

$$d := \frac{D}{n1} \quad d = 120$$

$$t := 1..n1$$

$$Y_t := d + [D - (t - 1) \cdot d] \cdot j$$

$$Y = \begin{pmatrix} 168 \\ 158.4 \\ 148.8 \\ 139.2 \\ 129.6 \end{pmatrix}$$

Ответ. План погашения долга составлен верно.

3.2 Доходность финансовой операции

Финансовой называется операция, начало и конец которой имеют денежную оценку P_0 и S_n соответственно, а цель проведения заключается в максимизации разности $S_n - P_0$. Важнейшей характеристикой операции является ее доходность.

В определении под P_0 понимают реально вложенные средства в момент $t = 0$, под S_n – реально вырученные денежные средства в результате операции, срок которой n единиц времени. Эффект от вложения естественно измерять в виде процентной ставки наращения, которую в этом случае называют доходностью.

3.2.1 Различные виды доходности операций

Абсолютная доходность d за весь срок операции определяется из уравнения $P_0(1 + d) = S_n$ или $d = (S_n - P_0) / P_0 = S_n / P_0 - 1$. Величина S_n / P_0 называется *коэффициентом* или *множителем наращения*. Ясно, что $S_n / P_0 = 1 + d$.

Средняя годовая доходность r финансовой операции (доходность за один год) – это ставка простых или сложных процентов, с помощью которой измеряют эффективность финансовой операции.

Согласно определению, доходность финансовой операции за единицу времени – это положительное число r , удовлетворяющее равенству:

$$P_0(1 + r \cdot n) = S_n$$

или

$$P_0(1 + r)^n = S_n.$$

Из этих выражений найдем связь между d и r : $1 + r \cdot n = 1 + d$ (для простой ставки) и $(1 + r)^n = 1 + d$ (для сложной ставки). Здесь время измеряется в годах, поэтому r – среднегодовая доходность операции.

Таким образом, финансовой операции ставится в соответствие эквивалентная операция наращенной суммы P_0 по ставке r в течение времени n .

3.2.2 Учет налогов

Налоги и инфляция заметно влияют на эффективность финансовой операции. Рассмотрим учет налогов. Налог начисляется, как правило, на проценты, получаемые при размещении денежной суммы в рост. Предположим, на сумму P_0 в течение времени n начислялись проценты по ставке i , g – ставка налога на проценты. Тогда величина процентов

$$I(n) = S_n - P_0,$$

а сумма налога $G_n = g \cdot I(n)$. Наращенная сумма после выплаты налога составляет

$$S(n) = S_n - G_n = S_n - g \cdot I(n) = S_n - g \cdot (S_n - P_0) = S_n(1 - g) + gP_0.$$

Если i – простая процентная ставка, то $S_n = P_0(1 + i \cdot n)$. Тогда

$$S(n) = P_0(1 + i \cdot (1 - g)n).$$

Видим, что фактически наращение производится по ставке $i(1 - g) < i$.

Если i – сложная процентная ставка, то $S_n = P_0(1 + i)^n$. Тогда

$$S(n) = P_0 \left((1 + i)^n (1 - g) + g \right).$$

Пример 3.6. При выдаче кредита на 2 года под годовую сложную процентную ставку 0,08% кредитор удерживает комиссионные в размере 0,5% от суммы кредита. Ставка налога на проценты 10%. Какова доходность операции для кредитора?

Если P_0 – сумма кредита, а S_n – сумма погашаемого долга, то $S_n = P_0(1+i)^n$, где $i = 0,08$, $n = 2$. Сумма комиссионных cP_0 , где $c = 0,005$. Тогда сумма, фактически выданная в долг, составит $P(0) = P_0(1-c)$. После выплаты налога у кредитора останется $S(n) = P_0((1+i)^n(1-g) + g)$, где $g = 0,1$ – ставка налога. Уравнение доходности имеет вид $S(n) = P(0)(1+r)^n$. Разрешая это уравнение относительно r , получим

$$r = \left(\frac{S(n)}{P(0)} \right)^{\frac{1}{n}} - 1 = \left(\frac{(1+i)^n(1-g) + g}{1-c} \right)^{\frac{1}{n}} - 1 = 0,07496.$$

Заметим, что без учета налога ($g = 0$) доходность операции составила бы 0,08271.

3.2.3 Учет инфляции

Инфляция – обесценение денег, проявляющееся в росте цен на товары и услуги, что влечет за собой снижение покупательной способности денег.

Предположим, что за n единиц времени получена наращенная сумма вклада S_n . Индекс цен за период $[0, n]$ вырос до значения $J(n)$. Тогда реальная сумма вклада вследствие снижения покупательной способности денег составит

$$S(n) = \frac{S_n}{J(n)},$$

где

$$J(n) = (1+h_1)^{(t_1-t_0)} \cdot (1+h_2)^{(t_2-t_1)} \dots (1+h_n)^{(t_n-t_{n-1})} - \quad (3.11)$$

индекс цен на интервале $[0, n]$; $[0, t_1], \dots, [t_{n-1}, t_n]$ – отрезки времени в сроке $[0, n]$ ($t_0 = 0$, $t_n = n$), длины которых $(t_1 - t_0), (t_2 - t_1), \dots, (t_n - t_{n-1})$ единиц

времени; h_i ($i = 1, \dots, n$) – темп инфляции на отрезке $[t_{i-1}, t_i]$ (измеряется в процентах).

Так как $J(n) > 1$, то $S(n) < S_n$, что означает фактическое снижение ставки наращенного.

Пример 3.7. Ожидаемый годовой темп инфляции первых двух лет вклада составляет 3%, а следующих трех – 4%. Какую минимальную годовую ставку сложных процентов должен предложить банк клиенту, чтобы реальная годовая доходность вклада была не меньше 8%?

Здесь $t = 0$ – момент размещения вклада, 1 год – единица измерения времени, срок вклада $n = 5$ лет. $h_1 = 0,03$ и $h_2 = 0,04$ – среднегодовые темпы инфляции на временных отрезках $[0, 2]$, $[2, 5]$. Для доходности по вкладу r должно быть выполнено условие: $r \geq 0,08$. Пусть i – годовая сложная процентная ставка, под которую размещена сумма P_0 . Тогда наращенная сумма вклада через n лет $S_n = P_0(1+i)^n$. С учетом инфляции реальная сумма вклада составит $S(n) = \frac{S_n}{J(n)}$, где индекс цен согласно формуле (3.11) равен $J(t) = (1+h_1)^2 \cdot (1+h_2)^3$. Уравнение доходности имеет вид: $S(n) = P(0)(1+r)^n$. Разрешая это уравнение относительно r и учитывая требуемое условие для доходности, получим:

$$r = \frac{1+i}{(1+h_1)^{\frac{2}{5}}(1+h_2)^{\frac{3}{5}}} - 1 \geq 0,08.$$

Отсюда $i \geq 11,89\%$. Значит, минимальная процентная ставка размещения вклада составляет 11,89% против 8% без учета инфляции.

3.2.4 Поток платежей и его доходность

Пусть $\{R_k, t_k\}$ – поток платежей, в нем t_k – моменты времени, R_k – платежи. Будем говорить, что рассматриваемый поток имеет современную

величину A при уровне доходности j , если $\sum_k R_k / (1+j)^{t_k} = A$. Если поток есть годовая рента с годовым платежом R и длительностью n , то рента имеет современную величину A при уровне доходности j , если $R \cdot a_{n,j} = A$. Фиксируем A , тогда при увеличении R доходность ренты увеличивается. Можно сказать и по-другому: для увеличения доходности ренты надо увеличить годовой платеж.

Все эти соображения особенно хорошо видны на примере вечной ренты, поскольку для нее $A = R / j$, или, по-другому: доходность вечной ренты есть $j = R / A$. Важно отметить, что определенная таким образом доходность потока платежей не зависит от ставки процента, а зависит только от величины и моментов самих платежей, в силу чего ее называют *часто внутренней доходностью потока платежей*.

Если в потоке платежей имеются отрицательные величины, то внутренняя доходность определяется как наименьший положительный корень (наименьшая процентная ставка) уравнения $\sum_k R_k / (1+j)^{t_k} = 0$.

Пример 3.8. Вексель учтен по ставке $i = 10\%$ за 160 дней до его оплаты (временная годовая база равна 360 дням). При выполнении операции учета с владельца векселя удержаны комиссионные в размере $0,5\%$ от номинала векселя. Найти доходность операции.

Решение

Абсолютная доходность операции без учета комиссионных:

$$d = \frac{S}{P} - 1 = \frac{N}{N(1-i \cdot m)} - 1,$$

где S, P – конечная и начальная стоимость векселя; N – номинал векселя; $m = 160/360$. Подставив исходные данные, получим: $d = 0.046$, т. е. $d = 4.6\%$.

С учетом комиссионных абсолютная доходность равна:

$$d = \frac{S}{P} - 1 = \frac{N}{N(1 - i \cdot m - 0.005)} - 1 = 5.2\%.$$

Среднегодовая доходность равна:

$$(1 + 0,046)^{360/160} - 1 = 0,106, \text{ т. е. } 10,6\% - \text{ без учета комиссионных,}$$

$$(1 + 0,052)^{360/160} - 1 = 0,1208, \text{ т. е. } 12,08\% - \text{ с учетом комиссионных.}$$

3.3 Кредитные расчеты

3.3.1 Расходы по обслуживанию долга

Определение периодических расходов, связанных с займом, называют обслуживанием долга. Разовую сумму по обслуживанию долга называют *срочной уплатой*. Срочные уплаты включают: текущие процентные платежи; средства, предназначенные для погашения (амортизации) основного долга. Таким образом, срочная уплата равна $Y = R + I$, где R – годовые расходы по погашению основной суммы долга, I – проценты по займу.

Обычно проценты выплачиваются на протяжении всего срока займа периодически. Иногда они начисляются и присоединяются к основной сумме долга. Основная сумма чаще всего погашается частями, причем размеры платежей по погашению (срочная уплата) могут быть одинаковы или могут изменяться.

Погашение займа одним платежом в конце срока займа

Пусть заем D выдан на n лет под i сложных годовых процентов. К концу n -го года наращенная его величина станет $D(1+i)^n$. Если предполагается отдать заем одним платежом, то это и есть размер данного платежа.

Погашение основного долга одним платежом в конце срока займа

Сам заем называется основным долгом (или телом долга), а наращиваемый добавок – процентными деньгами. Пусть заем D выдан на n лет под i сложных годовых процентов. За 1-й год процентные деньги составят $Y_1 = iD$. Если их выплатить, то останется снова только основной долг в размере D . И так будем выплачивать в конце каждого t -го года наращенные за этот год процентные деньги в размере $Y_t = iD$. В конце n -го года выплаты составят величину $Y_n = iD + D$ – процентные деньги за последний год и основной долг. Общая сумма выплат за n лет составит: $n \cdot i \cdot D + D = D \cdot (1 + n \cdot i)$.

Погашение основного долга равными годовыми выплатами

Пусть заем D выдан на n лет под i сложных годовых процентов. При рассматриваемом способе его выплаты в конце каждого года выплачивается n -я доля основного долга, т. е. величина $d = D/n$. В конце 1-го года, кроме того, платятся проценты с суммы D , которой пользовались в течение этого года, т. е. еще iD . Весь платеж в конце 1-го года равен $Y_1 = d + iD$. В конце 2-го года выплата составит $Y_2 = d + i(D - d)$ и т. д., так что в конце $(k + 1)$ -го года платеж $Y_{k+1} = d + i(D - k \cdot d)$. Легко видеть, что платежи $Y_1, Y_2, \dots$ образуют убывающую арифметическую прогрессию с разностью iD/n , первым членом $Y_1 = d + iD$ и последним $Y_n = d + id$. Общая сумма выплат составит $D \cdot (1 + n \cdot i) - D \cdot \frac{i \cdot (n - 1)}{2}$.

Погашение основного долга равными срочными уплатами

На протяжении всего срока погашения регулярно выплачивается постоянная срочная уплата, часть ее идет в погашение долга, а часть – в погашение процентов за заем. Величина долга убывает после каждой выплаты.

Однако в связи с уменьшением выплат по процентам с течением времени увеличиваются суммы, идущие на погашение основного долга. Срочная уплата равна

$$Y = d_t + iD_t = \text{const},$$

где d_t – сумма, которая идет на погашения основного долга в году с номером t , iD_t – проценты за кредит в году с номером t .

Периодически выплачиваемые суммы Y можно рассматривать как постоянную годовую ренту, член которой определяется по формуле:

$$Y = \frac{D_1}{a_{n,i}},$$

где $D_1 = D$ – размер займа.

Структура срочной уплаты, т. е. та ее часть, которая идет на погашение основного долга, и часть, которая идет на погашение процентов, имеет вид:

- размер погасительного платежа в году t :

$$d_t = Y - D_t i = d_{t-1}(1+i) = d_1(1+i)^{t-1}, \quad t = 2, \dots, n;$$

$$d_1 = Y - D_1 i = Yv^n = D_1 v^n / a_{n,i} = D_1 / s_{n,i};$$

- остаток долга на начало года $t+1$:

$$D_{t+1} = D_t - d_t = D_t(1+i) - Y;$$

- сумма погашенного долга на конец t -го года:

$$W_t = \sum_{k=0}^{t-1} d_1(1+i)^k = d_1 s_{t,i},$$

где $s_{t,i}$ – коэффициент наращения годовой ренты, срок которой равен t лет;

- выплаченные проценты на конец t -го года: $I_t = i \cdot \sum_{k=1}^t D_k = t \cdot Y - W_t$.

3.3.2 Формирование погасительного фонда по более высоким процентам

Взятый заем может погашаться разными способами. Например, заемщик может создать специальный погасительный фонд и накапливать на нем средства, чтобы погасить заем единым платежом в конце срока займа. Понятно, что это имеет смысл, если у заемщика есть возможность получать на деньги погасительного фонда большие проценты, чем те, под которые он взял заем.

Рассмотрим три варианта формирования погасительного фонда.

1. Основной долг погашается из фонда в конце срока разовым платежом. Сумма взносов в фонд с процентами на них должна быть равна долгу на момент его уплаты. Проценты по долгу выплачиваются не из фонда.

Пусть накопление средств в фонде производится путем регулярных ежегодных взносов, размер которых равен R , и на эти взносы начисляются проценты по ставке i . Одновременно происходит выплата процентов, начисляемых на долг по ставке g (проценты выплачиваются не из фонда). Тогда срочная уплата $Y = Dg + R$, где Dg – проценты по долгу, R – платежи в фонд.

Размер платежа (взноса) в фонд равен:

$$R = \frac{D}{s_{n,i}}.$$

С учетом этого срочная уплата

$$Y = D \left(g + \frac{1}{s_{n,i}} \right).$$

2. Основной долг и проценты выплачиваются из фонда в конце срока.

Если условия финансового обязательства предусматривают присоединение процентов к сумме основного долга, то взносы в фонд к концу срока должны обеспечить накопление суммы $D(1 + g)^n$. В этом случае

$$Y = \frac{D(1+g)^n}{s_{n,i}}.$$

3. Фонд формируется таким образом, чтобы обеспечить периодическую выплату процентов по долгу (из фонда) и в конце срока возврат основного долга.

Рассмотрим процесс формирования фонда. Первая выплата в фонд в сумме R осуществляется в момент взятия кредита. На сумму R начисляются проценты за n лет (n – общий срок кредита) по сложной ставке i . В конце срока эта сумма будет равна $R(1+i)^n$. В начале второго года в фонд вносится сумма R и выплачиваются из фонда проценты по долгу I . Таким образом, фактически в фонд вносится сумма $(R-I)$. На нее будут начисляться проценты в течение $(n-1)$ лет, к концу срока получим сумму $(R-I)(1+i)^{n-1}$. В начале третьего года вносим в фонд сумму R и одновременно берем из фонда сумму I . На этот взнос (за вычетом процентов по долгу) будут начисляться проценты в течение $(n-2)$ лет. В результате к концу срока получим сумму $(R-I)(1+i)^{n-2}$. Последний взнос в фонд осуществляется в момент времени $(n-1)$ и он вместе с начисленными процентами (с учетом изъятия из фонда суммы процентов по долгу) даст сумму $(R-I)(1+i)$. В конце срока необходимо обеспечить выплату суммы, размер которой равен $(D+I)$ (основной долг плюс проценты по долгу за последний год).

Составим балансовое уравнение. В нем все взносы в фонд за вычетом процентов по долгу, с учетом начисления на них процентов в фонде, приравниваем к сумме долга плюс проценты за последний год. Имеем

$$R(1+i)^n + (R-I)(1+i)^{n-1} + \dots + (R-I)(1+i)^2 + (R-I)(1+i) = D + I.$$

Из этого уравнения определяем размер взносов в фонд R :

$$R = \frac{D}{(1+i)s_{n,i}} + \frac{I}{1+i}.$$

Эта сумма и будет равна срочной уплате: $Y = R$.

3.3.3 Потребительский кредит и его погашение

При выдаче потребительского кредита сразу на всю сумму кредита начисляются простые проценты, они прибавляются к величине самого кредита и сумма всех погашающих выплат должна быть равна этой величине. Существует несколько схем погашения потребительского кредита.

Погашение равными выплатами. Пусть кредит размером D взят на n лет, годовая ставка простых процентов i , следовательно, всего надо набрать выплат на сумму $D(1+n \cdot i)$. Если в год предусмотрено (договором о кредите) m выплат, то одна выплата равна $D(1+n \cdot i)/nm$.

Погашение по правилу 78. При этом способе основной долг D выплачивается равными долями, а процентные деньги в размере niD , начисленные по простой ставке, – выплатами, уменьшающимися в арифметической прогрессии, и последняя выплата равна разности этой прогрессии. Если в год предусмотрено m выплат (например, 12 при ежемесячных выплатах), то самая последняя выплата равна d – неизвестной пока разности прогрессии, а первая – nmd . Но сумма всех этих выплат $nmd + \dots + 2d + d = (1+nm)nm \cdot \frac{d}{2}$ должна быть равна процентным деньгам, т. е. $(1+nm)nm \cdot \frac{d}{2} = niD$, откуда можно найти $d = \frac{niD}{(1+nm)nm/2}$ и все выплаты процентных денег.

Практически делают так. Считают сумму номеров всех выплат $N = (1+2+\dots+nm) = \frac{(1+nm)nm}{2}$ и делят процентные деньги на N частей, т. е. $d = n \cdot i \cdot D / N$; далее 1-й платеж равен nm таких частей, т. е. nmd ;

2-й платеж будет на одну часть меньше $(nm - 1)d$ и т. д., последний платеж равен ровно одной части d . Сумма номеров месяцев в году $1+2+\dots+12$ равна 78, отсюда и название этого правила.

3.3.4 Льготные кредиты

Льготный кредит выдают по льготной ставке, меньшей, чем обычная ставка. Фактически тем самым заемщик получает субсидию, которую рассчитывают как разницу соответствующих современных сумм.

Пусть кредит размером D выдан на n лет по льготной ставке g , меньшей, чем обычная ставка i , и будет погашаться равными выплатами. Эти выплаты образуют годовую ренту. Обозначим размер одной выплаты y , тогда современная величина этой ренты равна $y \cdot a(n, g)$. Отсюда найдем: $y = D / a(n, g)$. А если бы выплаты шли по обычной ставке i , то размер каждой выплаты был бы $z = D / a(n, i)$. Разность $z - y = D / a(n, i) - D / a(n, g)$ – это ежегодные потери кредитора, а современная величина ренты этих потерь по действующей ставке i , т. е.

$(z - y) \cdot a(n, i) = [D / a(n, i) - D / a(n, g)] a(n, i) = D \left[1 - \frac{a(n, i)}{a(n, g)} \right]$ и есть субсидия кредитора заемщику. Эта субсидия называется еще абсолютным грант-элементом, а величина $1 - \frac{a(n, i)}{a(n, g)}$ – относительным грант-элементом.

Наращенная сумма абсолютного грант-элемента, или, что то же самое, наращенная сумма субсидии, называется общими потерями кредитора.

Пример 3.9. Пусть $D = 1000$, $n = 8$, $i = 8\%$, $g = 5\%$. Находим выплаты по обычной ставке из уравнения: $z \cdot a(8, 8) = 1000$. Коэффициент приведения ренты $a(8, 8) = 5,747$; отсюда $z = 174$. Выплаты по льготной ставке находим из уравнения: $y \cdot a(8, 5) = 1000$, находим: $a(8, 5) = 6,463$; отсюда

$y = 155$. Следовательно, ежегодные потери кредитора равны 19. Подсчитаем относительный и абсолютный грант-элементы (последний, напомним, есть субсидия кредитора заемщику): $1 - \frac{a(n,i)}{a(n,g)} = 1 - 5,747/6,463 = 0,108$; $1000 \cdot 0,108 = 108$. Наконец, общие потери кредитора $108 \cdot (1 + 0,08)^8$; величина $M(8,8) = (1 + 0,08)^8 = 1,851$. Следовательно, общие потери кредитора равны 200.

3.4 Задания к лабораторной работе № 3

Тема «Потоки платежей»

Задание 1. Вычислить размер платежа n -годовой ссуды покупки квартиры за A рублей с годовой ставкой i процентов и начальным взносом q процентов. Сделать расчет для ежемесячных и ежегодных выплат.

Расчеты провести для простой и сложной процентной ставки.

Вариант	n , лет	A , руб.	i , %	q , %
1	15	3 000 000	15	10
2	15	3 500 000	16	15
3	15	4 000 000	10	18
4	20	4 500 000	8	20
5	20	5 000 000	7	25
6	20	3 000 000	7	25
7	25	4 000 000	6	30
8	25	5 000 000	5	35
9	25	6 000 000	7	25
10	30	6 000 000	6	30

Задание 2. Семья хочет через n лет купить дачу за S ден. ед. Какую сумму (одинаковую) ей нужно каждый год из этих n лет добавлять на свой счет в банке, чтобы накопить S , если годовая ставка процента в банке i %?

Расчеты провести для простой и сложной процентной ставки.

Вариант	n , лет	S , ден. ед.	i , %
1	4	8 000	6
2	4	10 000	7
3	4	12 000	8
4	5	10 000	9
5	5	15 000	7
6	5	16 000	8
7	7	15 000	7
8	7	18 000	8
9	7	20 000	9
10	8	25 000	10

Задание 3. На банковский счет писателя издательство перечисляет суммы по R руб. p раз в год, на которые банк начисляет сложные проценты по годовой ставке $i\%$ m раз в год. Сколько будет на счете через n лет?

Вариант	p	R , руб.	m	i , %	n , лет
1	2	1 000	2	5	4
2	2	1 100	2	6	5
3	2	1 200	2	5	5
4	2	1 500	2	7	7
5	2	1 800	2	8	3
6	4	2 000	4	7	5
7	4	2 100	4	6	3
8	4	2 200	4	5	4
9	4	2 500	4	8	6
10	4	3 000	4	9	5

Задание 4. Для мелиоративных работ государство перечисляет фермеру $\$R$ в год. Деньги поступают на специальный счет и на них начисляют сложные проценты по ставке $i\%$ m раз в год. Сколько накопится на счете через n лет?

Вариант	$R, \$$	m	$i, \%$	$n, \text{ лет}$
1	200	2	3	4
2	250	2	4	5
3	300	2	5	6
4	350	2	3	4
5	400	2	4	5
6	450	4	5	6
7	600	4	3	4
8	700	4	4	5
9	800	4	5	6
10	900	4	3	4

Задание 5. В ходе судебного заседания выяснилось, что г. N недоплачивал налоги в размере R ден. ед. ежемесячно. Налоговая инспекция хочет взыскать недоплаченные за последние n лет налоги вместе с процентами (ставка $i\%$ ежемесячная). Какую сумму должен заплатить г. N? Расчеты провести для простой и сложной процентной ставки.

Вариант	$R, \text{ руб.}$	$i, \%$	$n, \text{ лет}$
1	50	2	5
2	60	3	4
3	70	4	3
4	80	5	2
5	90	2	5
6	110	3	4
7	120	4	3
8	130	5	2
9	140	2	4
10	150	3	3

Задание 6. В ходе судебного заседания выяснилось, что по вине Пенсионного фонда г. N в течение n лет недоплачивали R ден. ед. пенсии ежемесячно. Суд обязал фонд выплатить все недоплаченные деньги с процентами (ставка $i\%$ годовая). Какова сумма выплаты? Расчеты провести для простой и сложной процентной ставки.

Вариант	R , руб.	i , %	n , лет
1	50	7	12
2	60	8	13
3	70	9	11
4	80	10	9
5	90	11	10
6	110	12	11
7	120	13	12
8	130	14	13
9	140	15	14
10	150	16	15

Примечание. В задачах 5 и 6 рассматривается конфликтная ситуация. Суд обязательно примет решение об уплате долга. Однако сумма возвращаемого долга может быть разной. При расчете суммы долга указать, в чью пользу вы провели расчеты.

Тема «Доходность финансовой операции»

Задание 1. Значения капитала в моменты времени 0; 1; 2; 4 есть K_0 ден. ед., K_1 ден. ед., K_2 ден. ед., K_4 ден. ед. Найти абсолютную среднюю доходность на отдельных промежутках: $[0;1]$, $[0;2]$, $[0;4]$, $[1;2]$, $[1;4]$, $[2;4]$. Расчеты выполнить для простой и сложной ставки.

Вариант	K_0	K_1	K_2	K_4
1	100	150	200	400
2	100	200	250	400
3	120	200	300	350
4	120	250	300	450
5	130	150	200	350
6	130	200	250	400
7	140	250	350	500
8	140	300	400	480
9	150	200	400	500
10	150	300	450	500

Задание 2. На какую годовую ставку процентов нужно заменить номинальную ставку годовых сложных процентов $j\%$, если начислять сложные проценты m раз в год?

Вариант	$j, \%$	m
1	9	2
2	10	4
3	11	3
4	12	4
5	13	6
6	14	6
7	10	6
8	11	6
9	12	6
10	13	6

Задание 3. По срочному годовому рублевому вкладу банк платит i_r % годовых, а по такому же валютному – i_s %. Прогноз повышения курса доллара за год – с H руб. до K руб. Какое принять решение: нести рубли в банк или купить на них доллары и хранить их дома?

Вариант	i_r , %	i_s , %	H , руб.	K , руб.
1	10	5	70	75
2	10	5	72	75
3	11	6	77	80
4	11	5	69	72
5	12	6	72	76
6	12	6	70	75
7	13	5	72	75
8	13	5	78	84
9	14	6	80	85
10	15	6	79	85

Задание 4. При выдаче кредита на $n = 200$ дней под i % годовых кредитор удерживает комиссионные в размере k % от суммы кредита. Ставка налога на проценты j . Какова доходность операции для кредитора?

Вариант	n , дней	i , %	k , %	j , %
1	150	10	0,5	10
2	150	11	0,6	11
3	200	9	0,6	9
4	200	11	0,4	11
5	200	10	0,4	10
6	200	12	0,6	12
7	250	9	0,4	9
8	250	10	0,5	10
9	250	11	0,6	11
10	300	12	0,4	12

Задание 5. Автокредит в сумме A рублей с годовой ставкой $i\%$ и начальным взносом $q\%$ взят на n лет. Ежемесячные услуги банка за пользование кредитом составляют $g\%$. Вычислить размер ежемесячного платежа (размер срочной уплаты), среднегодовую и внутреннюю доходность операции для банка.

Вариант	A , тыс. руб.	n , лет	i , %	q , %	g , %
1	500	3	8	15	0,2
2	550	3	8	15	0,23
3	600	3.5	9	20	0,23
4	750	3	7	20	0,24
5	850	3.5	7	20	0,2
6	950	4.5	8	10	0,25
7	1000	5	9	10	0,22
8	1100	5	5	20	0,21
9	1200	3	5	15	0,22
10	1200	3	6	20	0,25

Тема «Кредитные расчеты»

Задание 1. Заем был взят под $i_1\%$ годовых, выплачивать осталось ежеквартально по R ден. ед. в течение n лет. Из-за изменения ситуации в стране процентная ставка снизилась до $i_2\%$ годовых. В банке согласились с необходимостью пересчета ежеквартальных выплат. Каков должен быть новый размер выплаты?

Расчеты провести для простой и сложной процентной ставки.

Вариант	R , ден. ед.	i_1 , %	i_2 , %	n , лет
1	400	17	10	2
2	450	15	10	2
3	480	12	7	3
4	490	12	7	3
5	500	16	10	2
6	510	16	10	2
7	520	15	9	2
8	550	17	8	2
9	600	15	7	3
10	640	14	4	3

Задание 2. Проверьте план погашения основного долга равными годовыми уплатами, если величина займа составляет D ден. ед., а процентная ставка $i\%$.

Решить задачу, взяв данные из таблицы. Здесь R_j – уплата в j -м году.

Вариант	D , ден. ед.	i , %	R_1 , ден. ед.	R_2 , ден. ед.	R_3 , ден. ед.	R_4 , ден. ед.	R_5 , ден. ед.
1	500	7	135	128	121	114	107
2	500	10	150	140	130	120	110
3	600	11	186	172.8	159.6	146.4	133.2
4	700	9	203	190.4	177.8	165.2	152.6
5	700	7	189	179.2	169.4	159.6	149.8
6	800	10	240	224	208	192	176
7	800	8	224	211.2	198.4	185.6	172.8
8	900	8	252	237.6	223.2	208.8	194.4
9	900	6	234	223.2	212.4	201.6	190.8
10	1000	10	300	280	260	240	220

Задание 3. Магазин продает телевизоры в рассрочку на 1 год. Сразу же к цене телевизора D ден. ед. добавляют $i\%$, и всю эту сумму надо погасить в течение года, причем стоимость телевизора гасится равномерно, а надбавка – по правилу 78. Найти ежемесячные выплаты.

Вариант	D , ден. ед.	i , %
1	200	11
2	250	10
3	300	9
4	350	8
5	400	8
6	450	10
7	500	9
8	550	8
9	600	9
10	650	10

Задание 4. Заем D ден. ед. взят на n лет под $i\%$ годовых. Погашаться будет равными ежегодными выплатами основного долга. Найдите ежегодные выплаты.

Расчеты провести для простой и сложной процентной ставки.

Вариант	D , ден. ед.	n , лет.	i , %
1	3000	6	8
2	3000	5	7
3	4000	7	8
4	4000	8	6
5	5000	9	8
6	6000	9	5
7	6000	10	7
8	7000	8	7
9	7000	10	6
10	8000	9	6

Задание 5. Заем D ден. ед. взят на n лет под i % годовых. Погашаться будет ежегодными равными выплатами. Найдите размер этой выплаты.

Расчеты провести для простой и сложной процентной ставки.

Вариант	D , тыс. ден. ед.	n , лет	i , %
1	10	7	9
2	15	7	8
3	20	9	8
4	25	8	9
5	30	9	8
6	35	9	7
7	40	9	8
8	45	10	9
9	50	10	7
10	55	10	7

4 ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 4

«БИРЖЕВОЙ ИГРОК»

4.1 Описание модели

Биржевой игрок разработал свой порядок приобретения и продажи акций, состоящий в следующем:

1) обладая пакетом акций, необходимо продать его, как только цены на эти акции начинают падать;

2) как только цены на акции начинают возрастать, их необходимо покупать.

Игрок не желает рисковать своими ограниченными средствами в натурном эксперименте и хочет оценить прибыльность своей стратегии с помощью имитационного моделирования. Для упрощения дальнейших рассуждений будем предполагать, что:

а) игрок покупает и продает только один вид акций;

б) в рассматриваемый момент времени, принимаемый за начальный, игрок располагает пакетом в 100 акций, стоимостью в 10 ден. ед. каждая, и цена акции может ежедневно изменяться на 1 ден. ед. (если сегодня акция стоит 10 ден. ед., то завтра она будет стоить 9, 10 или 11 ден. ед.);

в) игрок совершает не более одной сделки в день и за каждую сделку платит комиссионные в размере 2% стоимости купленных или проданных акций;

г) игрок не располагает иными средствами, кроме пакета в 100 акций;

д) в последний день игры игрок продает все свои акции (если они еще остались у него).

Для оценки прибыльности своей стратегии игрок построил модель суточных флуктуаций цен акций с использованием ретроспективных биржевых данных. Эта модель представлена в виде таблицы 4.1 и определяет вероятности изменения цен на акции. Согласно этой модели, если в понедельник

и во вторник цена одной акции равнялась 10 ден. ед., то в среду (см. табл. 4.1, вторая строка снизу) она будет стоить 11 ден. ед. с вероятностью $1/4$, 10 ден. ед. с вероятностью $1/2$ и 9 ден. ед. с вероятностью $1/4$. Если же во вторник цена одной акции равнялась 9 ден. ед., то в среду (см. табл. 4.1, первая строка снизу) она будет стоить 10 ден. ед. с вероятностью $1/2$, 9 ден. ед. с вероятностью $1/4$ и 8 ден. ед. с вероятностью $1/4$.

Таблица 4.1 – Вероятности изменения цен акций

Цена одной акции в $(n-1)$ -й день	Цена одной акции в n -й день		
	Возрастает	Остается без изменения	Падает
Взросла по сравнению с $(n-2)$ -м днем	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
Осталась такой же, как и в $(n-2)$ -й день	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
Упала по сравнению с $(n-2)$ -м днем	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

4.2 Результаты моделирования

Предположим, что игрок решил ограничить длительность периода имитации 20 днями и каждому дню поставил в соответствие номер $k = 1, \dots, 20$. (первый столбец табл. 4.2). С помощью датчика случайных чисел с равномерным распределением в пакете Mathcad получены числа, представленные во втором столбце таблицы 4.2. Для определения изменения цен на акции необходимо задать начальные условия: цену одной акции в день с номером $k = 0$ и направление изменения вчерашней цены. Направление изменения вчерашней цены можно взять по первой, второй либо третьей строке таблицы 4.1.

Пусть цена акции в день с номером $k = 0$ равна 10 ден. ед., в качестве стартовой строки игрок выбрал вторую строку, т. е. цена акции осталась такой же, какой она была вчера.

Итак, первое число $z_1 = 0,1$ ($0 < 1/4$), поэтому в соответствии с таблицей 4.1 завтра цена возрастет и станет равной 11 ден. ед. В таблице 4.1 переходим в первую строку. Далее, $z_2 = 0,19$ ($0,19 < 1/2$), цена опять возросла и стала равной 12 ден. ед. Затем берем $z_3 = (1/2 < 0,59 < 1/2 + 1/4)$ и в соответствии с таблицей 4.1 (см. первую строку и второй столбец) цена остается без изменений. Переходим во вторую строку. Далее, $z_4 = (1/4 < 0,35 < 1/4 + 1/2)$ и в соответствии с таблицей 4.1 (см. вторую строку и второй столбец) цена остается без изменений, равной 12 ден. ед. Остаемся во второй строке. Затем $z_4 = 0,82$ ($1/4 + 1/2 < 0,82 < 1$) цена падает и становится равной 11 ден. ед. Переходим в третью строку. Пакет акций продаем по цене 11 ден. ед. С учетом комиссии игрок получит сумму, равную $1100 - 0,02 \cdot 1100 = 1078$ ден. ед.

И так далее. Результаты занесены в таблицу 4.2.

Таблица 4.2 – Результаты имитационного моделирования биржевой игры

День имитации	Случайное число z	№ строки в таблице	Цена акции	Решение	Количество акций у игрока	Стоимость пакета акций	Наличные деньги
1	0,10	2	10	–	100	1000	0,00
2	0,19	1	11	–	100	1100	0,00
3	0,59	1	12	–	100	1200	0,00
4	0,35	2	12	–	100	1200	0,00
5	0,82	2	11	Продать	0	0	1176
6	0,17	3	12	Купить	96	1152	0,00
7	0,71	1	12	–	96	1152	0,00
8	0,30	1	13	–	96	1248	0,00
9	0,09	1	14	–	96	1344	0,00
10	0,15	1	15	–	96	1440	0,00
11	0,99	3	14	Продать	0	0	1411
12	0,12	1	15	Купить	92	1380	3,00
13	0,10	1	16	–	92	1472	3,00
14	0,53	1	16	–	92	1472	3,00
15	0,60	2	16	–	92	1472	3,00
16	0,17	1	17	–	92	1564	3,00
17	0,45	1	18	–	92	1656	3,00
18	0,06	1	19	–	92	1748	3,00
19	0,78	3	18	Продать	0	0	1626
20	0,52	2	18	–	0	0	1626

Проанализировав результаты имитационного моделирования, представленные в таблице 4.2, можно сразу отметить, что, придерживаясь своей стратегии, биржевой игрок останется в выигрыше. А что будет, если повторить имитационный эксперимент или увеличить длительность периода имитирования?

На рисунке 4.1 приведен пример программы «Биржевой игрок», созданный в пакете Mathcad, а на рисунке 4.2 – результаты работы программы.

Биржевой игрок	
<pre> solvr(a,N,p,m,q,c) := S ← 0 j ← 1 c1 ← c while j ≤ m z ← rnd(1) if z ≤ a_{c1,1} c ← 1 p ← p + 1 if S > p·(1 + q) N ← $\frac{S·(1 - q)}{p}$ N ← trunc(N) S ← S·(1 - q) - N·p if a_{c1,1} < z ≤ a_{c1,1} + a_{c1,2} p ← p c ← 2 if a_{c1,1} + a_{c1,2} < z c ← 3 p ← p - 1 S ← S + N·p·(1 - q) N ← 0 b_{j,1} ← j b_{j,2} ← p b_{j,3} ← N b_{j,4} ← S j ← j + 1 c1 ← c b_{m,4} ← b_{m,4} + b_{m,2}·b_{m,3}·(1 - q) b_{m,3} ← 0 b </pre>	Процедура solvr рассчитывает стратегию игры. Входные данные - a - матрица вероятностей - N - количество акций в первый день игры - p - цена одной акции - m - количество дней игры - q - комиссионные - c - номер стартовой строки Выходные данные В массиве b в первом столбце указан номер дня, во втором столбце указана цена, в третьем столбце дается количество акций, в четвертом столбце дана наличная сумма биржевого игрока. В первый день игры у игрока находится пакет акций в количестве N, наличных денег нет.

Рис. 4.1 – Код программы «Биржевой игрок»

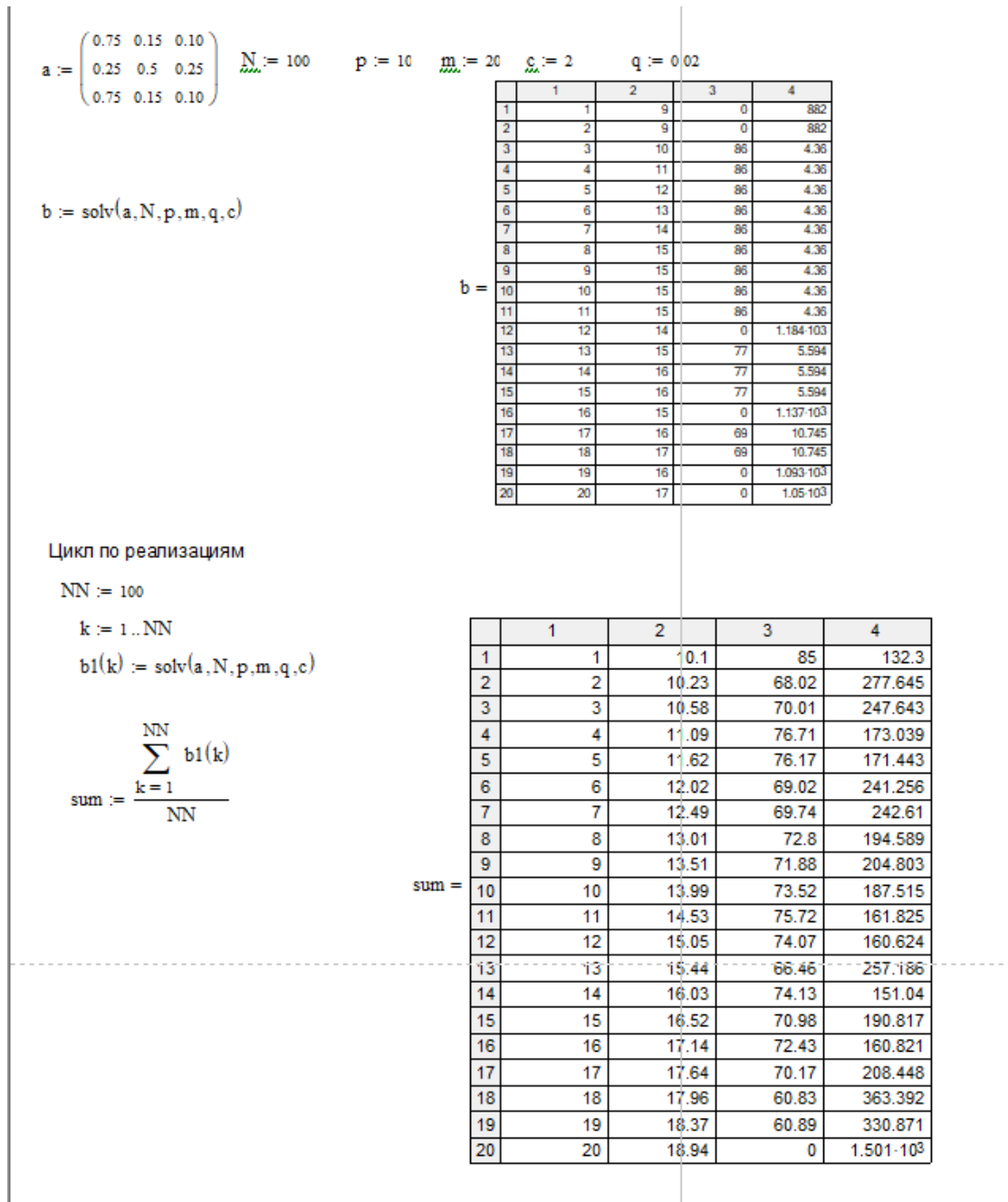


Рис. 4.2 – Результаты работы программы «Биржевой игрок»

4.3 Задания к лабораторной работе № 4

Задание 1. Написать программу биржевой игры в пакете Mathcad. В качестве стартовой строки взять вторую строку таблицы вероятностей.

Задание 2. Выполнить моделирование игры для 20 дней. Сделать выводы относительно прибыльности стратегии на 20-й день игры.

Задание 3. Провести расчеты для 100 реализаций и найти средние значения рассчитанных величин. Сделать выводы относительно прибыльности стратегии на 20-й день игры.

Вариант 1

Цена одной акции в $(n-1)$ -й день	Цена одной акции в n -й день		
	Возрастает	Остается без изменения	Падает
Взросла по сравнению с $(n-2)$ -м днем	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
Осталась такой же, как и в $(n-2)$ -й день	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
Упала по сравнению с $(n-2)$ -м днем	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$

Вариант 2

Цена одной акции в $(n-1)$ -й день	Цена одной акции в n -й день		
	Возрастает	Остается без изменения	Падает
Взросла по сравнению с $(n-2)$ -м днем	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
Осталась такой же, как и в $(n-2)$ -й день	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
Упала по сравнению с $(n-2)$ -м днем	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

Вариант 3

Цена одной акции в $(n-1)$ -й день	Цена одной акции в n -й день		
	Возрастает	Остается без изменения	Падает
Взросла по сравнению с $(n-2)$ -м днем	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
Осталась такой же, как и в $(n-2)$ -й день	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
Упала по сравнению с $(n-2)$ -м днем	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

Примечание. Для варианта 3 необходимо рассматривать три несовместных события (A_1 , A_2 , A_3) и с учетом этого строить таблицу.

Вариант 4

Цена одной акции в $(n-1)$ -й день	Цена одной акции в n -й день		
	Возрастает	Остается без изменения	Падает
Взросла по сравнению с $(n-2)$ -м днем	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$
Осталась такой же, как и в $(n-2)$ -й день	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{2}$
Упала по сравнению с $(n-2)$ -м днем	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{2}$

Вариант 5

Цена одной акции в $(n-1)$ -й день	Цена одной акции в n -й день		
	Возрастает	Остается без изменения	Падает
Взросла по сравнению с $(n-2)$ -м днем	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
Осталась такой же, как и в $(n-2)$ -й день	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
Упала по сравнению с $(n-2)$ -м днем	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$

Вариант 6

Цена одной акции в $(n-1)$ -й день	Цена одной акции в n -й день		
	Возрастает	Остается без изменения	Падает
Взросла по сравнению с $(n-2)$ -м днем	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
Осталась такой же, как и в $(n-2)$ -й день	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
Упала по сравнению с $(n-2)$ -м днем	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Вариант 7

Цена одной акции в $(n-1)$ -й день	Цена одной акции в n -й день		
	Возрастает	Остается без изменения	Падает
Взросла по сравнению с $(n-2)$ -м днем	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
Осталась такой же, как и в $(n-2)$ -й день	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
Упала по сравнению с $(n-2)$ -м днем	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Вариант 8

Цена одной акции в $(n-1)$ -й день	Цена одной акции в n -й день		
	Возрастает	Остается без изменения	Падает
Взросла по сравнению с $(n-2)$ -м днем	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
Осталась такой же, как и в $(n-2)$ -й день	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
Упала по сравнению с $(n-2)$ -м днем	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

5 ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 5

«СПОСОБЫ ПОСТРОЕНИЯ МОДЕЛИРУЮЩИХ АЛГОРИТМОВ СИСТЕМ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ»

Существуют следующие способы (или принципы) построения моделирующих алгоритмов:

- способ повременного моделирования неперекрывающихся заявок;
- способ последовательной проводки перекрывающихся заявок без приоритета;
- способ последовательной проводки перекрывающихся заявок с приоритетом.

Первый способ предполагает пошаговое продвижение модельного времени, второй и третий – событийный.

5.1 Поток неперекрывающихся заявок

Процесс функционирования системы можно рассматривать как последовательную смену ее состояний. Пусть, например, в одноканальной системе массового обслуживания происходит процесс обслуживания поступающих заявок (рис. 5.1).

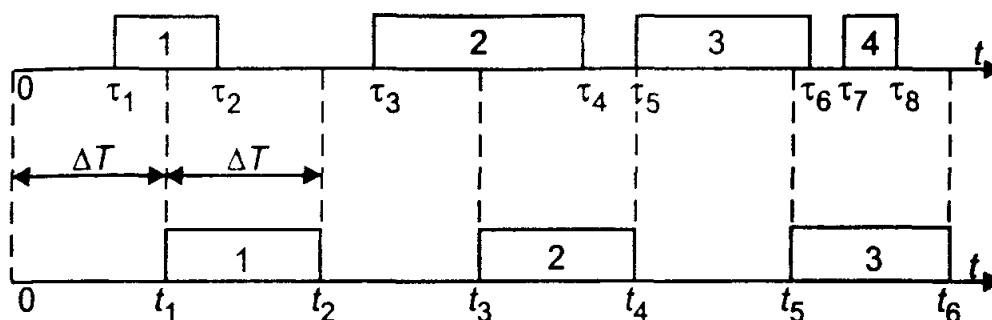


Рис. 5.1 – Моделирование способом ΔT

Введем следующие обозначения:

- τ_1 – момент начала обслуживания 1-й заявки;
- τ_2 – момент окончания обслуживания 1-й заявки;
- τ_3 – момент начала обслуживания 2-й заявки;
- τ_4 – момент окончания обслуживания 2-й заявки;
- τ_5 – момент начала обслуживания 3-й заявки;
- τ_6 – момент окончания обслуживания 3-й заявки;
- τ_7 – момент начала обслуживания 4-й заявки;
- τ_8 – момент окончания обслуживания 4-й заявки.

Выберем шаг ΔT и будем анализировать состояние системы через промежутки времени $t_1, t_2, t_3, \dots$, отстоящие друг от друга на ΔT . Этот способ иногда называют способом ΔT .

В момент t_1 будет обнаружено, что в системе началось обслуживание 1-й заявки. В момент $t_2 = t_1 + \Delta T$ будет установлено, что обслуживание 1-й заявки завершено. В момент $t_3 = t_2 + \Delta T$ будет обнаружено, что в системе началось обслуживание 2-й заявки. В момент $t_4 = t_3 + \Delta T$ будет установлено, что обслуживание 2-й заявки завершено. В момент $t_5 = t_4 + \Delta T$ будет обнаружено, что в системе началось обслуживание 3-й заявки. В момент $t_6 = t_5 + \Delta T$ будет установлено, что обслуживание 3-й заявки завершено. Факт поступления 4-й заявки и факт окончания ее обслуживания не будут обнаружены.

Для предотвращения потерь информации и повышения точности работы модели нужно уменьшить шаг ΔT . При малом ΔT можно достаточно точно описать процесс функционирования системы.

5.2 Поток перекрывающихся заявок

При моделировании процессов обслуживания заявок в системах массового обслуживания иногда удобно строить моделирующий алгоритм по способу *последовательной проводки заявок*. Этот способ может быть осуществлен, если события, происходящие в системе, не зависят друг от друга.

Моделирующий алгоритм последовательно воспроизводит истории отдельных заявок в порядке их поступления в систему. Алгоритм обращается к сведениям о других заявках лишь в том случае, если это необходимо для решения вопроса о дальнейшем порядке обслуживания данной заявки.

Существуют две разновидности способа последовательной проводки:

- проводка заявок без приоритета;
- проводка заявок с приоритетом.

5.2.1 Проводка заявок без приоритета

Рассмотрим вначале первый вариант. Пусть, например, в одноканальную систему массового обслуживания в одной случайной реализации процесса поступили четыре однородные заявки (с одинаковым приоритетом), как показано на рисунке 5.2.

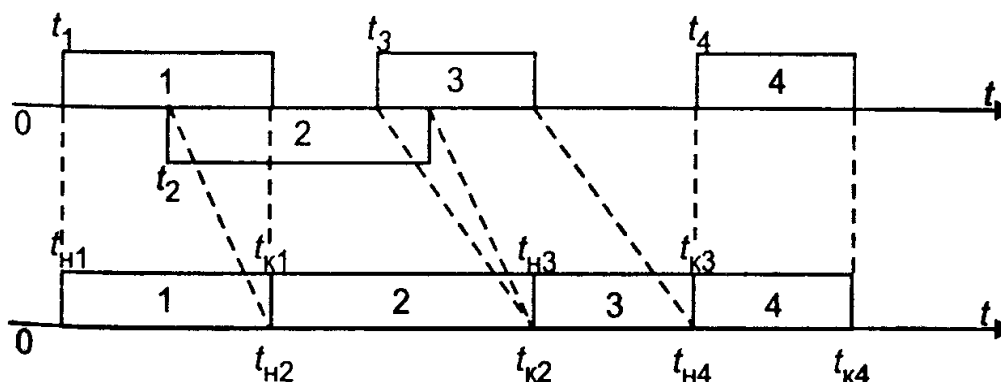


Рис. 5.2 – Последовательная проводка заявок

В случайный момент времени t_1 в систему поступила 1-я заявка. Поскольку канал свободен, ее обслуживание начинается в момент времени $t_{н1} = t_1$. Если распределение времени обслуживания известно, то с помощью датчика случайных чисел (ДСЧ) можно определить случайную величину времени обслуживания τ_1 . Тогда момент окончания обслуживания 1-й заявки будет равен: $t_{к1} = t_{н1} + \tau_1$. При этом к счетчику числа обслуженных заявок прибавляется единица.

Далее определяется время поступления 2-й заявки. Если распределение случайной величины времени между соседними заявками известно, то с помощью ДСЧ можно определить интервал между 1-й и 2-й заявками и найти момент времени поступления 2-й заявки t_2 . Поскольку канал занят, для 2-й заявки начинается период ожидания продолжительностью $\Delta T_{ож} = t_{к1} - t_{н1}$. Обслуживание этой заявки начинается в момент $t_{н2} = t_{к1}$. Далее с помощью ДСЧ определяется случайная величина времени обслуживания 2-й заявки τ_2 . Тогда момент окончания обслуживания 2-й заявки будет равен: $t_{к2} = t_{н2} + \tau_2$. К счетчику числа обслуженных заявок прибавляется единица.

Аналогичным образом обслуживаются 3-я и 4-я заявки.

5.2.2 Проводка заявок с приоритетом

Рассмотрим систему, предназначенную для обслуживания заявок двух различных приоритетов. Сделаем следующие допущения:

- все заявки независимы;
- при обслуживании используется абсолютный приоритет, т. е. поступающая заявка высшего приоритета немедленно вытесняет обслуживаемую заявку низшего приоритета;
- после освобождения канала может производиться «дообслуживание» той заявки второго приоритета, которая была вытеснена заявкой первого приоритета.

При этих допущениях для построения моделирующего алгоритма может быть применен усовершенствованный способ последовательной проводки, который можно назвать *способом поэтапной последовательной проводки*.

Рассмотрим пример использования этого способа. Пусть в канал системы обслуживания поступают два потока заявок: первого (высшего) приоритета и второго (низшего) приоритета.

Первый этап моделирования

Распределение случайных величин интервалов между соседними заявками первого приоритета будем считать известным (например, показательным). Если задать интенсивность потока, то с помощью датчика случайных чисел можно определить случайные моменты поступления заявок $T_{1.1}, T_{1.2}, T_{1.3}$ и т. д. Распределение случайного времени обслуживания будем также считать известным (например, показательным). Если задать среднее время обслуживания, то с помощью датчика случайных чисел можно заранее определить случайные интервалы обслуживания (рис. 5.3).



Рис. 5.3 – Поэтапная последовательная проводка заявок с приоритетом

Установим модельное время на нуль. Будем рассматривать изолированный поток заявок первого приоритета так, как будто заявок второго приоритета не существует.

Применив способ последовательной проводки, можно установить моменты начала и окончания обслуживания заявок первого приоритета. Иначе говоря, в результате выполнения первого этапа моделирования можно определить значения элементов массива $\{T_{н1,1}, T_{н1,2}, T_{н1,3}, \dots\}$ и элементов массива $\{T_{к1,1}, T_{к1,2}, T_{к1,3}, \dots\}$.

Можно также подсчитать число обслуженных заявок до конца периода обслуживания $T_{кон}$.

В данном случае заявки 1.1 и 1.3 обслуживаются сразу после их поступления, а заявка 1.2 обслуживается после некоторого ожидания, связанного с занятостью канала.

Второй этап моделирования

Вновь установим модельное время на нуль. Начинается этап моделирования процесса обслуживания заявок второго приоритета при условии, что на временной оси располагаются уже обслуженные заявки первого приоритета. Следовательно, заявки второго приоритета могут занимать только свободные промежутки времени.

Распределение времени между соседними заявками будем считать известным. Тогда с помощью жребия можно определить возможные значения случайных величин времени поступления заявок. Распределение времени обслуживания также будем считать известным. Тогда с помощью жребия можно определить планируемые интервалы времени обслуживания.

Заявка 2.1 поступает в момент, когда канал занят обслуживанием заявки 1.2. Затем канал освобождается и начинается обслуживание заявки 2.1. Однако поступившая заявка первого приоритета 1.3 вытесняет заявку 2.1.

Только после освобождения канала происходит процесс «дообслуживания» заявки 2.1.

Заявка 2.2 также некоторое время ожидает начала обслуживания, а затем обслуживается до конца. Для заявки 2.3 не хватает времени, так как наступает конец периода обслуживания.

Рассмотрим теперь, как формализуется процесс обслуживания заявок второго приоритета в присутствии заявок первого приоритета. При взаимодействии заявок двух различных приоритетов могут возникнуть три ситуации.



Рис. 5.4 – Схемы вариантов 1-й ситуации:

а – первый вариант; *б* – второй вариант

Ситуация 1. Ни одна из имеющихся N_{z1} заявок первого приоритета не препятствует обслуживанию заявки второго приоритета. Два возможных варианта этой ситуации иллюстрируются схемой, показанной на рисунке 5.4.

Здесь $T_{н/}(1)$ – фактическое время начала обслуживания i -й заявки первого приоритета;

$T_{к/}(1)$ – фактическое время окончания обслуживания i -й заявки первого приоритета;

$T_{hj}(2)$ – первоначально намеченное время начала обслуживания j -й заявки второго приоритета (без учета возможности поступления заявки первого приоритета);

$T_{kj}(2)$ – первоначально намеченное время окончания процесса обслуживания j -й заявки второго приоритета (без учета возможности поступления заявки первого приоритета).

Логическое условие, при котором создается 1-й или 2-й вариант 1-й ситуации, записывается так:

$$\{T_{kj}(2) \leq T_{hi}(1)\} \text{ OR } \{T_{ki}(1) \leq T_{hj}(2)\}. \quad (5.1)$$

Если для j -й заявки второго приоритета условие (5.1) выполняется по отношению ко всем заявкам первого приоритета ($i = 1, \dots, N_{z1}$), то j -я заявка может быть обслужена. Ей может помешать только другая заявка 2-го приоритета, принятая ранее к обслуживанию.

Ситуация 2. Система приняла к обслуживанию заявку второго приоритета, и она начала обслуживаться. Однако до истечения расчетного времени окончания обслуживания поступила заявка первого приоритета, которая вытесняет данную заявку второго приоритета. Два возможных варианта этой ситуации иллюстрируются схемой, приведенной на рисунке 5.5.

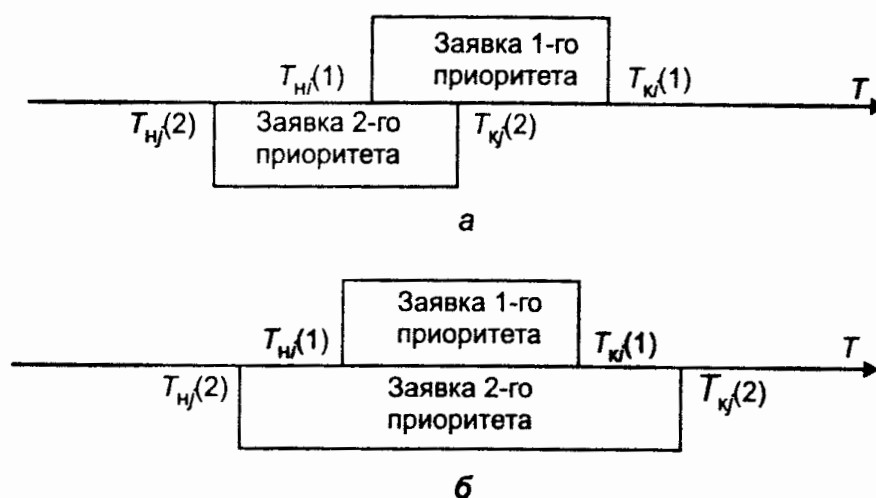


Рис. 5.5 – Схемы вариантов 2-й ситуации:

a – первый вариант; $б$ – второй вариант

Логическое условие, при котором создается любой из вариантов 2-й ситуации, записывается так:

$$\{T_{Hj}(2) < T_{Hi}(1)\} \text{ AND } \{T_{Hi}(1) < T_{Kj}(2)\}. \quad (5.2)$$

Если условие (5.2) выполняется хотя бы для какой-либо пары значений переменных $T_{Hj}(2)$ и $T_{Ki}(1)$ при изменении i от 1 до N_{z1} , то продолжение процесса обслуживания заявки второго приоритета откладывается до момента освобождения канала.

После этого рассматривается возможность «дообслуживания» заявки. С этой целью производится корректировка времени начала и окончания обслуживания заявки по формулам:

$$T_{Hj}(2) = T_{K \text{ fix}};$$

$$T_{Kj}(2) = T_{K \text{ fix}} + [T_{Kj}(2) - T_{H \text{ fix}}],$$

где $T_{H \text{ fix}}$ – фиксированное время начала обслуживания заявки первого приоритета, для которой выполняется условие (5.2); $T_{K \text{ fix}}$ – фиксированное время окончания обслуживания заявки первого приоритета, для которой выполняется условие (5.2).

После этого вновь рассматривается возникшая ситуация.

Ситуация 3. Заявка второго приоритета поступила в период обслуживания заявки первого приоритета. Следовательно, заявка второго приоритета не может быть принята к обслуживанию. Два возможных варианта этой ситуации иллюстрируются схемой, приведенной на рисунке 5.6.

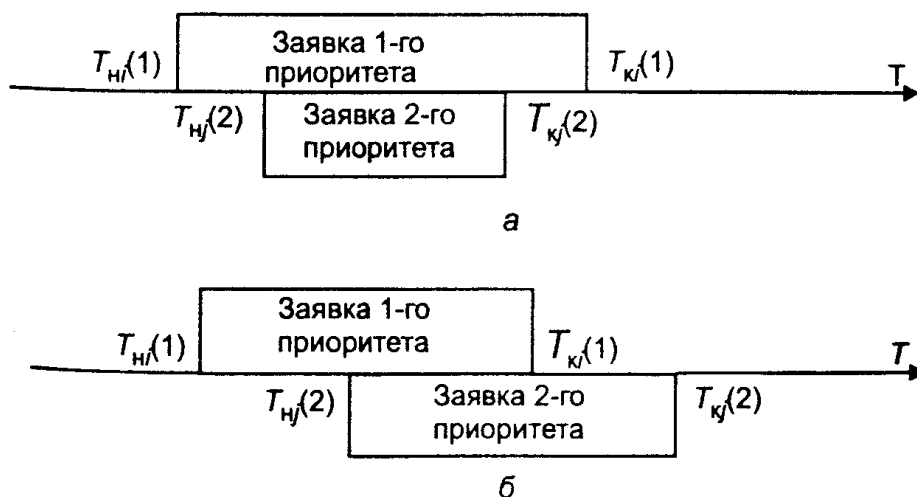


Рис. 5.6 – Схемы вариантов 3-й ситуации:

а – первый вариант; *б* – второй вариант

Логическое условие, при котором создается любой из вариантов 3-й ситуации, записывается так:

$$\{T_{Hi}(1) < T_{Hj}(2)\} \text{ AND } \{T_{Hj}(2) < T_{Ki}(1)\}. \quad (5.3)$$

Если условие (5.3) выполняется для какой-либо пары значений переменных $T_{Hj}(2)$ и $T_{Ki}(1)$ при изменении i от 1 до N_{z1} , то производится «сдвиг» времени начала и окончания обслуживания заявки по формулам:

$$T_{Hj}(2) = T_{\text{к fix}};$$

$$T_{Kj}(2) = T_{\text{к fix}} + [T_{Kj}(2) - T_{Hj}(2)].$$

После этого вновь рассматривается возникшая ситуация для «сдвинутой» заявки.

«Дообслуживаемая», или «сдвинутая», заявка, в свою очередь, может оказаться в одной из трех перечисленных выше возможных ситуаций.

В конечном счете процесс обслуживания может иметь два исхода:

- 1) заявка будет обслужена до конца;
- 2) истечет время функционирования системы, и заявка останется необслуженной (так же, как и все последующие заявки второго приоритета).

Примеры программ формирования и обработки заявок, созданных в пакете Mathcad, приведены на рисунках 5.7–5.12.

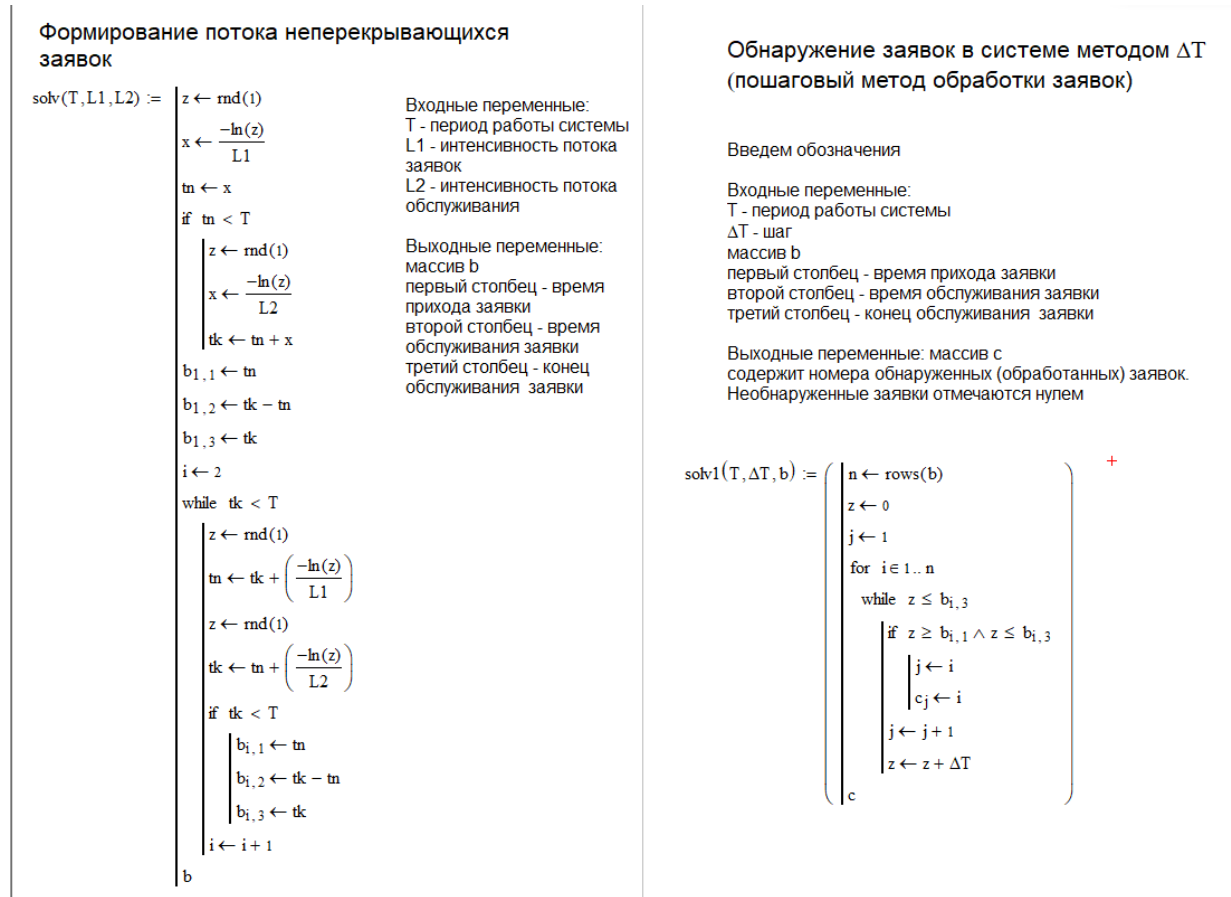


Рис. 5.7 – Программа пошагового метода обработки неперекрывающихся заявок

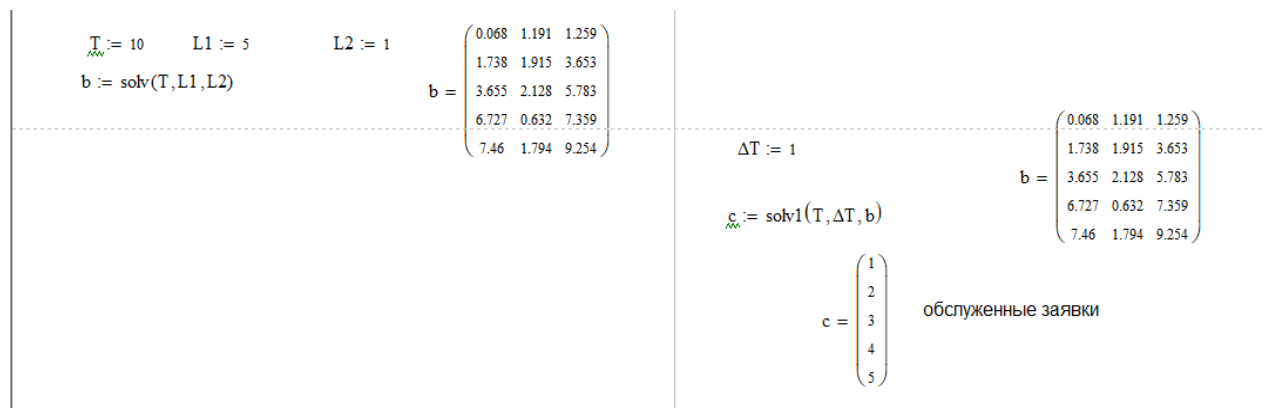


Рис. 5.8 – Результаты работы программы пошагового метода обработки неперекрывающихся заявок

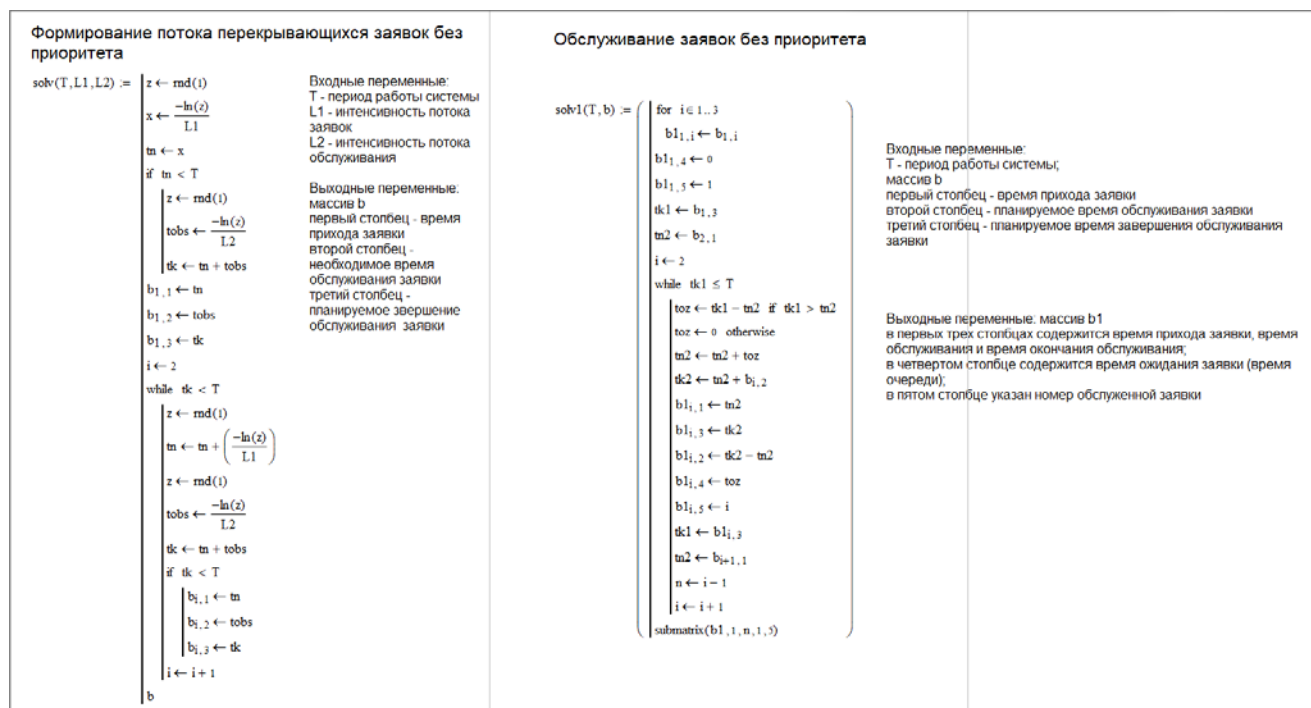


Рис. 5.9 – Программа формирования и обслуживания потока перекрывающихся заявок без приоритета

$T := 10$ $L1 := 2$
 $L2 := 1$

$b := \text{solv}(T, L1, L2)$

массив сформированных заявок

	1	2	3
1	0.122	0.654	0.776
2	0.188	0.045	0.233
3	0.497	0.772	1.269
4	0.571	0.249	0.82
5	0.573	0.492	1.065
6	1.234	0.174	1.409
7	1.724	0.39	2.114
8	4.089	1.288	5.377
9	4.355	0.177	4.532
10	4.717	0.296	5.013
11	5.107	0.295	5.402
12	5.363	0.308	5.671
13	5.642	1.887	7.529
14	6.07	0.659	6.73
15	6.213	1.778	7.991
16	6.568	0.357	6.925
17	7.524	1.955	9.479
18	7.708	0.852	8.56
19	7.725	1.876	9.601
20	7.823	1.654	9.477
21	7.924	1.861	9.785
22	8.08	1.274	9.354
23	8.271	0.326	8.597
24	9.319	0.181	9.5

$b =$

$b1 := \text{solv1}(T, b)$

массив обслуженных заявок

	1	2	3	4	5
1	0.122	0.654	0.776	0	1
2	0.776	0.045	0.821	0.588	2
3	0.821	0.772	1.593	0.324	3
4	1.593	0.249	1.842	1.022	4
5	1.842	0.492	2.334	1.27	5
6	2.334	0.174	2.508	1.1	6
7	2.508	0.39	2.898	0.785	7
8	4.089	1.288	5.377	0	8
9	5.377	0.177	5.554	1.022	9
10	5.554	0.296	5.85	0.838	10
11	5.85	0.295	6.145	0.743	11
12	6.145	0.308	6.453	0.782	12
13	6.453	1.887	8.34	0.811	13
14	8.34	0.659	9	2.27	14

$b1 =$

Рис. 5.10 – Результаты работы программы формирования и обслуживания потока перекрывающихся заявок без приоритета

Формирование портфеля заявок с приоритетом	
<pre> zayavka(b1, b2) := n1 ← rows(b1) n2 ← rows(b2) n ← n1 + n2 k ← 1 i ← 1 ik ← 1 jk ← 1 for j ∈ 1..n if b1_{i,1} ≤ b2_{k,1} ∧ ik ≤ n1 for i1 ∈ 1..3 f_{j,i1} ← b1_{i,i1} f_{j,4} ← i f_{j,5} ← 1 i ← i + 1 if i < n1 ik ← ik + 1 if jk ≤ n2 otherwise for i2 ∈ 1..3 f_{j,i2} ← b2_{k,i2} f_{j,4} ← k f_{j,5} ← 2 k ← k + 1 if k < n2 jk ← jk + 1 if i ≤ n1 for j ∈ i + k..n if (n1 > n2) ∧ (b2_{n2,1} < b1_{i,1}) for i1 ∈ 1..3 f_{j,i1} ← b1_{j-k,i1} f_{j,4} ← j - k f_{j,5} ← 1 for j ∈ i + k..n if (n2 ≥ n1) ∧ (b1_{n1,1} < b2_{k,1}) if k ≤ n2 otherwise for i1 ∈ 1..3 f_{j,i1} ← b2_{j-i,i1} f_{j,4} ← j - i f_{j,5} ← 2 f </pre>	Входные переменные: массив b1 - заявки первого приоритета; массив b2 - заявки второго приоритета; первый столбец - время прихода заявки второй столбец - время обслуживания заявки третий столбец - конец обслуживания заявки Выходные переменные: массив f первый столбец - время прихода заявки второй столбец - время обслуживания заявки третий столбец - конец обслуживания заявки четвертый столбец - номер заявки в исходном массиве пятый столбец - номер приоритета

Рис. 5.11 – Программа обслуживания заявок с приоритетом

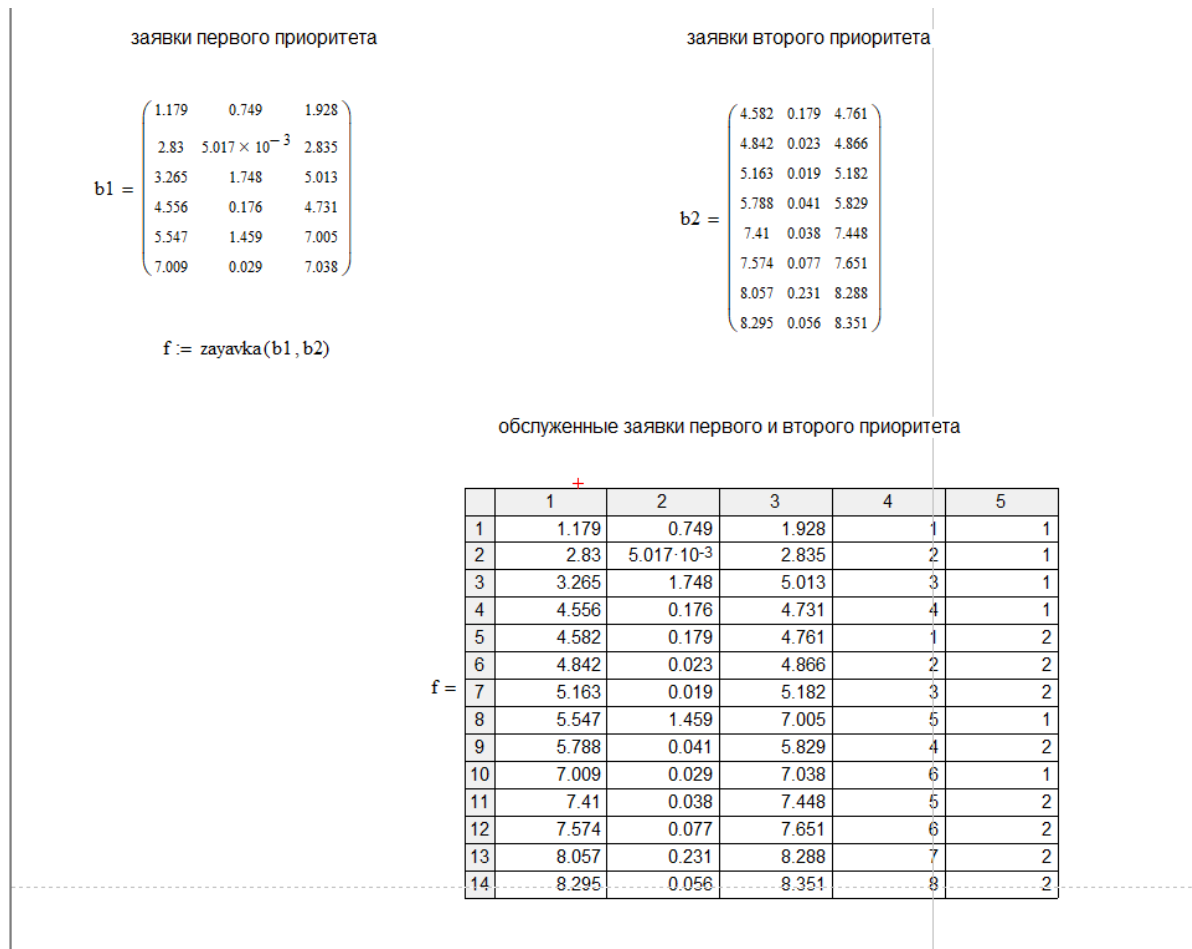


Рис. 5.12 – Результаты работы программы обслуживания заявок с приоритетом

5.3 Задания к лабораторной работе № 5

Задание 1. Написать программы в пакете Mathcad или Excel либо на каком-нибудь языке высокого уровня для моделирования поступления и обслуживания: а) неперекрывающихся заявок в одноканальной системе; б) перекрывающихся заявок одинакового приоритета; в) перекрывающихся заявок с разным приоритетом.

Задание 2. Провести моделирование обслуживания неперекрывающихся заявок в одноканальной системе. Время поступления заявок и время обслуживания распределены по экспоненциальному закону. Рассмотреть ситуации с различными значениями параметра интенсивности потока λ .

Выполнить анализ системы для различных значений ΔT и определить минимальный шаг, при котором не будет пропущена ни одна заявка.

Задание 3. Рассмотреть метод последовательной проводки перекрывающихся заявок одинакового приоритета. Время поступления заявок и время обслуживания распределены по экспоненциальному закону. Рассмотреть ситуации с различными значениями параметра интенсивности потока λ поступления и обслуживания заявок. Определить среднее время ожидания обслуживания заявок.

Задание 4. Рассмотреть метод последовательной проводки перекрывающихся заявок с разным приоритетом. Распределение случайных величин интервалов между соседними заявками первого приоритета считать показательным. Распределение случайного времени обслуживания также считать показательным. Рассмотреть ситуации с различными значениями параметра интенсивности потока λ поступления и обслуживания заявок первого и второго приоритета. Определить среднее время ожидания обслуживания заявок.

6 ТРЕБОВАНИЯ К ОФОРМЛЕНИЮ ОТЧЕТА ПО ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ

Отчеты по лабораторным работам оформляются в соответствии с требованиями ОС ТУСУР (<https://regulations.tusur.ru/documents/70>).

Структура отчета:

- 1) краткие теоретические сведения;
- 2) задание;
- 3) результаты работы в виде скриншотов с комментариями;
- 4) выводы;
- 5) приложение в виде листинга программы (к лабораторным работам № 4 и 5).

В приложениях А–В приведены примеры отчетов по лабораторным работам.

ЛИТЕРАТУРА

1. Математическое и имитационное моделирование экономических процессов : учеб. пособие / сост. А. А. Мицель. – Томск : ФДО, ТУСУР, 2021. – 255 с.
2. Сборник задач по математическому и имитационному моделированию экономических процессов : учеб. пособие для вузов. – М. : Горячая линия – Телеком, 2019. – 252 с.
3. Мицель, А. А. Имитационное моделирование экономических процессов : учеб. пособие : в 2 ч. / А. А. Мицель, Е. Б. Грибанова. – Томск : Изд-во ТМЦ ДО, 2005.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Пример отчета по лабораторной работе № 3

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ (ТУСУР)

Факультет дистанционного образования (ФДО)

Кафедра автоматизированных систем управления (АСУ)

Моделирование финансовых операций

Отчет по лабораторной работе № 3 по дисциплине
«Математическое и имитационное моделирование
экономических процессов»

Вариант XX

Выполнил: ст. гр. _____

_____ И. О. Фамилия
«_____» _____ 2021 г.

Проверил: доцент каф. АСУ

_____ Е. Б. Грибанова
«_____» _____ 2021 г.

Оглавление

1 Основные определения и формулы	116
2 Задание к лабораторной работе № 3.....	122
3 Результаты работы	123
4 Вывод.....	126

1 Основные определения и формулы

Потоком платежей называют последовательность выплат и поступлений, приуроченных к разным моментам времени.

Поток платежей, все элементы которого – положительные величины, а временные интервалы между двумя последовательными платежами постоянны, называют **финансовой рентой** или **аннуитетом**.

Финансовая рента описывается следующими параметрами:

1. Член ренты – величина каждого отдельного платежа.
2. Период ренты – временной интервал между платежами.
3. Срок ренты – время от начала ренты до конца ее последнего периода.
4. Процентная ставка – это ставка, которая используется при наращении или дисконтировании платежей, из которых состоит рента.

Кроме того, могут быть дополнительные параметры: количество платежей в год, количество начислений процентов в год, моменты выплаты платежей (в начале или в конце периода ренты) и т. д.

Виды финансовых рент

Рента называется **годовой**, если ее период равен одному году.

Рента называется p -срочной, если ее период меньше года и количество платежей в год равно p .

Ренты бывают **постоянные** и **переменные**.

Рента называется **постоянной**, если все ее платежи одинаковы и не меняются во времени. Если размеры платежей зависят от времени, то это **переменная рента**.

Рента называется **ограниченной**, если количество платежей конечно, в противном случае рента называется **бесконечной** или **вечной**. Например, долгосрочное обязательство, когда срок финансовой операции продолжителен и заранее не оговаривается, представляет собой вечную ренту.

Если платежи осуществляются в конце периода, то такая рента называется **обычной** или **постнумерандо**. Если выплаты осуществляются в начале периода, то такая рента называется **пренумерандо**.

Характеристики потоков платежей

Наращенной суммой потока платежей называют сумму всех последовательных платежей с начисленными на них процентами к концу срока ренты.

Наращенная сумма общей ренты постнумерандо рассчитывается по формуле:

$$S = \left(\frac{R}{p} \right) \sum_{k=0}^{n \cdot p - 1} \left(1 + j / m \right)^{\frac{m}{p} k} = \left(\frac{R}{p} \right) \frac{\left(1 + \frac{j}{m} \right)^{mn} - 1}{\left[\left(1 + \frac{j}{m} \right)^{\frac{m}{p}} - 1 \right]},$$

где S – наращенная сумма ренты;

j – ставка процентов;

p – количество платежей в год;

m – количество начислений процентов в год;

R – годовая сумма платежей (R / p – размер отдельного платежа);

n – срок ренты в годах.

Величина

$$s_{n, j/m}^{(p)} = \sum_{k=0}^{n \cdot p - 1} \left(1 + j / m \right)^{(m/p) \cdot k} = \frac{\left(1 + \frac{j}{m} \right)^{mn} - 1}{\left[\left(1 + j / m \right)^{(m/p)} - 1 \right]}$$

называется коэффициентом наращивания общей ренты постнумерандо.

Наращенная сумма общей ренты пренумерандо рассчитывается по формуле:

$$S = \left(\frac{R}{p} \right) \sum_{k=1}^{n \cdot p} \left(1 + j / m \right)^{\frac{m}{p} k} = \left(\frac{R}{p} \right) \left(1 + \frac{j}{m} \right)^{\frac{m}{p}} \frac{\left(1 + \frac{j}{m} \right)^{mn} - 1}{\left[\left(1 + \frac{j}{m} \right)^{\frac{m}{p}} - 1 \right]}.$$

Коэффициент ренты пренумерандо равен

$$\hat{s}_{n, j/m}^{(p)} = \sum_{k=1}^{n \cdot p} \left(1 + j / m \right)^{\frac{m}{p} k} = \left(1 + \frac{j}{m} \right)^{\frac{m}{p}} \frac{\left(1 + \frac{j}{m} \right)^{mn} - 1}{\left[\left(1 + \frac{j}{m} \right)^{\frac{m}{p}} - 1 \right]} = \left(1 + \frac{j}{m} \right)^{\frac{m}{p}} \cdot s_{n, j/m}^{(p)}.$$

При начислении процентов по простой ставке наращенная сумма общей ренты рассчитывается по формулам:

$S = \left(\frac{R}{p}\right) \sum_{k=0}^{n \cdot p - 1} (1 + (j/m) \cdot k) = \left(\frac{R}{p}\right) \left[n \cdot p + \frac{j}{m} \frac{n \cdot p \cdot (n \cdot p - 1)}{2} \right]$ – для ренты постнумерандо;

$S = \left(\frac{R}{p}\right) \sum_{k=1}^{n \cdot p} (1 + (j/m) \cdot k) = \left(\frac{R}{p}\right) \left[n \cdot p + \frac{j}{m} \frac{n \cdot p \cdot (n \cdot p + 1)}{2} \right]$ – для ренты пренумерандо.

Для этого случая коэффициенты наращенной ренты равны:

$$s_{n, j/m}^{(p)} = n \cdot p + \frac{j}{m} \frac{n \cdot p \cdot (n \cdot p - 1)}{2} \text{ – для ренты постнумерандо,}$$

$$s_{n, j/m}^{(p)} = n \cdot p + \frac{j}{m} \frac{n \cdot p \cdot (n \cdot p + 1)}{2} \text{ – для ренты пренумерандо.}$$

В случае переменной ренты расчеты наращенной суммы ренты выполняются по формулам:

$$S = \sum_{k=0}^{n-1} R_k (1 + j)^{t_k} \text{ – для ренты постнумерандо;}$$

$$S = \sum_{k=1}^n R_k (1 + j)^{t_k} \text{ – для ренты пренумерандо.}$$

Здесь t_k , $k = 1, \dots, n$ – моменты времени поступления платежей.

Современной величиной потока платежей называют сумму всех платежей, дисконтированных на некоторый момент времени, совпадающий с началом потока платежей или упреждающий его.

Современная величина общей ренты постнумерандо рассчитывается по формуле:

$$A = \left(\frac{R}{p}\right) \sum_{k=1}^{n \cdot p} \frac{1}{(1 + j/m)^{(m/p) \cdot k}} = \left(\frac{R}{p}\right) \frac{1 - (1 + j/m)^{-mn}}{(1 + j/m)^{(m/p)} - 1}.$$

Величина

$$a_{n, j/m}^{(p)} = \sum_{k=1}^{n \cdot p} \frac{1}{(1 + j/m)^{(m/p) \cdot k}} = \frac{1 - (1 + j/m)^{-mn}}{[(1 + j/m)^{(m/p)} - 1]}$$

называется коэффициентом приведения общей ренты постнумерандо.

Современная величина общей ренты пренумерандо:

$$A = \left(\frac{R}{p}\right) \sum_{k=0}^{n \cdot p - 1} \frac{1}{(1 + j/m)^{(m/p) \cdot k}} = \left(\frac{R}{p}\right) (1 + j/m)^{(m/p)} \frac{1 - (1 + j/m)^{-mn}}{(1 + j/m)^{(m/p)} - 1}.$$

Коэффициент приведения пренумерандо:

$$\hat{a}_{n,j/m}^{(p)} = \sum_{k=0}^{n \cdot p - 1} \frac{1}{(1 + j/m)^{(m/p) \cdot k}} = (1 + j/m)^{m/p} \frac{1 - (1 + j/m)^{-mn}}{[(1 + j/m)^{m/p} - 1]}.$$

Современная величина переменной ренты рассчитывается по формулам:

$$A = \sum_{k=1}^n \frac{R_k}{(1 + j)^{t_k}} \text{ — для ренты постнумерандо;}$$

$$A = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{R_k}{(1 + j)^{t_k}} \text{ — для ренты пренумерандо.}$$

При начислении процентов по простой ставке имеем

$$A = R \sum_{k=1}^n \frac{1}{(1 + j \cdot k)} \text{ — для ренты постнумерандо;}$$

$$A = R \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(1 + j \cdot k)} \text{ — для ренты пренумерандо.}$$

Финансовой операцией называется операция, начало и конец которой имеют денежную оценку — $P(0)$ и $S(T)$ соответственно, а цель проведения которой заключается в максимизации разности $S(T) - P(0)$ или другого подобного показателя.

Абсолютная доходность d (доходность за весь срок) операции определяется из уравнения $P(0)(1 + d) = S(T)$ или $d = (S(T) - P(0)) / P(0) = S(T) / P(0) - 1$.

Среднегодовая доходность r финансовой операции (доходность за один год) — это ставка простых или сложных процентов, с помощью которой измеряют эффективность финансовой операции. Она определяется из уравнений:

$$P(0)(1 + r \cdot T) = S(T)$$

или

$$P(0)(1 + r)^T = S(T).$$

Из этих формул найдем связь между d и r : $1 + r \cdot T = 1 + d$ (для простой ставки) и $(1 + r)^T = 1 + d$ (для сложной ставки). Здесь T — срок операции в годах.

Доходность операции с учетом налога и комиссии вычисляется по формуле:

$$r = \left(\frac{(1 + i)^n (1 - g) + g}{1 - c} \right)^{\frac{1}{n}} - 1,$$

где i — банковская ставка; g — ставка налога; c — ставка комиссии; n — срок операции.

Инфляция – обесценение денег, проявляющееся в росте цен на товары и услуги, что влечет за собой снижение покупательной способности денег.

Индекс цен за время $[0, t]$ показывает, во сколько раз выросла стоимость потребительской корзины за период времени $[0, t]$.

Темп инфляции за время $[0, t]$ показывает, на сколько процентов выросла стоимость потребительской корзины за период времени $[0, t]$.

Доходность операции с учетом инфляции

$$r = \frac{1 + i}{\prod_{k=1}^m (1 + h_k)^{n_k}} - 1,$$

где i – банковская ставка; h_k – темп инфляции на промежутке времени n_k .

Доходность потока платежей – это ставка r_p , при которой сумма дисконтированных платежей равна современной стоимости потока платежей A . Доходность потока платежей определяется из уравнения

$$A = \sum_{k=1}^n \frac{R_k}{(1 + r_p)^k}.$$

Ставка доходности в ссудных операциях называется **эффективная процентная ставка**, в анализе доходности облигаций – **доходность на момент погашения**, в анализе производственных инвестиций аналогичный показатель называется **внутренней нормой доходности** (внутренняя норма процента).

Срочной уплатой Y называется разовую сумму по обслуживанию долга. Она состоит из текущих процентных платежей I и средств, предназначенных для погашения (амортизации) основного долга R , т. е. $Y = R + I$.

Балансовое уравнение в кредитных операциях имеет вид:

$$D = R \frac{1 - (1 + j/m)^{-mn}}{(1 + j/m)^{(m/p)} - 1} = R \cdot a_{n, j/m}^{(p)},$$

где D – сумма кредита; j – ставка кредита (годовая); p – количество платежей в год; m – количество начислений процентов в год (обычно $m = p$); R – размер погасительного платежа по кредиту; n – срок кредита в годах. Здесь срочная уплата равна R .

При выдаче ссуды банк берет комиссию за оказанные услуги, при этом доходность операции повышается (она становится больше банковской ставки, под которую

выдана ссуда). Если комиссия одноразовая (берется при выдаче ссуды), то доходность финансовой операции j_e для банка определяется из уравнения

$$D(1 - g) = R \cdot a_{n, j_e/m}^{(p)},$$

где $R = D / a_{n, j/m}^{(p)}$; g – ставка комиссионных.

Комиссия может браться постоянно. Тогда срочная уплата равна $Y = R + g \cdot D$ и доходность операции j_e для банка определяется из уравнения

$$D = Y \cdot a_{n, j_e/m}^{(p)}.$$

2 Задание к лабораторной работе № 3

1. Изучить теорию.
2. Выполнить расчеты задач по трем разделам: «Потоки платежей» (6 задач), «Доходность финансовой операции» (5 задач) и «Кредитные расчеты» (5 задач) с помощью встроенных функций Mathcad или Excel.
3. Ответы записать в виде скриншотов с комментариями.

3 Результаты работы

Потоки платежей

1. Вычислить размер платежа n -годовой ссуды покупки квартиры за A рублей с годовой ставкой i процентов и начальным взносом p процентов. Сделать расчет для ежемесячных и ежегодных выплат. Расчет провести для следующих данных: $n = 30$ лет; $A = 600\,000$ руб.; $i = 19\%$; $p = 30\%$. Расчеты провести для простой и сложной процентной ставки.

$$n := 30 \quad A := 600000 \quad i := 19\% \quad p := 30\% \quad s := A \cdot p \quad m := 12 \quad q := 12$$

$$s = 1.8 \times 10^5 \quad A1 := A - s \quad A1 = 4.2 \times 10^5$$

по сложной

$$a := \frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i}$$

$$a = (5.235)$$

$$R := \frac{A1}{a}$$

$$R = (8.023 \times 10^4)$$

для ежемесячных

$$q := 12$$

$$r := \frac{1 - \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{-n \cdot m}}{\left[1 + \frac{\frac{i}{m}}{m}\right]}$$

$$S := \frac{A1}{r}$$

$$S = 6.673 \times 10^3$$

по простой

$$a1 := \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{1 + i \cdot k} \right)$$

$$a1 = 9.601$$

$$R1 := \frac{A1}{a1} \quad R1 = 4.374 \times 10^4$$

$$a1 := \sum_{k=1}^{n \cdot q} \frac{1}{\left(1 + \frac{i}{q} \cdot k\right)}$$

$$R1 := \frac{A1}{a1}$$

$$R1 = 3.509 \times 10^3$$

Рисунок 1 – Решение задачи 1

Доходность финансовой операции

7. Значения капитала в моменты времени 0; 1; 2; 4 есть $K_0 = 150$, $K_1 = 300$, $K_2 = 450$, $K_4 = 500$. Найти абсолютную и среднегодовую доходность на отдельных промежутках.

Для сложной ставки

$$\begin{aligned} &\text{Given} \\ &r1 := 0.1 \\ &K0 \cdot (1 + r1)^{t1} - K1 = 0 \quad \text{за 1 период} \\ &\text{Find}(r1) = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\text{Given} \\ &r2 := 0.1 \\ &K0 \cdot (1 + r2)^{t2} - K2 = 0 \quad \text{за 2 период} \\ &\text{Find}(r2) = 0.732 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\text{Given} \\ &r4 := 0.1 \\ &K0 \cdot (1 + r4)^{t4} - K4 = 0 \quad \text{за 3 период} \\ &\text{Find}(r4) = 2.333 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\text{Given} \\ &r4 := 0.1 \\ &K1 \cdot (1 + r4)^{t4} - K2 = 0 \quad \text{за 4 период} \\ &\text{Find}(r4) = 0.5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\text{Given} \\ &r5 := 0.1 \\ &K1 \cdot (1 + r5)^{t5} - K4 = 0 \quad \text{за 5 период} \\ &\text{Find}(r5) = 0.186 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\text{Given} \\ &r6 := 0.1 \\ &K2 \cdot (1 + r6)^{t6} - K4 = 0 \quad \text{за 6 период} \\ &\text{Find}(r6) = 0.054 \end{aligned}$$

Рисунок 7 – Решение задачи 7

Кредитные расчеты

12. Заем был взят под $i_1 = 14\%$ годовых, выплачивать осталось ежеквартально по 640 ден. ед. ($R = 640$ ден. ед.) в течение $n = 3$ лет. Из-за изменения ситуации в стране процентная ставка снизилась до $i_2 = 4\%$ годовых. В банке согласились с необходимостью пересчета ежеквартальных выплат. Каков должен быть новый размер выплаты?

Расчеты провести для простой и сложной процентной ставки.

Задача 1

$$\begin{aligned}
 & \underline{R} := 640 & i1 &:= 0.14 & p &:= 4 & i2 &:= 0.04 & n &:= 3 & \underline{m} &:= 4 \\
 & & & & & & \text{по простой ставке} & & & & & \\
 & a := \frac{1 - \left(1 + \frac{i1}{m}\right)^{-n \cdot m}}{\frac{m}{\left(1 + \frac{i1}{m}\right)^p - 1}} & & ap &:= \sum_{k=1}^{n \cdot p} \frac{1}{1 + \frac{i1}{p} \cdot k} \\
 & a = 9.663 & & ap &= 9.872 \\
 & D := R \cdot a & & Dp &:= R \cdot ap & & Dp &= 6.318 \times 10^3 \\
 & D = 6.185 \times 10^3 & & & & & & \\
 & \underline{a} := \frac{1 - \left(1 + \frac{i2}{m}\right)^{-n \cdot m}}{\frac{m}{\left(1 + \frac{i2}{m}\right)^p - 1}} & & \underline{ap} &:= \sum_{k=1}^{n \cdot p} \frac{1}{1 + \frac{i2}{m} \cdot k} & & ap &= 11.279 \\
 & a = 11.255 & & R1 &:= \frac{Dp}{ap} \\
 & & & & & & R1 &= 560.16 \\
 & \underline{R} := \frac{D}{a} & & & & & & \\
 & R = 549.488 & & & & & &
 \end{aligned}$$

Рисунок 12 – Решение задачи 12

Ответ: новый размер выплат составит 548.281 по сложной ставке и 537.865 – по простой.

4 Вывод

В данной лабораторной работе получен опыт решения задач по финансовой математике.

ПРИЛОЖЕНИЕ Б**Пример отчета по лабораторной работе № 4**

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ (ТУСУР)

Факультет дистанционного образования (ФДО)

Кафедра автоматизированных систем управления (АСУ)

Биржевой игрок

Отчет по лабораторной работе № 4 по дисциплине
«Математическое и имитационное моделирование
экономических процессов»

Вариант XX

Выполнил: ст. гр. ____

_____ И. О. Фамилия
«_____» _____ 2021 г.

Проверил: доцент каф. АСУ

_____ Е. Б. Грибанова
«_____» _____ 2021 г.

Томск – 2021

Оглавление

1 Описание модели.....	129
2 Задание к лабораторной работе № 4.....	131
3 Результаты работы	132
4 Вывод.....	134

1 Описание модели

Биржевой игрок разработал свой порядок приобретения и продажи акций, состоящий в следующем:

1) обладая пакетом акций, необходимо продать его, как только цены на эти акции начинают падать;

2) как только цены на акции начинают возрастать, их необходимо покупать.

Игрок не желает рисковать своими ограниченными средствами в натурном эксперименте и хочет оценить прибыльность своей стратегии с помощью имитационного моделирования. Для упрощения дальнейших рассуждений будем предполагать, что

а) игрок покупает и продает только один вид акций;

б) в рассматриваемый момент времени, принимаемый за начальный, игрок располагает пакетом в 100 акций, стоимостью в 10 ден. ед. каждая, и цена акции может ежедневно изменяться на 1 ден. ед. (если сегодня акция стоит 10 ден. ед., то завтра она будет стоить 9, 10 или 11 ден. ед.);

в) игрок совершает не более одной сделки в день и за каждую сделку платит комиссионные в размере 2% стоимости купленных или проданных акций;

г) игрок не располагает иными средствами, кроме пакета в 100 акций.

Для оценки прибыльности своей стратегии игрок построил модель суточных флуктуаций цен на акции с использованием ретроспективных биржевых данных. Эта модель представлена в виде таблицы 1 и определяет вероятности изменения цен на акции. Согласно этой модели, если в понедельник и во вторник цена одной акции равнялась 10 ден. ед., то в среду (см. табл. 1, вторая строка снизу) она будет стоить 11 ден. ед. с вероятностью $1/4$, 10 ден. ед. с вероятностью $1/2$ и 9 ден. ед. с вероятностью $1/4$.

Таблица 1

Цена одной акции в $(n-1)$ -й день	Цена одной акции в n -й день		
	Возрастает	Остается без изменения	Падает
Возросла по сравнению с $(n-2)$ -м днем	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
Осталась такой же, как и в $(n-2)$ -й день	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
Упала по сравнению с $(n-2)$ -м днем	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$

Если же во вторник цена одной акции равнялась 9 ден. ед., то в среду (см. табл. 1, первая строка снизу) она будет стоить 10 ден. ед. с вероятностью $1/4$, 9 ден. ед. с вероятностью $1/4$ и 8 ден. ед. с вероятностью $1/2$.

Рекомендации по заполнению таблицы 1. Для i -й строки имеется три несовместных события $A_{i,1}$, $A_{i,2}$, $A_{i,3}$ с вероятностями $P_{i,1}$, $P_{i,2}$, $P_{i,3}$ соответственно (причем, $P_{i,1} + P_{i,2} + P_{i,3} = 1$). Делим интервал $[0,1]$ на три части: $[0, P_{i,1}]$, $(P_{i,1}, P_{i,1} + P_{i,2}]$ и $(P_{i,1} + P_{i,2}, 1]$. Если случайное число, генерированное равномерным датчиком случайных чисел, попадает в интервал $[0, P_{i,1}]$, то это означает, что произошло событие $A_{i,1}$; если же случайное число попадает в интервал $(P_{i,1}, P_{i,1} + P_{i,2}]$, то имеем событие $A_{i,2}$, если же случайное число попадает в интервал $(P_{i,1} + P_{i,2}, 1]$, то имеем событие $A_{i,3}$. Используя датчик случайных чисел для каждой строки, мы можем составить таблицу 2.

Таблица 2

Цена одной акции в $(n-1)$ -й день	Цена одной акции в n -й день		
	Возрастает	Остается без изменения	Падает
Взросла по сравнению с $(n-2)$ -м днем	$A_{1,1}$	$A_{1,2}$	$A_{1,3}$
Осталась такой же, как и в $(n-2)$ -й день	$A_{2,1}$	$A_{2,2}$	$A_{2,3}$
Упала по сравнению с $(n-2)$ -м днем	$A_{3,1}$	$A_{3,2}$	$A_{3,3}$

Рекомендации по заданию начальных условий. Для определения изменения цен на акции необходимо задать начальные условия: цену одной акции в день с номером $k = 0$ и направление изменения вчерашней цены. Направление изменения вчерашней цены можно взять по второй строке.

2 Задание к лабораторной работе № 4

1. Написать программу в пакете Mathcad или Excel.
2. Выполнить имитационное моделирование биржевой игры с помощью равномерного датчика случайных чисел, распределенных в интервале (0,1).
3. Проанализировать результаты моделирования для 20 дней.
4. Провести расчеты для 100 реализаций и усреднить все величины. Проанализировать результаты моделирования для 20 дней.
5. Вместе с отчетом представить листинг программы.

Вариант XX

Цена одной акции в $(n-1)$ -й день	Цена одной акции в n -й день		
	Возрастает	Остается без изменения	Падает
Возросла по сравнению с $(n-2)$ -м днем	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
Осталась такой же, как и в $(n-2)$ -й день	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
Упала по сравнению с $(n-2)$ -м днем	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

3 Результаты работы

F17				✕ ✓ f_x		=СЛЧИС()	
	A	B	C	D	E	F	G
1	Цена одной акции в $(n-1)$ -й день	Цена одной акции в n -й день			День	Случайные числа	
2		Возрастает	Остается без изменения	Падает	0	0,21	
3	Взросла по сравнению с $(n-2)$ -м днем	1/4	1/2	1/4	1	0,38	
4	Осталась такой же, как и в $(n-2)$ -й день	1/4	1/4	1/2	2	0,34	
5	Упала по сравнению с $(n-2)$ -м днем	1/4	1/2	1/4	3	0,26	
6					4	0,04	
7					5	0,04	
8					6	0,11	
9					7	0,44	
10					8	0,61	
11					9	0,67	
12					10	0,96	
13					11	0,08	
14					12	0,51	
15					13	0,64	
16					14	0,31	
17					15	0,94	
18					16	0,59	
19					17	0,13	
20					18	0,15	
21					19	0,67	
22					20	0,50	
23							
24							

Рисунок 1 – Данные для расчета

H	I	J	K	L	M	N
Имитационное моделирование			Решение	Количество акций у игрока	Стоимость пакета акций	Наличные деньги
день имитации		Цена акции				
0	Без изменения					
1	Без изменения	10				
2	Без изменения	10	-	100	1000	0,00
3	Без изменения	10	-	100	1000	0,00
4	Без изменения	10	-	100	1000	0,00
5	Рост	11	-	100	1100	0,00
6	Рост	12	-	100	1200	0,00
7	Рост	13	-	100	1300	0,00
8	Без изменения	13	-	100	1300	0,00
9	Падение	12	Продать	0	0	1176,00
10	Без изменения	12	-	0	0	1176,00
11	Падение	11	-	0	0	1176,00
12	Рост	12	Купить	96	1152	0,96
13	Без изменения	12	-	96	1152	0,96
14	Падение	11	Продать	0	0	1035,84
15	Без изменения	11	-	0	0	1035,84
16	Падение	10	-	0	0	1035,84
17	Без изменения	10	-	0	0	1035,84
18	Рост	11	Купить	92	1012	3,60
19	Рост	12	-	92	1104	3,60
20	Без изменения	12	-	92	1104	3,60
					Результат:	1085,52

Рисунок 2 – Результаты моделирования 20 дней

4 Вывод

В результате выполнения лабораторной работы был получен опыт спекулятивной игры на фондовой бирже.

ПРИЛОЖЕНИЕ В**Пример отчета по лабораторной работе № 5**

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

**ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ (ТУСУР)**

Факультет дистанционного образования (ФДО)

Кафедра автоматизированных систем управления (АСУ)

**Способы построения моделирующих алгоритмов систем
массового обслуживания**

Отчет по лабораторной работе № 6 по дисциплине
«Математическое и имитационное моделирование
экономических процессов»

Вариант XX

Выполнил: ст. гр. ____

____ И. О. Фамилия
«____» _____ 2021 г.

Проверил: доцент каф. АСУ

____ Е. Б. Грибанова
«____» _____ 2021 г.

Оглавление

1 Краткие теоретические сведения	137
2 Задания к лабораторной работе № 5	140
3 Результаты работы программы	141
4 Вывод.....	146
5 Приложение к отчету (листинг программы)	147

1 Краткие теоретические сведения

Системами массового обслуживания (СМО) называют системы, предназначенные для многократного использования при решении однотипных задач. Возникающие при этом процессы получили название процессов обслуживания. Примерами СМО являются телефонные системы, ремонтные мастерские, вычислительные комплексы, билетные кассы, магазины, парикмахерские и т. п.

Каждая СМО состоит из определенного числа обслуживающих единиц (приборов, устройств, пунктов, станций), которые будем называть каналами обслуживания. Каналами могут быть линии связи, рабочие точки, вычислительные машины, продавцы и др. По числу каналов СМО подразделяют на одноканальные и многоканальные.

На вход в СМО поступает поток требований на обслуживание. В качестве таких требований могут выступать, например, клиенты или пациенты, поломки в оборудовании, готовые к упаковке изделия, телефонные вызовы, прибывающие в аэропорт самолеты.

Требования (заявки) поступают в СМО обычно не регулярно, а случайно, образуя так называемый случайный поток требований. Обслуживание заявок, вообще говоря, также продолжается какое-то случайное время. Случайный характер потока заявок и времени обслуживания приводит к тому, что СМО оказывается загруженной неравномерно: в какие-то периоды времени скапливается очень большое количество заявок (они либо становятся в очередь, либо покидают СМО необслуженными), в другие же периоды СМО работает с недогрузкой или простаивает. Предметом теории массового обслуживания является построение математических моделей, связывающих заданные условия работы СМО (число каналов, их производительность, характер потока заявок и т. п.) с показателями эффективности СМО, описывающими ее способность справляться с потоком заявок.

В качестве показателей эффективности СМО используются: среднее число заявок, обслуживаемых в единицу времени; среднее число заявок в очереди; среднее время ожидания обслуживания; вероятность отказа в обслуживании без ожидания; вероятность того, что число заявок в очереди превысит определенное значение и т. п. Здесь и в дальнейшем средние величины понимаются как математические ожидания соответствующих случайных величин.

СМО делят на два основных типа (класса): СМО с отказами и СМО с ожиданием (очередью). В СМО с отказами заявка, поступившая в момент, когда все каналы заняты, получает отказ, покидает СМО и в дальнейшем процессе обслуживания не участвует

(например, заявка на телефонный разговор в момент, когда все каналы заняты, получает отказ и покидает СМО необслуженной). В СМО с ожиданием заявка, пришедшая в момент, когда все каналы заняты, не уходит, а становится в очередь на обслуживание.

Процесс работы СМО представляет собой **случайный процесс** с дискретными состояниями и непрерывным временем. Это означает, что состояние СМО меняется скачком в случайные моменты появления каких-то событий (например, прихода новой заявки, окончания обслуживания и т. п.).

Случайный процесс называется **марковским или случайным процессом без последствия**, если для любого момента времени вероятностные характеристики процесса в будущем зависят только от его состояния в данный момент t_0 и не зависят от того, когда и как система пришла в это состояние.

Под **потоком событий** понимается последовательность однородных событий, следующих одно за другим в какие-то случайные моменты времени (например, поток вызовов на телефонной станции, поток отказов ЭВМ, поток покупателей и т. п.).

Поток характеризуется *интенсивностью* λ – частотой появления событий или средним числом событий, поступающих в СМО в единицу времени.

Поток событий называется **регулярным**, если события следуют одно за другим через определенные равные промежутки времени. Поток событий называется **стационарным**, если его вероятностные характеристики не зависят от времени. Поток событий называется **потоком без последствия**, если для любых двух непересекающихся участков времени продолжительностью τ_1 и τ_2 – число событий, попадающих на один из них, не зависит от числа событий, попадающих на другие. Поток событий называется **ординарным**, если события появляются в нем поодиночке, а не группами. Поток событий называется **простейшим** (или стационарным пуассоновским), если он одновременно стационарен, ординарен и не имеет последствия.

Проводка заявок

Существуют следующие способы построения моделирующих алгоритмов:

- способ повременного моделирования неперекрывающихся заявок;
- способ последовательной проводки перекрывающихся заявок без приоритета;
- способ последовательной проводки перекрывающихся заявок с приоритетом.

В первом методе осуществляется **пошаговый** способ продвижения модельного времени, во втором и третьем – **пособытийный**.

На рисунке 1 приведен пример **пошагового** способа обслуживания неперекрывающихся заявок, а на рисунке 2 дан пример событийного способа проводки заявок.

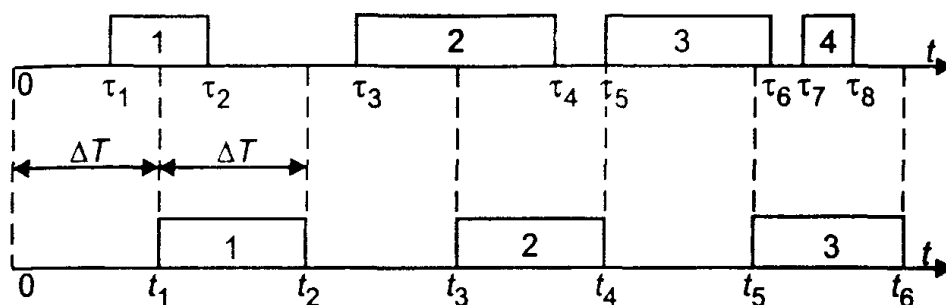


Рисунок 1 – Пошаговая проводка заявок

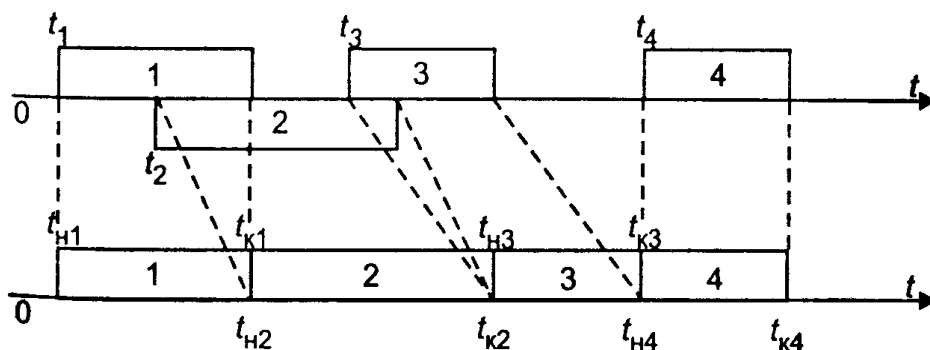


Рисунок 2 – Последовательная проводка перекрывающихся заявок без приоритета

Пример проводки заявок с приоритетом показан на рисунке 3.



Рисунок 3 – Проводка заявок с приоритетом

2 Задания к лабораторной работе № 5

1. Написать программы в среде Mathcad либо в другой среде на языке высокого уровня для моделирования поступления и обслуживания: а) неперекрывающихся заявок в одноканальной системе; б) перекрывающихся заявок одинакового приоритета; в) перекрывающихся заявок с разным приоритетом.

2. Провести моделирование обслуживания неперекрывающихся заявок в одноканальной системе. Время поступления заявок и время обслуживания распределены по экспоненциальному закону. Рассмотреть ситуации с различными значениями параметра интенсивности потока λ . Выполнить анализ системы для различных значений ΔT и определить минимальный шаг, при котором не будет пропущена ни одна заявка.

3. Рассмотреть метод последовательной проводки перекрывающихся заявок одинакового приоритета. Время поступления заявок и время обслуживания распределены по экспоненциальному закону. Рассмотреть ситуации с различными значениями параметра интенсивности потока λ поступления и обслуживания заявок. Определить среднее время ожидания обслуживания заявок.

4. Рассмотреть метод последовательной проводки перекрывающихся заявок с разным приоритетом. Распределение случайных величин интервалов между соседними заявками первого приоритета считать показательным. Распределение случайного времени обслуживания также считать показательным. Рассмотреть ситуации с различными значениями параметра интенсивности потока λ поступления и обслуживания заявок первого и второго приоритета. Определить среднее время ожидания обслуживания заявок.

3 Результаты работы программы

Одноканальная система массового обслуживания

☒ СМО непересекающихся заявок
☐ СМО пересекающихся заявок без приоритета
☐ СМО пересекающихся заявок с приоритетом

Количество заявок: 5
 Интенсивность поступления заявок(λ): 1
 Количество приоритетов: 3
 Интенсивность обработки(μ): 1
 Шаг ΔT : 0,2
 Рассчитать

Среднее время ожидания обслуживания заявок: Не требуется

Обслужено заявок: 4

Заявки

1я заявка.
 Входное время: 0,22314355131421
 Время обслуживания: 0,105360515657826
 Начало обслуживания: 0
 Конец обслуживания: 0,328504066972036

2я заявка.
 Входное время: 1,93794197940614
 Время обслуживания: 0,916290731874155
 Начало обслуживания: 2
 Конец обслуживания: 3

3я заявка.
 Входное время: 3,36505833504628
 Время обслуживания: 0,510825623765991
 Начало обслуживания: 3,4
 Конец обслуживания: 4

Рисунок 1

Одноканальная система массового обслуживания

☒ СМО непересекающихся заявок
☐ СМО пересекающихся заявок без приоритета
☐ СМО пересекающихся заявок с приоритетом

Количество заявок: 5
 Интенсивность поступления заявок(λ): 1
 Количество приоритетов: 3
 Интенсивность обработки(μ): 1
 Шаг ΔT : 0,1
 Рассчитать

Среднее время ожидания обслуживания заявок: Не требуется

Обслужено заявок: 5

Заявки

1я заявка.
 Входное время: 0,693147180559945
 Время обслуживания: 0,22314355131421
 Начало обслуживания: 0,7
 Конец обслуживания: 1

2я заявка.
 Входное время: 1,13943428318836
 Время обслуживания: 0,105360515657826
 Начало обслуживания: 1,2
 Конец обслуживания: 1,3

3я заявка.
 Входное время: 2,16108553072035
 Время обслуживания: 2,30258509299405
 Начало обслуживания: 2,2
 Конец обслуживания: 4,5

Рисунок 2

Одноканальная система массового обслуживания

☒ СМО непересекающихся заявок
☐ СМО пересекающихся заявок без приоритета
☐ СМО пересекающихся заявок с приоритетом

Количество заявок: 5
 Интенсивность поступления заявок (λ): 1000000
 Количество приоритетов: 3
 Интенсивность обработки (μ): 1
 Шаг ΔT : 0,1

Рассчитать

Среднее время ожидания обслуживания заявок: Не требуется

Обслужено заявок: 5

Заявки

1я заявка.
 Входное время: 1,20397280432594E-06
 Время обслуживания: 0,693147180559945
 Начало обслуживания: 0,1
 Конец обслуживания: 0,7

2я заявка.
 Входное время: 0,693149300823481
 Время обслуживания: 1,6094379124341
 Начало обслуживания: 0,7
 Конец обслуживания: 2,4

3я заявка.
 Входное время: 2,3025873186181
 Время обслуживания: 1,6094379124341
 Начало обслуживания: 2,4
 Конец обслуживания: 4

Рисунок 3

Одноканальная система массового обслуживания

☒ СМО непересекающихся заявок
☐ СМО пересекающихся заявок без приоритета
☐ СМО пересекающихся заявок с приоритетом

Количество заявок: 5
 Интенсивность поступления заявок (λ): 1
 Количество приоритетов: 3
 Интенсивность обработки (μ): 1000
 Шаг ΔT : 0,0001

Рассчитать

Среднее время ожидания обслуживания заявок: Не требуется

Обслужено заявок: 5

Заявки

1я заявка.
 Входное время: 0,356674943938732
 Время обслуживания: 0,000356674943938732
 Начало обслуживания: 0,356699999999977
 Конец обслуживания: 0,357099999999977

2я заявка.
 Входное время: 0,580175170196881
 Время обслуживания: 0,000916290731874155
 Начало обслуживания: 0,580199999999952
 Конец обслуживания: 0,581099999999952

3я заявка.
 Входное время: 1,2742386414887
 Время обслуживания: 0,00120397280432594
 Начало обслуживания: 1,274299999999988
 Конец обслуживания: 1,275499999999988

Рисунок 4

Одноканальная система массового обслуживания

☐ СМО непересекающихся заявок
☒ СМО пересекающихся заявок без приоритета
☐ СМО пересекающихся заявок с приоритетом

Количество заявок:
 Интенсивность поступления заявок(λ):

Количество приоритетов:
 Интенсивность обработки(μ):

Шаг ΔT :

Среднее время ожидания обслуживания заявок: 0,523687608482505

Обслужено заявок: 5

Заявки

1я заявка.
 Входное время: 0,105360515657826
 Время обслуживания: 0,510825623765991
 Начало обслуживания: 0,105360515657826
 Конец обслуживания: 0,616186139423817

2я заявка.
 Входное время: 0,616186139423817
 Время обслуживания: 1,20397280432594
 Начало обслуживания: 0,616186139423817
 Конец обслуживания: 1,82015894374975

3я заявка.
 Входное время: 1,53247687129797
 Время обслуживания: 0,916290731874155
 Начало обслуживания: 1,82015894374975
 Конец обслуживания: 2,73644967562391

Рисунок 5

Одноканальная система массового обслуживания

☐ СМО непересекающихся заявок
☒ СМО пересекающихся заявок без приоритета
☐ СМО пересекающихся заявок с приоритетом

Количество заявок:
 Интенсивность поступления заявок(λ):

Количество приоритетов:
 Интенсивность обработки(μ):

Шаг ΔT :

Среднее время ожидания обслуживания заявок: 2,83695326570582

Обслужено заявок: 5

Заявки

1я заявка.
 Входное время: 6,93147180559945E-06
 Время обслуживания: 1,6094379124341
 Начало обслуживания: 6,93147180559945E-06
 Конец обслуживания: 1,60944484390591

2я заявка.
 Входное время: 1,89711998488588E-05
 Время обслуживания: 1,20397280432594
 Начало обслуживания: 1,60944484390591
 Конец обслуживания: 2,81341764823184

3я заявка.
 Входное время: 2,00248050054371E-05
 Время обслуживания: 1,6094379124341
 Начало обслуживания: 2,81341764823184
 Конец обслуживания: 4,42285556066594

Рисунок 6

Одноканальная система массового обслуживания

☐ СМО непересекающихся заявок
☒ СМО пересекающихся заявок без приоритета
☐ СМО пересекающихся заявок с приоритетом

Количество заявок:
 Интенсивность поступления заявок (λ):

Количество приоритетов:
 Интенсивность обработки (μ):

Шаг ΔT :

Среднее время ожидания обслуживания заявок: 0

Обслужено заявок: 5

Заявки

1я заявка.
 Входное время: 2,30258509299405
 Время обслуживания: 9,16290731874155E-06
 Начало обслуживания: 2,30258509299405
 Конец обслуживания: 2,30259425590136

2я заявка.
 Входное время: 2,52572864430826
 Время обслуживания: 5,10825623765991E-06
 Начало обслуживания: 2,52572864430826
 Конец обслуживания: 2,52573375256449

3я заявка.
 Входное время: 2,74887219562246
 Время обслуживания: 2,2314355131421E-06
 Начало обслуживания: 2,74887219562246
 Конец обслуживания: 2,74887442705798

Рисунок 7

Одноканальная система массового обслуживания

☐ СМО непересекающихся заявок
☐ СМО пересекающихся заявок без приоритета
☒ СМО пересекающихся заявок с приоритетом

Количество заявок:
 Интенсивность поступления заявок (λ):

Количество приоритетов:
 Интенсивность обработки (μ):

Шаг ΔT :

Среднее время ожидания обслуживания заявок: 0,0267062785249045

Обслужено заявок: 5

Заявки

1я заявка.
 Входное время: 0,510825623765991
 Время обслуживания: 0,22314355131421
 Начало обслуживания: 0,510825623765991
 Конец обслуживания: 0,7339691750802
 Рейтинг: 1

2я заявка.
 Входное время: 2,12026353620009
 Время обслуживания: 2,30258509299405
 Начало обслуживания: 2,12026353620009
 Конец обслуживания: 4,77952357313287
 Рейтинг: 3

3я заявка.
 Входное время: 3,03655426807425
 Время обслуживания: 0,356674943938732
 Начало обслуживания: 3,03655426807425

Рисунок 8

Одноканальная система массового обслуживания

☐ СМО непересекающихся заявок
☐ СМО пересекающихся заявок без приоритета
☒ СМО пересекающихся заявок с приоритетом

Количество заявок: 5
 Интенсивность поступления заявок (λ): 1000
 Количество приоритетов: 3
 Интенсивность обработки (μ): 1
 Шаг ΔT : 0,0001

Рассчитать

Среднее время ожидания обслуживания заявок: 0,741123439316888

Обслужено заявок: 5

Заявки

1я заявка.
 Входное время: 0,000356674943938732
 Время обслуживания: 0,105360515657826
 Начало обслуживания: 0,000356674943938732
 Конец обслуживания: 0,105717190601765
 Рейтинг: 1

2я заявка.
 Входное время: 0,000867500567704723
 Время обслуживания: 0,916290731874155
 Начало обслуживания: 0,105717190601765
 Конец обслуживания: 1,02200792247592
 Рейтинг: 1

3я заявка.
 Входное время: 0,00137832619147071
 Время обслуживания: 1,20397280432594
 Начало обслуживания: 0,00137832619147071

Рисунок 9

Одноканальная система массового обслуживания

☐ СМО непересекающихся заявок
☐ СМО пересекающихся заявок без приоритета
☒ СМО пересекающихся заявок с приоритетом

Количество заявок: 5
 Интенсивность поступления заявок (λ): 1
 Количество приоритетов: 3
 Интенсивность обработки (μ): 1000
 Шаг ΔT : 1

Рассчитать

Среднее время ожидания обслуживания заявок: 0

Обслужено заявок: 5

Заявки

1я заявка.
 Входное время: 0,356674943938732
 Время обслуживания: 0,000105360515657826
 Начало обслуживания: 0,356674943938732
 Конец обслуживания: 0,35678030445439
 Рейтинг: 1

2я заявка.
 Входное время: 0,713349887877465
 Время обслуживания: 0,000693147180559945
 Начало обслуживания: 0,713349887877465
 Конец обслуживания: 0,714043035058025
 Рейтинг: 2

3я заявка.
 Входное время: 1,40649706843741
 Время обслуживания: 0,00022314355131421
 Начало обслуживания: 1,40649706843741

Рисунок 10

Язык программы – C#

Среда: Visual Studio

4 Вывод

В результате выполнения работы был получен опыт обработки заявок в системе массового обслуживания, а также закреплён опыт программирования на языке C# в среде Visual Studio.

5 Приложение к отчету (листинг программы)

Листинг программы

```

using System;
using System.Collections.Generic;
using System.ComponentModel;
using System.Data;
using System.Drawing;
using System.Linq;
using System.Text;
using System.Windows.Forms;

namespace WindowsFormsApp2
{
    public partial class Form1 : Form
    {
        static Random x = new Random();
        public Form1()
        {
            InitializeComponent();
        }
        private Double ExponentRaspr(Double alpha)
        {
            Double num = Convert.ToDouble(x.Next(1, 10) / 10.0);
            return ((-1.0 / alpha) * Math.Log(num));
        }

        private void button1_Click(object sender, EventArgs e)
        {
            richTextBox1.Text = "";
            int i = 0;
            int NumOfRequests = Convert.ToInt32(KolZayavok.Text);
            int NumOfRatings = Convert.ToInt32(KolPrioritetov.Text);
            Double IntencPost = Convert.ToDouble(IntensivPostZayavok.Text), IntencObrabot = Convert.ToDouble(IntensivObrabotki.Text); // Интенсивность поступления заявок и обработки
            Zaiavka[] Zaiavka = new Zaiavka[NumOfRequests];
            ZaiavkiVbuffere[] ZaiavkiVbuffere = new ZaiavkiVbuffere[NumOfRequests];
            label9.Text = NumOfRequests.ToString();
            while (i < NumOfRequests)
            {
                Zaiavka[i] = new Zaiavka();
                if (i < 1)
                    Zaiavka[i].VxodnoeTime = ExponentRaspr(IntencPost);
                else
                {
                    if (radioButton1.Checked) { Zaiavka[i].VxodnoeTime = Zaiavka[i - 1].EndServingTime + ExponentRaspr(IntencPost); }
                    // т к не пересекающиеся
                    if (radioButton2.Checked) { Zaiavka[i].VxodnoeTime = Zaiavka[i - 1].VxodnoeTime + ExponentRaspr(IntencPost); }
                    if (radioButton3.Checked)
                    {
                        Zaiavka[i].VxodnoeTime = Zaiavka[i - 1].VxodnoeTime + ExponentRaspr(IntencPost);
                        Zaiavka[i].Reiting = x.Next(0, NumOfRatings);
                    }
                }
                Zaiavka[i].AllTimeObslugi = ExponentRaspr(IntencObrabot);
                Zaiavka[i].EndServingTime = Zaiavka[i].VxodnoeTime + Zaiavka[i].AllTimeObslugi;
                i++;
            }
        }
    }
}

```

```
////////////////////////////////
```

```

if (radioButton1.Checked)
{
    int Obsluzenie = 0;
    i = 0;
    Double ProverkaTime = 0;
    Double step = Convert.ToDouble(dT.Text);
    bool IsServing = false;
    ProverkaTime = step;
    while (i < NumOfRequests)
    {
        if (IsServing == false)
        {
            if (Zaiavka[i].VxodnoeTime <= ProverkaTime && ProverkaTime <= Zaiavka[i].EndServingTime)
            {
                Zaiavka[i].StartServingTime = ProverkaTime;
                IsServing = true;
            }
            if(ProverkaTime > Zaiavka[i].EndServingTime)
            {
                i++;
                ProverkaTime -= step;
            }
            else if (ProverkaTime >= Zaiavka[i].EndServingTime)
            {
                Zaiavka[i].EndServingTime = ProverkaTime;
                IsServing = false;
                ProverkaTime -= step;
                Obsluzenie++;
                i++;
            }
            ProverkaTime += step;
        }
        label9.Text = Obsluzenie.ToString();
    }
}
////////////////////////////////
if (radioButton2.Checked)
{
    for (i = 0; i < NumOfRequests; i++)
    {
        if (i - 1 >= 0)
        {
            if (Zaiavka[i].VxodnoeTime < Zaiavka[i - 1].EndServingTime)
            {
                Zaiavka[i].StartServingTime = Zaiavka[i - 1].EndServingTime;
                Zaiavka[i].EndServingTime = Zaiavka[i].StartServingTime + Zaiavka[i].AllTimeObslugi;
            }
            else
            {
                Zaiavka[i].StartServingTime = Zaiavka[i].VxodnoeTime;
            }
        }
        else
        {
            Zaiavka[i].StartServingTime = Zaiavka[i].VxodnoeTime;
        }
    }
}
}
}

```

```
////////////////////////////////
```

```

if (radioButton3.Checked)
{

```

```

int z = 0, k = 0, l=0;
for (int q = 0; q < NumOfRatings; q++)
{
    for (i = 0; i < NumOfRequests; i++)
    {
if (Zaiavka[i].Reiting == q)
{
    ZaiavkiVbuffere[z] = new ZaiavkiVbuffere();
    ZaiavkiVbuffere[z].VxodnoeTime = Zaiavka[i].VxodnoeTime;
    ZaiavkiVbuffere[z].StartServingTime = Zaiavka[i].StartServingTime;
    ZaiavkiVbuffere[z].EndServingTime = Zaiavka[i].EndServingTime;
    ZaiavkiVbuffere[z].AllTimeObslugi = Zaiavka[i].AllTimeObslugi;
    ZaiavkiVbuffere[z].OriginNumber = i;
    z++;
}
    }

    for (i = k; i < z; i++)
    {
if ((i - 1) >= k)
{
    if (ZaiavkiVbuffere[i].VxodnoeTime < ZaiavkiVbuffere[i - 1].EndServingTime)
    {

        ZaiavkiVbuffere[i].StartServingTime = ZaiavkiVbuffere[i - 1].EndServingTime;
        ZaiavkiVbuffere[i].EndServingTime = ZaiavkiVbuffere[i].StartServingTime + ZaiavkiVbuffere[i].AllTimeObslugi;
        if (k == 0)
        {
Zaiavka[ZaiavkiVbuffere[i].OriginNumber].StartServingTime = ZaiavkiVbuffere[i].StartServingTime;
Zaiavka[ZaiavkiVbuffere[i].OriginNumber].EndServingTime = ZaiavkiVbuffere[i].EndServingTime;
        }
        }
        else
        {

            ZaiavkiVbuffere[i].StartServingTime = ZaiavkiVbuffere[i].VxodnoeTime;
            if (k == 0)
            {
Zaiavka[ZaiavkiVbuffere[i].OriginNumber].StartServingTime = ZaiavkiVbuffere[i].StartServingTime;
            }
        }
    }
}
else
{

    ZaiavkiVbuffere[i].StartServingTime = ZaiavkiVbuffere[i].VxodnoeTime;
    if (k == 0)
    {
        Zaiavka[ZaiavkiVbuffere[i].OriginNumber].StartServingTime = ZaiavkiVbuffere[i].StartServingTime;
    }
}
}
}
}

ZaiavkiVbuffere[i].StartServingTime = ZaiavkiVbuffere[i].VxodnoeTime;
if (k == 0)
{
    Zaiavka[ZaiavkiVbuffere[i].OriginNumber].StartServingTime = ZaiavkiVbuffere[i].StartServingTime;
}
}
}

//////////
///Здесь проверка(сравнение) на каждый параметр начала и конца объектов от ZaiavkiVbuffere[0] до
ZaiavkiVbuffere[k] с объектом
//////////
///
for (l = 0; l < k; l++)
{
    if (ZaiavkiVbuffere[l].StartServingTime >= ZaiavkiVbuffere[i].StartServingTime &&
ZaiavkiVbuffere[l].EndServingTime <= ZaiavkiVbuffere[i].EndServingTime)
    {
        ZaiavkiVbuffere[i].EndServingTime += ZaiavkiVbuffere[l].EndServingTime - ZaiavkiVbuffere[l].StartServingTime;
    }
    else
    if (ZaiavkiVbuffere[l].StartServingTime <= ZaiavkiVbuffere[i].StartServingTime &&
ZaiavkiVbuffere[l].EndServingTime <= ZaiavkiVbuffere[i].EndServingTime && ZaiavkiVbuffere[l].EndServingTime >=
ZaiavkiVbuffere[i].StartServingTime)

```

```

    {
        ZaiavkiVbuffere[i].EndServingTime += ZaiavkiVbuffere[l].EndServingTime - ZaiavkiVbuffere[i].StartServingTime;
    }
    else
        if (ZaiavkiVbuffere[l].StartServingTime >= ZaiavkiVbuffere[i].StartServingTime &&
ZaiavkiVbuffere[l].StartServingTime <= ZaiavkiVbuffere[i].EndServingTime && ZaiavkiVbuffere[l].EndServingTime >=
ZaiavkiVbuffere[i].EndServingTime)
        {
            ZaiavkiVbuffere[i].EndServingTime = ZaiavkiVbuffere[l].EndServingTime + (ZaiavkiVbuffere[i].EndServingTime -
ZaiavkiVbuffere[l].StartServingTime);
        }
        else
            if (ZaiavkiVbuffere[l].StartServingTime <= ZaiavkiVbuffere[i].StartServingTime &&
ZaiavkiVbuffere[l].EndServingTime >= ZaiavkiVbuffere[i].EndServingTime)
            {
                ZaiavkiVbuffere[i].StartServingTime = ZaiavkiVbuffere[l].EndServingTime;
                ZaiavkiVbuffere[i].EndServingTime = ZaiavkiVbuffere[l].EndServingTime + (ZaiavkiVbuffere[i].EndServingTime -
ZaiavkiVbuffere[i].StartServingTime);
            }
        }
    }
    Zaiavka[ZaiavkiVbuffere[i].OriginNumber].StartServingTime = ZaiavkiVbuffere[i].StartServingTime;
    Zaiavka[ZaiavkiVbuffere[i].OriginNumber].EndServingTime = ZaiavkiVbuffere[i].EndServingTime;
    }
    k = z; // увеличение области сравнений на пласт обработанных заявок определенного уровня
    }

}
double Timeout = 0;
//////////
for (i = 0; i < NumOfRequests; i++)
{
    if (!radioButton1.Checked)
        Timeout += Zaiavka[i].StartServingTime - Zaiavka[i].VxodnoeTime;
    richTextBox1.Text += "-----\n" + (i+1).ToString() + "я заявка. \nВходное время: " +
Zaiavka[i].VxodnoeTime + " \nВремя обслуживания: " + Zaiavka[i].AllTimeObslugi + "\nНачало обслуживания: " +
Zaiavka[i].StartServingTime + "\nКонец обслуживания: " + Zaiavka[i].EndServingTime + "\n";
    if (radioButton3.Checked)
        richTextBox1.Text += "Рейтинг: " + (Zaiavka[i].Reiting + 1) + "\n";
}
if (!radioButton1.Checked)
    Timeout = Timeout / NumOfRequests;
if (!radioButton1.Checked)
    label7.Text = Timeout.ToString();
else label7.Text = "Не требуется";
}
}
public class Zaiavka
{
    public Double VxodnoeTime = 0; // Время поступления заявок
    public Double StartServingTime = 0; // Время начала обслуживания
    public Double EndServingTime = 0; // Время окончания обслуживания
    public Double AllTimeObslugi = 0; // Время обслуживания
    public int Reiting = 0; // Уровень рейтинга
    public Double Timeout = 0; // Время ожидания
}
public class ZaiavkiVbuffere
{
    public Double VxodnoeTime = 0; // Время поступления заявок
    public Double StartServingTime = 0; // Время начала обслуживания
    public Double EndServingTime = 0; // Время окончания обслуживания
    public Double AllTimeObslugi = 0; // Время обслуживания с возможностью регрессии
    public int OriginNumber;
}
}

```