

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №3

КОРРЕЛЯЦИОННО-РЕГРЕССИОННЫЙ АНАЛИЗ

1. ЦЕЛЬ И ЗАДАЧИ ИССЛЕДОВАНИЯ

Изучение и приобретение навыков использования корреляционно-регрессионного анализа.

2. ОСНОВЫ ТЕОРИИ

Существуют два вида зависимостей, отражающих причинно-следственные связи между исследуемыми показателями: функциональная и корреляционная.

Под *функциональной* зависимостью подразумевается такая связь между величинами, когда значение зависимой величины полностью определяется значением других переменных величин – аргументов. Функция может иметь один или несколько аргументов.

Корреляционная зависимость имеет место, когда каждому значению одной величины соответствует множество случайных значений другой, возникающих с определенной вероятностью. При этой связи изменение одной величины вызывает изменение среднего значения другой.

Как правило, при работе с экономическими величинами мы имеем дело не с функциональной, а с корреляционной зависимостью. Корреляция – статистическая зависимость между случайными величинами, не имеющими строго функционального характера, при котором изменение одной случайной величины приводит к изменению другой. При парной корреляции наблюдается связь между двумя величинами, при множественной – определенным значениям факторных признаков соответствует множество случайных значений зависимой величины, распределенных по известному закону. Вместе с тем можно подобрать такую функцию (т.е. определить функциональную зависимость), которая приближенно будет отражать связь между зависимой переменной и множеством факторных признаков.

По направлению выделяют связь прямую (при уменьшении или увеличении факторов уменьшается или увеличивается результативный признак) и обратную (изменяется результативный признак в противоположном направлении относительно факторного). По аналитическому выражению различают связи линейные (если связь выражена прямой линией) и нелинейные.

В зависимости от решаемых задач исследования можно использовать методы корреляционного и регрессионного анализа.

Корреляционный анализ решает следующие задачи: изменение степени связи двух и более признаков; отбор факторов, оказывающих наибольшее влияние на результирующий признак на основании измерения степени связности между признаками; обнаружение ранее не известных связей. Корреляция непосредственно не выявляет функциональные связи между явлениями, но устанавливает численное значение этих связей и достоверность суждений об их наличии. Основными средствами анализа являются парные, множественные коэффициенты корреляции, частные коэффициенты корреляции.

Регрессионный анализ состоит в аналитическом выражении функциональной связи между одной или несколькими независимыми переменными и зависимой переменной, отражает причинно-следственные связи между явлениями.

КОРРЕЛЯЦИОННЫЙ АНАЛИЗ

Для определения линейной связи между двумя случайными величинами X , Y может быть использован центральный смешанный момент 2-го порядка – *ковариация*. Ковариация –

это коэффициент, определяющий степень линейной статистической зависимости двух случайных величин, т.е. насколько распределение одной случайной величины зависит от другой.

$$\widehat{\text{cov}}(x, y) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})(x_i - \bar{x})$$

Мерой зависимости, связанной с ковариацией, является *коэффициент корреляции*, определяемый по выражению

$$r_{x,y} = \frac{\text{cov}(x, y)}{\sigma_x \sigma_y}.$$

В отличие от ковариации, значения этого коэффициента нормированы и лежат в диапазоне $[-1; 1]$.

Если одна переменная не влияет на другую, то говорят, что переменные независимы и корреляция (ковариация) равна нулю. И наоборот, если при изменении одной переменной другая тоже меняется, то говорят о коррелированности двух переменных. Положительное значение корреляции показывает, что с увеличением (уменьшением) Y увеличивается (уменьшается) X , а отрицательное, - что Y увеличивается (уменьшается) с уменьшением (увеличением) X . Величина коэффициента отражает степень этой зависимости.

Оценка тесноты и направления связи производится по *шкале Чеддока*.

Шкала Чеддока

Теснота связи	Величина показателя	
	прямая связь	Обратная связь
Отсутствие связи	0 - 0.1	-0.1 - 0
Слабая	0.1 - 0.3	-0.3 - -0.1
Умеренная	0.3 - 0.5	-0.5 - -0.3
Заметная	0.5 - 0.7	-0.7 - -0.5
Высокая	0.7 - 0.9	-0.9 - -0.7
Весьма высокая	0.9 - 0.99	-0.99 - -0.9

РЕГРЕССИОННЫЙ АНАЛИЗ

Понятие, задачи и виды регрессионного анализа

Общее назначение регрессионного анализа состоит в аналитическом выражении связи между одной или несколькими независимыми переменными $\vec{x}^T = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ (называемыми также регрессорами, факторными или экзогенными признаками) и зависимой переменной y (результатирующим или эндогенным признаком):

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_m) + \varepsilon.$$

Регрессия – это условное математическое ожидание (зависимость математического ожидания выходной переменной от ожидания входной):

$$E(y | \vec{x}) = f(\vec{x}).$$

При регрессионном анализе решаются следующие задачи:

- 1) Установление форм зависимости между переменными (идентификация);
- 2) Определение функции регрессии (сводится к определению неизвестных параметров модели);
- 3) Оценка неизвестных значений зависимой переменной (прогнозирование).

В зависимости от количества регрессоров различают парную (один регрессор) и

множественную регрессию. Так, уравнение парной регрессии определяет зависимость результирующей переменной от одной независимой, а множественной регрессии – от нескольких независимых переменных. В зависимости от вида связи между факторами различают линейную и нелинейную регрессию.

Линейная регрессионная модель имеет вид

$$y = a_0 + a_1x_1 + \dots + a_mx_m + \varepsilon.$$

Линейные модели (в более общем случае - линейно-параметризованные) могут быть записаны в виде скалярного произведения вектора неизвестных коэффициентов и вектора базисных функций:

$$y = \vec{A}^T \vec{f}(\vec{x}) + \varepsilon,$$

$$\text{где } \vec{A}^T = (a_0, a_1, \dots, a_m),$$

$$\vec{f}^T(\vec{x}) = (1, x_1, x_2, \dots, x_m),$$

$$\vec{x}^T = (x_1, x_2, \dots, x_m).$$

Нелинейно-параметризованную модель нельзя представить в виде подобного скалярного произведения, т.е.

$$y \neq \vec{A}^T \vec{f}(\vec{x}) + \varepsilon.$$

Общая вычислительная задача, которую требуется решать при анализе методом регрессии, состоит в подгонке некоторой функции к заданному набору точек. Линия регрессии выражает наилучшее предсказание зависимой переменной по независимым переменным. Однако природа редко (если вообще когда-нибудь) бывает полностью предсказуемой и обычно имеется существенный разброс наблюдаемых точек относительно подогнанной прямой (как показано на диаграмме рассеяния). Очевидно, что, чем меньше разброс значений остатков около линии регрессии по отношению к общему разбросу значений, тем лучше построена модель регрессии.

Оценивание параметров регрессионной модели

Задача оценки параметров регрессионной модели заключается в оценке вектора неизвестных параметров $\vec{A}$ на основе наблюдений и измерений процессов $x_i(t)$, $i = 1..m$, $y(t)$. Оценка этого вектора представляет собой векторную случайную величину, т.е. совокупность случайных величин.

Для оценивания неизвестных параметров линейно-параметризованной модели может быть использован метод наименьших квадратов (МНК), метод максимального правдоподобия, а в случае нелинейной параметризации – методы нелинейного оценивания.

Метод наименьших квадратов. Рассмотрим случай линейной регрессии. Требуется построить прямую линию, которая наиболее точно отображала бы изменения динамики за рассматриваемый период. Поскольку исходные значения имеют колебания, то модель будет содержать ошибки, которые и надо минимизировать. Наиболее объективным с формальной точки зрения будет построение, основанное на минимизации суммы отрицательных и положительных отклонений исходных значений от прямой линии, и, как следствие, наиболее используемой процедурой является минимизация суммы квадратов отклонений или метод наименьших квадратов.

Использование метода предполагает соблюдение некоторых условий: остатки имеют математическое ожидание, равное нулю, и конечную дисперсию, подчинена нормальному закону распределения; отсутствует мультиколлинеарность.

Найдем оценку вектора $\hat{\vec{A}}$, решив следующую экстремальную задачу:

$$I = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 \xrightarrow{\bar{A}} \min.$$

В более общем случае решением поставленной задачи является вектор, определяемый по формуле

$$\hat{\vec{A}} = (F^T F)^{-1} F^T \vec{Y},$$

где $\vec{Y}^T = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ - вектор значений зависимой переменной в n измерениях;

F - матрица базисных функций размерностью $n \times q$:

$$F_n^q = \begin{pmatrix} \vec{f}^T(\vec{x}_1) \\ \vec{f}^T(\vec{x}_2) \\ \dots \\ \vec{f}^T(\vec{x}_n) \end{pmatrix}$$

Статистический анализ уравнения регрессии

Прежде чем использовать регрессионную модель, целесообразно провести проверку значимости модели и проверку адекватности представления исходных данных полученному уравнению регрессии, в результате чего происходит уточнение структуры модели с обоснованием правильности ее выбора.

Проверка *значимости модели* состоит из двух этапов: проверка значимости модели в целом и проверки значимости ее параметров.

Значимость модели определяется путем проверки существенности отличия от нуля *коэффициента множественной корреляции* R :

$$R = \sqrt{r_1 \beta_1 + r_2 \beta_2 + \dots + r_m \beta_m},$$

где β - коэффициент регрессии в стандартизованном виде, используемый для устранения различий в измерении и степени колеблемости факторов:

$$\beta_j = \hat{a}_j \hat{\sigma}_{x_j} / \hat{\sigma}_y,$$

$\hat{\sigma}_{x_j}, \hat{\sigma}_y$ - оценки СКО j -й переменной и независимой переменной соответственно;

$\hat{a}_1, \hat{a}_2, \dots, \hat{a}_m$ - оценки соответствующих регрессионных коэффициентов;

r_j - коэффициент парной корреляции между j -м фактором и зависимой переменной.

Коэффициент парной корреляции r_j используется для определения степени тесноты связи объясняемой и независимой переменными после вычленения влияния всех остальных переменных. Коэффициент показывает, на какую часть величины СКО меняется среднее значение зависимой переменной с изменением соответствующей независимой переменной на одно среднеквадратическое отклонение при фиксированном постоянном уровне значений остальных независимых переменных.

Кроме проверки значимости всей модели необходимо проверить (оценить) регрессионные коэффициенты на их отличие от нуля. Проверка *значимости i -го коэффициента* модели эквивалентна проверке гипотезы о том, что $a_i = 0$ (нуль-гипотеза).

Проверка гипотезы осуществляется с использованием критерия Стьюдента:

$$\frac{|\hat{a}_i|}{\hat{\sigma}_i} \geq t,$$

где t - это квантиль распределения Стьюдента, соответствующий уровню значимости γ и числу степеней свободы $\nu = n - 1$;

σ_i - среднее квадратическое отклонение i -го параметра модели:

$$\sigma_i = \frac{\sigma_y \sqrt{1 - R^2}}{\sigma_{x_i} \sqrt{n} \sqrt{1 - r_i^2}}.$$

После проверки значимости все незначимые коэффициенты исключаются из модели, т.е. осуществляется корректировка ее структуры.

Проверка точности представления исходных данных полученному уравнению регрессии осуществляется на основе анализа остатков. Анализ отклонений от линии регрессии (остатков) позволяет определить, насколько оцененная регрессия отражает реальные данные. Хорошая регрессия та, которая объясняет значительную долю дисперсии, и, наоборот, плохая регрессия не отслеживает большую часть колебаний исходных данных.

Для оценки адекватности модели наиболее часто используется Критерий Фишера. Полученная величина сравнивается с критическим значением, которое определяется по таблице F-распределения с учетом принятого уровня значимости и числа степеней свободы $q - 1$ (число параметров модели - 1) и $n - q$ (число элементов выборки - число параметров модели) и делается вывод о значимости уравнения регрессии.

Оценка влияния регрессоров на зависимую переменную

На основе регрессионного анализа можно определить отдельное влияние факторных признаков на результивный признак, для чего могут быть использованы дельта-коэффициенты и коэффициенты эластичности.

Дельта-коэффициент. Дельта-коэффициент определяет долю вклада каждого фактора в суммарное влияние на выход:

$$\Delta_j = (r_j \beta_j) / R^2, \quad \sum_{j=1}^m \Delta_j = 1.$$

При корректно проводимом регрессионном анализе все величины дельта-коэффициентов положительны, т.е. все коэффициенты регрессии имеют тот же знак, что и соответствующие коэффициенты парной корреляции. Только в случае мультиколлинеарности дельта-коэффициенты могут быть отрицательны.

Коэффициент эластичности. Влияние факторных признаков на результивный часто определяют также с использованием коэффициента эластичности. Эластичность Y по отношению к X_j рассчитывается как процентное изменение Y , отнесенное к соответствующему процентному изменению X_j . В общем случае эластичности не постоянны, они различаются, если измерены для различных точек на линии регрессии. По умолчанию стандартные программы, оценивающие эластичность, вычисляют ее в точках средних значений:

$$E_j = a_j \frac{\bar{x}_j}{\bar{y}} \approx \frac{\partial y}{\partial x_j} \cdot \frac{\bar{x}_j}{\bar{y}}.$$

Эластичность ненормирована и может изменяться в диапазоне $[-\infty \dots +\infty]$. Важно, что она безразмерна, так что интерпретация эластичности $E_j = 2.0$ означает, что если $\bar{x}_j$

увеличится (уменьшится) на 1 %, то это приведет к увеличению (уменьшению) $\bar{Y}$ на 2 %. Если $E_j = -0.5$, то это означает, что увеличение $\bar{X}_j$ на 1 % приведет к уменьшению $\bar{Y}$ на 0.5 %. Высокий уровень эластичности означает сильное влияние независимой переменной на объясняемую переменную.

3. ЗАДАНИЕ

Используя средства OpenOffice.Calc решить следующие задачи:

1. Построить ковариационную и корреляционную матрицу (количество строк и столбцов равно числу переменных, на пересечении – коэффициент ковариации или корреляции соответственно).
2. Построить уравнение линейной регрессии, которое определяет зависимость эндогенной переменной (зависимая переменная) от других факторов (экзогенных). Зависимую переменную взять в соответствии с номером варианта, независимые переменные определить самостоятельно на основе построенной корреляционной матрицы.
3. Провести статистический анализ построенной регрессии, определив значимость модели, параметров модели, и адекватность модели на основе критерия Фишера. В случае отсутствия значимости модели и ее параметров перестроить модель.
4. Определить влияние независимых переменных на зависимую на основе коэффициента эластичности и дельта-коэффициентов.
5. Построить график динамики зависимой переменной и ее оценок по модели. Сделать выводы по каждому пункту.

Вариант 1 (нечетные номера компьютеров)

Основные макроэкономические, демографические и показатели уровня жизни Тульской области

	1998	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2010	2014	2015	2016	2017
1. Валовой региональный продукт млн. руб.	18564.6	43897.5	55680.7	67891.9	77320	82867	116221,2	237629,2	411122,3	477537,8	517740,8	-
2. Численность постоянного населения (на конец года), тыс. человек	1763,4	1716,2	1690,0	1669,8	1644,8	1621,9	1615,2	1550,3	1513,6	1506,4	1499,4	14,91
3. Естественный прирост населения на 1000 человек населения	-11.2	-14.2	-14.3	-14.4	-14.7	-13.8	-14,0	-9,8	-7,1	-6,6	-6,8	-7,6
4. Общий коэффициент брачности	5.8	6.1	6.8	6.8	7.4	6.5	7,1	7,7	7,7	7,3	6,3	7,0
5. Общий коэффициент разводимости	3.6	4.4	5.3	6.2	5.7	4.8	4,5	4,7	5,0	4,1	4,1	4,2
6. Среднегодовая численность занятых в экономике, тыс. человек	765.0	786.9	780.5	772.9	770.7	770.0	775,6	771,1	749,8	742,9	731,5	730,0
7. Численность безработных, тыс. человек	14.8	8.5	9.6	9.7	10.8	9.4	8,1	12,6	7,2	6,8	5,9	4,3
8. Среднедушевые денежные доходы населения, в месяц рублей	694.4	1484	2013	2618	3383	3940	4988,4	15349,5	23040,3	26289,9	27432,4	27853,3
9. Величина прожиточного минимума, руб. в месяц	382.6	1008	1273	1435	1775	2031	2495.7	5199,4	7368	8949	9128	9303
10. Численность населения с денежными доходами ниже величины прожиточного минимума в процентах от общей численности населения	22.0	32.2	25.9	21.8	20.5	20.31	17,4	11,0	9,8	10,6	10,0	10,0
11. Средний размер назначенных месячных пенсий, руб.	405.2	839.4	1164.4	1494.0	1776.8	2023.6	2495,7	7439,6	10688,3	11874,8	17247,8	13152,7

Используемые функции

CORREL

Вычисляет коэффициент корреляции для двух множеств данных.

Синтаксис

CORREL (Данные 1; Данные 2)

Данные 1: первое множество данных.

Данные 2: второе множество данных.

Пример

=CORREL(A1:A50;B1:B50) вычисляет коэффициент корреляции в качестве размерности линейного соотношения между двумя множествами данных.

COVAR

Вычисляет ковариацию (ковариантность двух отклонений).

Синтаксис

COVAR (Данные 1; Данные 2)

Данные 1: первое множество данных.

Данные 2: второе множество данных.

Пример

=COVAR(A1:A50; B1:B30)

LINEST

Множественная регрессия

LINEST (Данные_Y; Данные_X; Тип_линии; Статистика)

Данные_Y: массив данных Y.

Данные_X: массив данных X.

Тип_линии (необязательно): если линия проходит через ноль, укажите для этого параметра значение 0.

Статистика (необязательно): если для этого параметра указано значение 0, рассчитывается только коэффициент регрессии. В противном случае отображаются и другие данные.

Пример:

Эта функция возвращает массив и обрабатывается так же, как и другие функции массива. Выделите диапазон для возвращаемых значений, а затем выберите функцию. Выберите значение для параметра "Данные_Y". При необходимости можно ввести и другие параметры. Установите флажок **Массив** и нажмите кнопку **ОК**.

Возвращаемые результаты будут включать по меньшей мере наклон линии регрессии и точку ее пересечения с осью Y (если для параметра "Статистика" указано значение 0).

Просмотрите приведенные ниже примеры.

	A	B	C	D	E	F	G
1	x1	x2	y		значение функции LINEST		
2	4	7	100		4,17	-3,48	82,33

3	5	9	105	5,46	10,96	9,35
4	6	11	104	0,87	5,06	#НД
5	7	12	108	13,21	4	#НД
6	8	15	111	675,45	102,26	#НД
7	9	17	120			
8	10	19	133			

Столбец А содержит несколько значений X1, столбец В — несколько значений X2, а столбец С — значения Y. Эти значения уже введены в электронную таблицу. В таблице выделен диапазон E2:G6 и запущен **мастер функций**. Чтобы функция LINEST выполнялась правильно, следует установить флажок **Массив** в **мастере функций**. Затем необходимо выделить в таблице (или ввести вручную) следующие значения:

Данные_Y: C2:C8

Данные_X: A2:B8

Тип линии и **Статистика** имеют значение 1.

После нажатия кнопки **ОК** OpenOffice.org Calc заполняет выделенный диапазон результатами функции LINEST, как показано в примере.

Формула на панели **Формула** соответствует каждой ячейке матрицы функции LINEST {=LINEST(C2:C8;A2:B8;1;1)}

Ниже представлены результаты функции LINEST.

E2 и F2. Коэффициенты регрессии для переменных x1 и x2. Значения приводятся в обратном порядке, т.е. коэф. для x2 указан в ячейке E2, а для x1 — в ячейке F2.

G2. Пересечение линии с осью Y (коэффициент A0).

E3 и F3. Стандартная ошибка для соответствующих коэффициентов регрессии (сравнить отношение коэффициента с его ошибкой с табличными значениями – см.прил).

G3. Стандартная ошибка для A0 (сравнить с табличными значениями – см.прил).

E4: Коэффициент детерминации.

F4. Стандартная ошибка регрессии.

E5. Значение критерия Фишера, полученное с помощью дисперсионного анализа (сравнить с квартилем распределения Фишера – см. табл. в приложении).

F5. Степени свободы, полученные с помощью дисперсионного анализа.

E6. Сумма квадратов отклонений для примерных значений Y от линейного среднего.

F6. Сумма квадратов отклонений для примерных значений Y от заданных значений Y.

Приложение 1

Таблица 1

Критические точки распределения Стьюдента
(для двухсторонней критической области)

Число степеней свободы	$\gamma = 0.1$	$\gamma = 0.05$	$\gamma = 0.02$	$\gamma = 0.01$
1	6,314	12,706	31,821	63,657
2	2,920	4,303	6,965	9,925
3	2,353	3,182	4,541	5,841
4	2,132	2,776	3,747	4,604
5	2,015	2,571	3,365	4,032
6	1,943	2,447	3,143	3,707
7	1,895	2,365	2,998	3,499
8	1,860	2,306	2,896	3,355
9	1,833	2,262	2,821	3,250
10	1,812	2,228	2,764	3,169
15	1,753	2,131	2,602	2,947
20	1,725	2,086	2,528	2,845
25	1,708	2,060	2,485	2,787
30	1,697	2,042	2,457	2,750
40	1,684	2,021	2,423	2,704
50	1,676	2,009	2,403	2,678
60	1,671	2,000	2,390	2,660
70	1,667	1,994	2,381	2,648
80	1,664	1,990	2,374	2,639
90	1,662	1,987	2,368	2,632
100	1,660	1,984	2,364	2,626
110	1,659	1,982	2,361	2,621
120	1,658	1,980	2,358	2,617
	1,64	1,96	2,33	2,58

Таблица 2

Критические точки распределения Фишера

(Уровень значимости 0,05)

	число степеней свободы большей дисперсии																			
	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.	15.	16.	17.	18.	19.	20.
Число степеней свободы меньшей дисперсии	1	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242	243	244	245	245	246	247	247	247	248
	2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,35	19,37	19,38	19,40	19,40	19,41	19,42	19,42	19,43	19,43	19,44	19,44	19,45
	3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,89	8,85	8,81	8,79	8,76	8,74	8,73	8,71	8,70	8,69	8,68	8,67	8,66
	4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,94	5,91	5,89	5,87	5,86	5,84	5,83	5,82	5,81
	5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,77	4,74	4,70	4,68	4,66	4,64	4,62	4,60	4,59	4,58	4,57
	6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	4,03	4,00	3,98	3,96	3,94	3,92	3,91	3,90	3,88
	7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,64	3,60	3,57	3,55	3,53	3,51	3,49	3,48	3,47	3,46
	8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,35	3,31	3,28	3,26	3,24	3,22	3,20	3,19	3,17	3,16
	9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,14	3,10	3,07	3,05	3,03	3,01	2,99	2,97	2,96	2,95
	10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,98	2,94	2,91	2,89	2,86	2,85	2,83	2,81	2,80	2,79
	11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,85	2,82	2,79	2,76	2,74	2,72	2,70	2,69	2,67	2,66
	12	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,00	2,91	2,85	2,80	2,75	2,72	2,69	2,66	2,64	2,62	2,60	2,58	2,57	2,56
	13	4,67	3,81	3,41	3,18	3,03	2,92	2,83	2,77	2,71	2,67	2,63	2,60	2,58	2,55	2,53	2,51	2,50	2,48	2,47
	14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,76	2,70	2,65	2,60	2,57	2,53	2,51	2,48	2,46	2,44	2,43	2,41	2,40
	15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,71	2,64	2,59	2,54	2,51	2,48	2,45	2,42	2,40	2,38	2,37	2,35	2,34
	16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49	2,46	2,42	2,40	2,37	2,35	2,33	2,32	2,30	2,29
	17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,61	2,55	2,49	2,45	2,41	2,38	2,35	2,33	2,31	2,29	2,27	2,26	2,24
	18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,58	2,51	2,46	2,41	2,37	2,34	2,31	2,29	2,27	2,25	2,23	2,22	2,20
	19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,54	2,48	2,42	2,38	2,34	2,31	2,28	2,26	2,23	2,21	2,20	2,18	2,17
	20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,51	2,45	2,39	2,35	2,31	2,28	2,25	2,22	2,20	2,18	2,17	2,15	2,14
	21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,49	2,42	2,37	2,32	2,28	2,25	2,22	2,20	2,18	2,16	2,14	2,12	2,11
	22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,46	2,40	2,34	2,30	2,26	2,23	2,20	2,17	2,15	2,13	2,11	2,10	2,08
	23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,44	2,37	2,32	2,27	2,24	2,20	2,18	2,15	2,13	2,11	2,09	2,08	2,06
	24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,42	2,36	2,30	2,25	2,22	2,18	2,15	2,13	2,11	2,09	2,07	2,05	2,04
	25	4,24	3,39	2,99	2,76	2,60	2,49	2,40	2,34	2,28	2,24	2,20	2,16	2,14	2,11	2,09	2,07	2,05	2,04	2,02

(Уровень значимости 0,01)

число степеней свободы большей дисперсии																					
число степеней свободы большей дисперсии		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
	1	4052	4999	5403	5624	5763	5858	5928	5981	6022	6055	6083	6106	6125	6142	6157	6170	6181	6191	6200	6208
	2	98,50	99,00	99,17	99,25	99,30	99,33	99,36	99,37	99,39	99,40	99,41	99,42	99,42	99,43	99,43	99,44	99,44	99,44	99,45	99,45
	3	34,12	30,82	29,46	28,71	28,24	27,91	27,67	27,49	27,35	27,23	27,13	27,05	26,98	26,92	26,87	26,83	26,79	26,75	26,72	26,69
	4	21,20	18,00	16,69	15,98	15,52	15,21	14,98	14,80	14,66	14,55	14,45	14,37	14,31	14,25	14,20	14,15	14,11	14,08	14,05	14,02
	5	16,26	13,27	12,06	11,39	10,97	10,67	10,46	10,29	10,16	10,05	9,96	9,89	9,82	9,77	9,72	9,68	9,64	9,61	9,58	9,55
	6	13,75	10,92	9,78	9,15	8,75	8,47	8,26	8,10	7,98	7,87	7,79	7,72	7,66	7,60	7,56	7,52	7,48	7,45	7,42	7,40
	7	12,25	9,55	8,45	7,85	7,46	7,19	6,99	6,84	6,72	6,62	6,54	6,47	6,41	6,36	6,31	6,28	6,24	6,21	6,18	6,16
	8	11,26	8,65	7,59	7,01	6,63	6,37	6,18	6,03	5,91	5,81	5,73	5,67	5,61	5,56	5,52	5,48	5,44	5,41	5,38	5,36
	9	10,56	8,02	6,99	6,42	6,06	5,80	5,61	5,47	5,35	5,26	5,18	5,11	5,05	5,01	4,96	4,92	4,89	4,86	4,83	4,81
	10	10,04	7,56	6,55	5,99	5,64	5,39	5,20	5,06	4,94	4,85	4,77	4,71	4,65	4,60	4,56	4,52	4,49	4,46	4,43	4,41
	11	9,65	7,21	6,22	5,67	5,32	5,07	4,89	4,74	4,63	4,54	4,46	4,40	4,34	4,29	4,25	4,21	4,18	4,15	4,12	4,10
	12	9,33	6,93	5,95	5,41	5,06	4,82	4,64	4,50	4,39	4,30	4,22	4,16	4,10	4,05	4,01	3,97	3,94	3,91	3,88	3,86
	13	9,07	6,70	5,74	5,21	4,86	4,62	4,44	4,30	4,19	4,10	4,02	3,96	3,91	3,86	3,82	3,78	3,75	3,72	3,69	3,66
	14	8,86	6,51	5,56	5,04	4,69	4,46	4,28	4,14	4,03	3,94	3,86	3,80	3,75	3,70	3,66	3,62	3,59	3,56	3,53	3,51
	15	8,68	6,36	5,42	4,89	4,56	4,32	4,14	4,00	3,89	3,80	3,73	3,67	3,61	3,56	3,52	3,49	3,45	3,42	3,40	3,37
	16	8,53	6,23	5,29	4,77	4,44	4,20	4,03	3,89	3,78	3,69	3,62	3,55	3,50	3,45	3,41	3,37	3,34	3,31	3,28	3,26
	17	8,40	6,11	5,18	4,67	4,34	4,10	3,93	3,79	3,68	3,59	3,52	3,46	3,40	3,35	3,31	3,27	3,24	3,21	3,19	3,16
	18	8,29	6,01	5,09	4,58	4,25	4,01	3,84	3,71	3,60	3,51	3,43	3,37	3,32	3,27	3,23	3,19	3,16	3,13	3,10	3,08
	19	8,18	5,93	5,01	4,50	4,17	3,94	3,77	3,63	3,52	3,43	3,36	3,30	3,24	3,19	3,15	3,12	3,08	3,05	3,03	3,00
	20	8,10	5,85	4,94	4,43	4,10	3,87	3,70	3,56	3,46	3,37	3,29	3,23	3,18	3,13	3,09	3,05	3,02	2,99	2,96	2,94
	21	8,02	5,78	4,87	4,37	4,04	3,81	3,64	3,51	3,40	3,31	3,24	3,17	3,12	3,07	3,03	2,99	2,96	2,93	2,90	2,88
	22	7,95	5,72	4,82	4,31	3,99	3,76	3,59	3,45	3,35	3,26	3,18	3,12	3,07	3,02	2,98	2,94	2,91	2,88	2,85	2,83
	23	7,88	5,66	4,76	4,26	3,94	3,71	3,54	3,41	3,30	3,21	3,14	3,07	3,02	2,97	2,93	2,89	2,86	2,83	2,80	2,78
	24	7,82	5,61	4,72	4,22	3,90	3,67	3,50	3,36	3,26	3,17	3,09	3,03	2,98	2,93	2,89	2,85	2,82	2,79	2,76	2,74
	25	7,77	5,57	4,68	4,18	3,85	3,63	3,46	3,32	3,22	3,13	3,06	2,99	2,94	2,89	2,85	2,81	2,78	2,75	2,72	2,70