

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №8

по курсу «Методы оптимизации»

Некоторые экстремальные прямые и точки

Студентка: Зина Асушникова
Группа 1мБД12

Преподаватель: Привалов А.А

Зачтена с оценкой хорошо (4)

*Нет сравнения экстремумов на экстремальных прямых и точках
и нет сравнений с пакетом прикладных программ*

Вариант 65

Постановка задачи

На карте обозначены 32 пункта с координатами (x_i, y_i) и грузооборотами m_i , $i=0, 1, \dots, 32$.

№	x_i	y_i	m_i
0	22	35	120
1	33	29	90
2	43	41	60
3	52	39	240
4	30	40	60
5	65	68	240
6	71	55	220
7	24	60	200
8	47	59	140
9	87	67	250
10	39	21	50
11	27	11	270
12	32	63	12
13	90	59	240
14	36	11	40
15	70	38	30
16	78	38	300
17	68	44	80
18	75	12	150
19	49	31	170
20	60	33	40
21	50	19	150
22	9	46	230
23	90	20	30
24	20	68	140
25	32	50	130
26	52	11	130
27	60	41	170
28	68	32	30
29	41	64	190
30	45	10	250
31	20	18	170

Требуется найти и построить три оптимальные прямые l_1, l_2, l_m по следующим трем критериям:

$$\sum_{i=1}^n m_i \rho(A_i, l_1) \leq \sum_{i=1}^n m_i \rho(A_i, l), \quad \forall l; \quad (1)$$

$$\max_{1 \leq i \leq n} (m_i \rho(A_i, l_\infty)) \leq \max_{1 \leq i \leq n} (m_i \rho(A_i, l)), \quad \forall l, \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^n m_i \rho^2(A_i, l_2) \leq \sum_{i=1}^n m_i \rho^2(A_i, l), \quad \forall l \quad (3)$$

и найти и построить четыре точки Q, P, R и C по следующим трем критериям:

$$\sum_{i=1}^n m_i |A_i - Q| \leq \sum_{i=1}^n m_i |A_i - T|, \quad \forall T; \quad (4)$$

$$\sum_{i=1}^n m_i d(A_i, P) \leq \sum_{i=1}^n m_i d(A_i, T), \quad \forall T \quad (5)$$

$$\max_{1 \leq i \leq n} m_i |A_i - R| \leq \max_{1 \leq i \leq n} m_i |A_i - T|, \quad \forall T \quad (6)$$

$$\sum_{i=1}^n m_i |A_i - C|^2 \leq \sum_{i=1}^n m_i |A_i - T|^2, \quad \forall T; \quad (7)$$

где $\rho(A, l)$ – расстояние от точки A до прямой l , $|A - C|$ – евклидово расстояние между точками A и C , а $d(A, B) = |x_A - x_B| + |y_A - y_B|$ – *линейное расстояние* между точками A и B .

Решение. Будем пользоваться программой «Lab8.html», которая моделирует варианты заданий и подтверждает верные решения соответствующей картинкой.

Решение задачи (1) будем искать с помощью следующей теоремы 1.

Теорема 1. Среди любых n ($n > 1$) материальных точек плоскости $m_1 A_1, m_2 A_2, \dots, m_n A_n$ с положительными массами найдутся две, через которые проходит прямая, удовлетворяющая (1).

Перебираем все пары точек, составляем код программы:

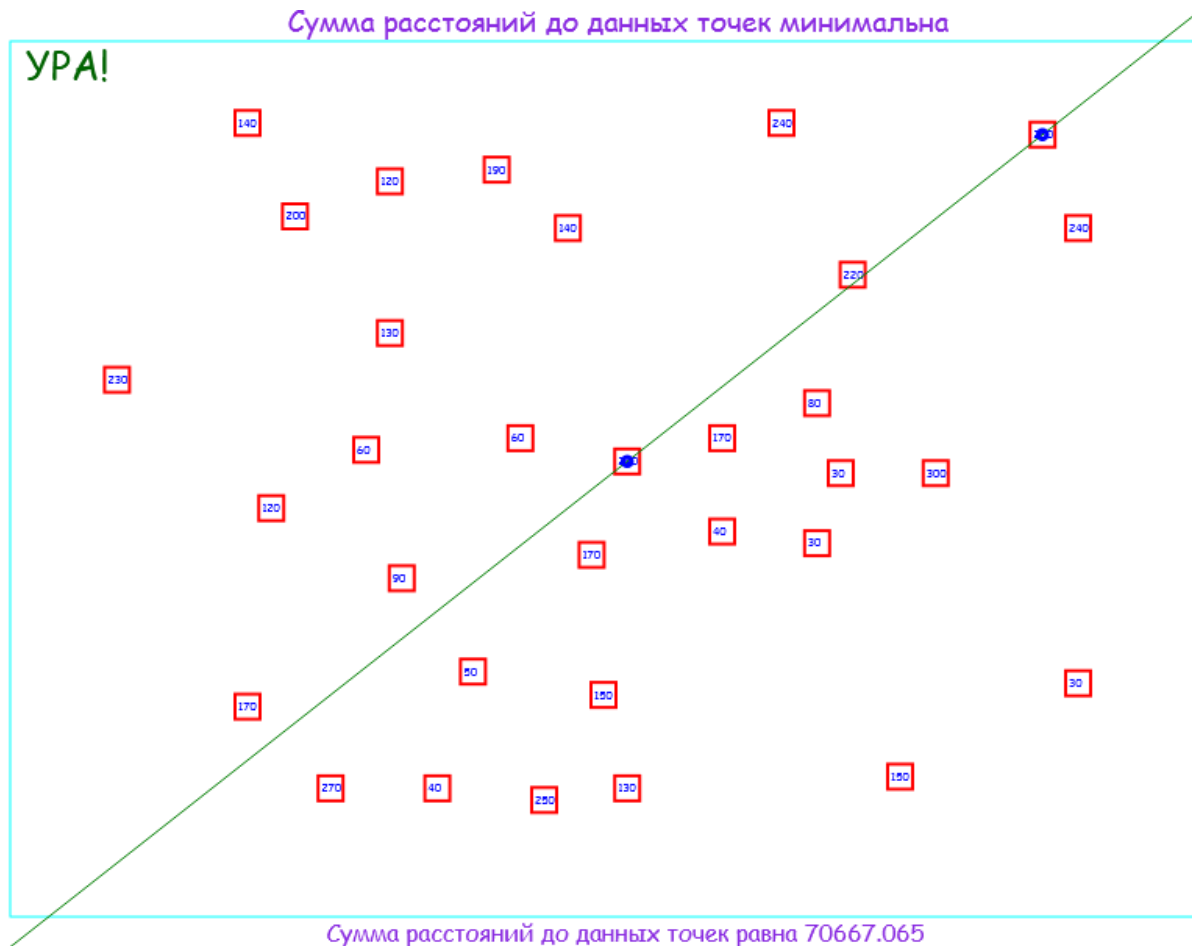
```
s=100*n*(r+1);
for(i=0;i<n;i++)for(j=i+1;j<n;j++){z=ro1(x[i]+'+y[i],x[j]+'+y[j]);if(z<s){s=z;i0=i;j0=j}}
x[i0]+'+y[i0]+'n'+x[j0]+'+y[j0]+'ni='+i0+', j='+j0
```

и на выходе получаем координаты двух точек прямой l_1 : (52,39) и (87,67).

Уравнение прямой l_1 : $4x - 5y = 13$ или $y = \frac{4}{5}x - \frac{13}{5}$. А минимальная сумма

взвешенных расстояний $\sum_{i=1}^n m_i \rho(A_i, l_1) = 70667.0655$.

Правильность решения задачи (1) подтверждаем картинкой:



Решение задачи (2) будем искать с помощью следующей теоремы.

Теорема 2. Среди любых n ($n > 1$) материальных точек плоскости $m_1A_1, m_2A_2, \dots, m_nA_n$ с положительными массами найдутся такие три, что взвешенная средняя линия треугольника с вершинами в этих точках, будет принадлежать прямой l_∞ , удовлетворяющей (3). При этом вершины упомянутого треугольника лежат попеременно над и под этой прямой.

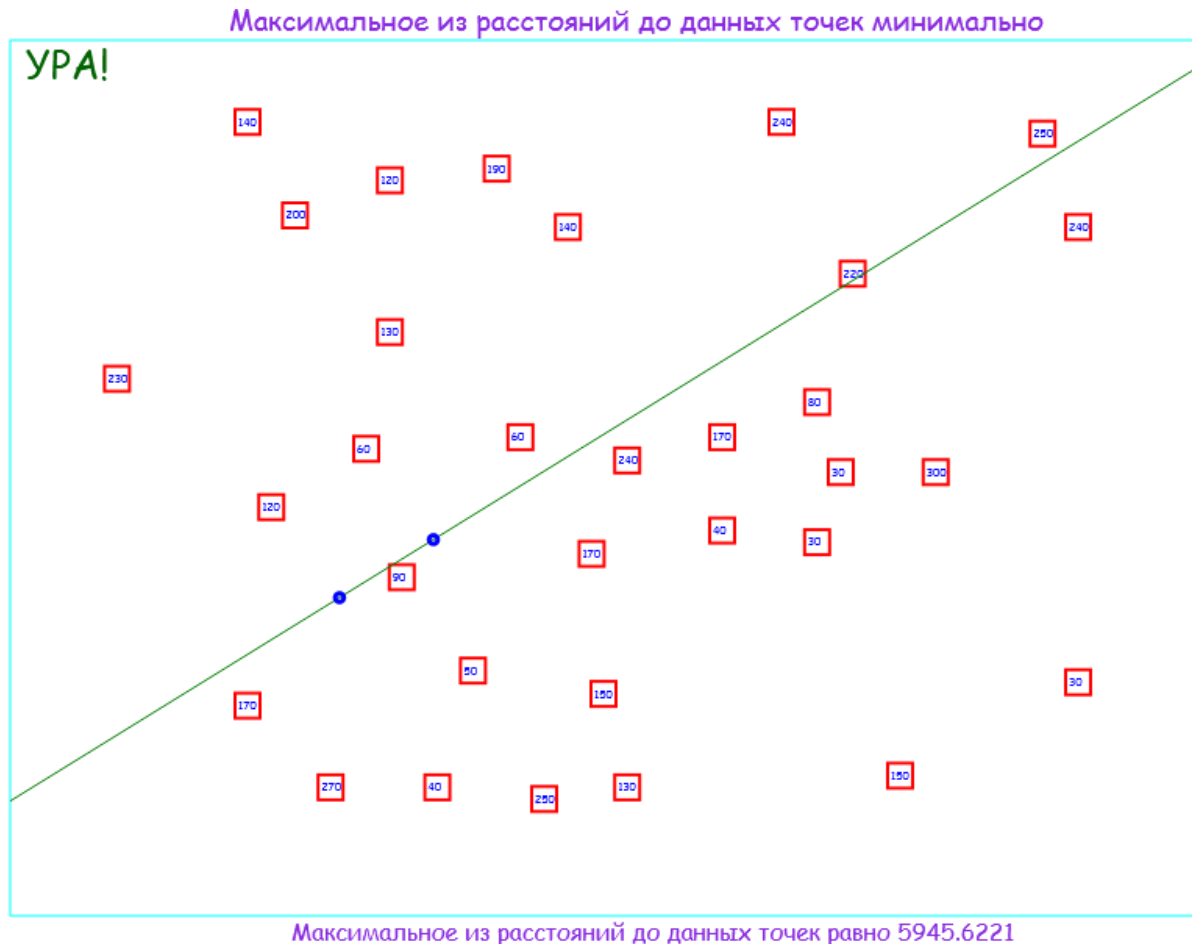
Перебираем все тройки точек, составляем код программы:

```
s=100*(r+r1);z4="
for(i=0;i<n;i++)for(j=i+1;j<n;j++)for(q=j+1;q<n;q++){
z1=(u[i]*x[i]+u[j]*x[j])/(u[i]+u[j])+','+(u[i]*y[i]+u[j]*y[j])/(u[i]+u[j]);
z2=(u[i]*x[i]+u[q]*x[q])/(u[i]+u[q])+','+(u[i]*y[i]+u[q]*y[q])/(u[i]+u[q]);
z3=(u[j]*x[j]+u[q]*x[q])/(u[j]+u[q])+','+(u[j]*y[j]+u[q]*y[q])/(u[j]+u[q]);
z=rom(z1,z2);if(z<s){s=z;p0=z1;p1=z2;z4=i+','+j+','+q}
z=rom(z1,z3);if(z<s){s=z;p0=z1;p1=z3;z4=i+','+i+','+q}
z=rom(z2,z3);if(z<s){s=z;p0=z2;p1=z3;z4=q+','+i+','+j}}
p0+"\n"+p1+"\n",j,q=''+z4
```

и на выходе получаем координаты двух точек прямой l_2 : (35.6667,32.2222) и (27.75,27.25). Уравнение прямой $l_2: y = \frac{179}{285}x + \frac{933}{95}$, а минимальное из

максимальных взвешенных расстояний $\max_{1 \leq i \leq n} (m_i \rho(A_i, l_\infty)) = 5945.6222$. Прямая l_2 является продолжением взвешенной средней MN треугольника с вершиной A_{30} и основанием $A_7 A_{22}$, т.е. $\frac{A_{30}M}{A_7M} = \frac{m_7}{m_{30}} = \frac{200}{250}$ и $\frac{A_{30}N}{A_7N} = \frac{m_{22}}{m_{30}} = \frac{230}{250}$.

Правильность решения задачи (2) подтверждаем картинкой:



Решением задачи (3) является одна из осей Штейнера. Найдем ее с помощью следующего кода:

```
s=0;for(i=0;i<n;i++)s+=u[i];xc=0;yc=0;
for(i=0;i<n;i++){xc+=u[i]*x[i];yc+=u[i]*y[i]}xc/=s;yc/=s;
s=0;s1=0;for(i=0;i<n;i++){x1=x[i]-xc;y1=y[i]-yc;s+=u[i]*(x1*x1-y1*y1);
s1+=u[i]*x1*y1}al=atan(2*s1/s)/2
al1=al+PI/2;al=cos(al)+' '+sin(al);al1=cos(al1)+' '+sin(al1);
if(ro(al)>ro(al1))al=al1;al=al.split(',');
al[0]+' '+al[1]+'\\n'+xc+' '+yc+'\\n'+acos(al[0])
```

на выходе получаем $al[0]=\sin\alpha$, $al[1]=-\cos\alpha$ в уравнении прямой:

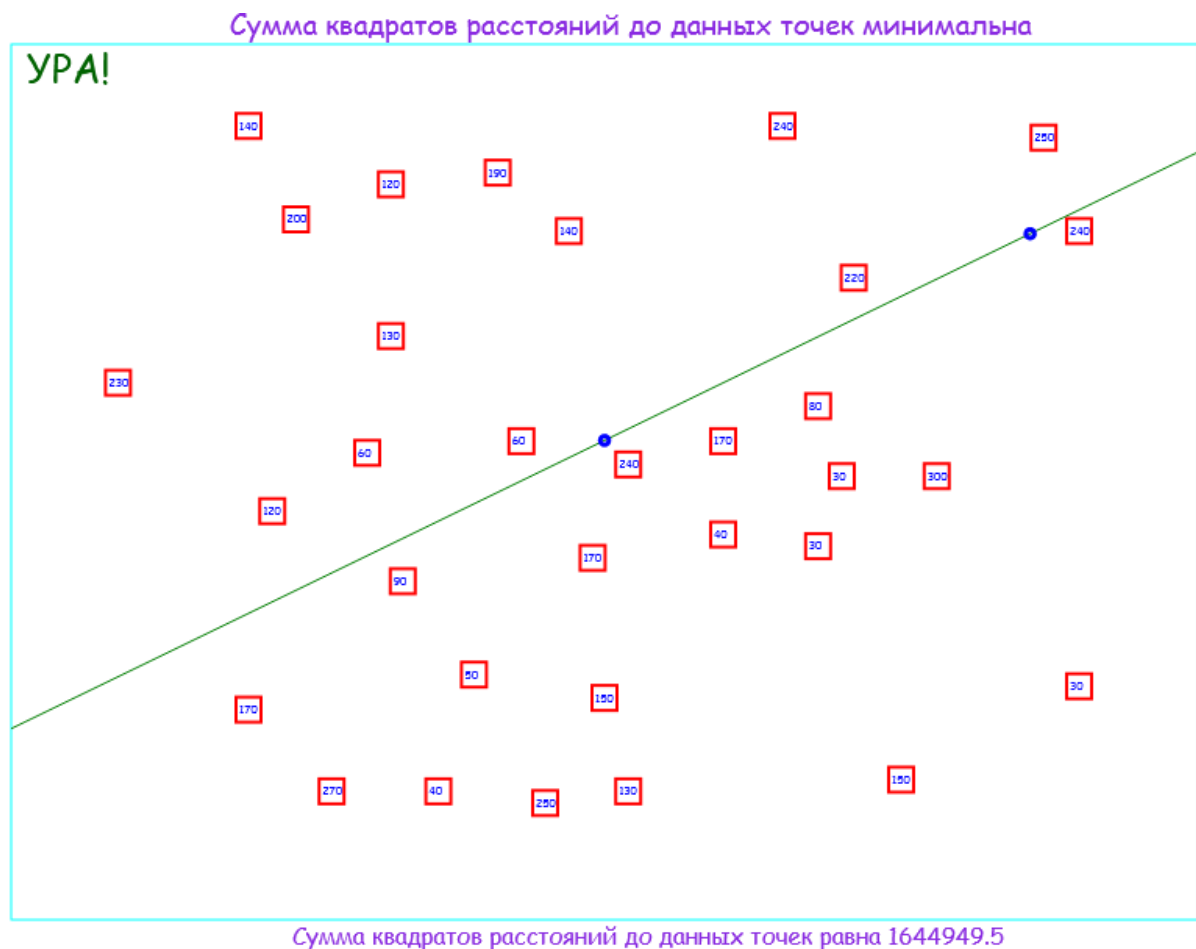
$$(y - y_c)\cos\alpha - (x - x_c)\sin\alpha = 0,$$

где $x_c = \frac{1}{32} \sum_{i=0}^{31} m_i x_i \approx 50$ и $y_c = \frac{1}{32} \sum_{i=0}^{31} m_i y_i \approx 41$ – координаты центра масс системы точек $m_0 A_0, m_1 A_1, \dots, m_{31} A_{31}$. Искомая прямая проходит через точки (50,41.06) и (0,16.37). Уравнение прямой l_1 :

$$y = 0.494x + 16.37$$

А минимальная сумма квадратов взвешенных расстояний $\sum_{i=1}^n m_i \rho^2(A_i, l_1) = 1644949.54076$.

Правильность решения задачи (3) подтверждаем картинкой:



Решение задачи (4) найдем с помощью следующего рекуррентного алгоритма:

$$T_i = F(T_{i-1}), i=1, 2, \dots$$

где вектор-функция $F(T)$ определяется следующим образом:

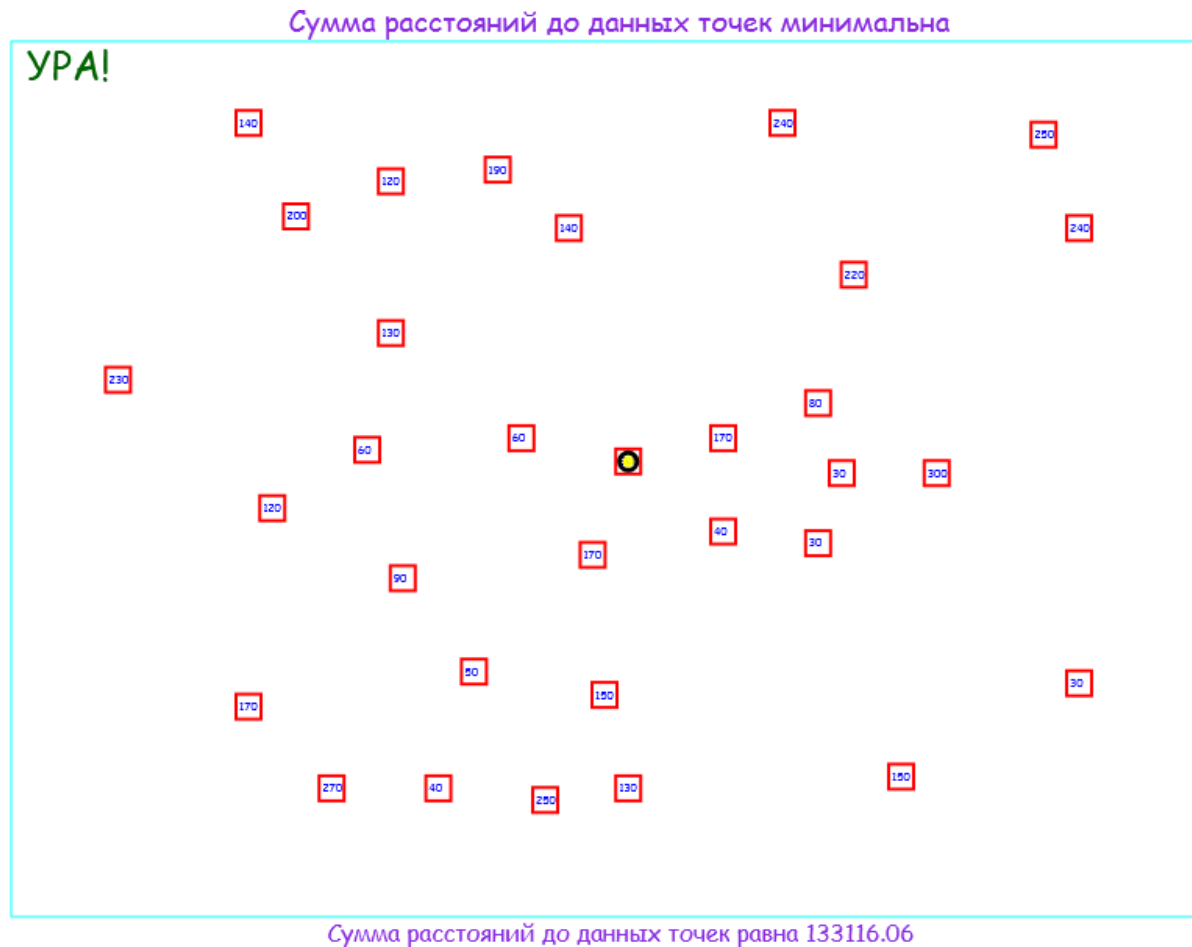
$$F(T) = \begin{cases} \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{m_i}{|A_i T|}} \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{|A_i T|} \overrightarrow{OA_i}, & \text{если } T \notin \{A_1, A_2, \dots, A_n\} \\ \frac{1}{\sum_{i \neq j} \frac{m_i}{|A_i T|}} \sum_{i \neq j} \frac{m_i}{|A_i T|} \overrightarrow{OA_i}, & \text{если } T = A_j \end{cases}$$

где точку $T_0(x_0, y_0)$ можно брать любой. Последовательность $\{T_i\}$ сходится к решению задачи (4). Составляем следующий код:

```
function F(a){a=a.split(',');var s=0;var s1=0;var s2=0;
for(i=0;i<n;i++){z=sqrt((a[0]-x[i])**2+(a[1]-y[i])**2);
if(z!=0){s+=u[i]*x[i]/z;s1+=u[i]*y[i]/z;s2+=u[i]/z;}}
return s/s2+', 's1/s2}
z2=x[9]+' '+y[9];sh=0;z=1
while(z>.00001){z3=F(z2);
z=sqrt((z2.split(',')[0]-z3.split(',')[0])**2+(z2.split(',')[1]-z3.split(',')[1])**2);z2=z3;sh++;}
z2+'\nsh='+sh
```

и приходим к точке $Q(52, 39)$ от которой сумма взвешенных расстояний до остальных точек минимальна и равна $\sum_{i=1}^n m_i |A_i - Q| = 133116.06$.

Правильность решения задачи (4) подтверждаем картинкой:



Заметим, что точку Q – решение задачи (4), как и точки P , R и C можно найти с помощью пакета MathCad, пользуясь опцией Minimize.

Решение задачи (5) будем искать следующим образом. Сначала сортируем материальные точки $m_1A_1, m_2A_2, \dots, m_nA_n$ в порядке возрастания абсцисс точек A_i и методом половинного деления или перебором определяем номер j , где разность сумм масс $\sum_{i:x>x_j} m_i - \sum_{i:x<x_j} m_i$ меняет знак. Это и будет

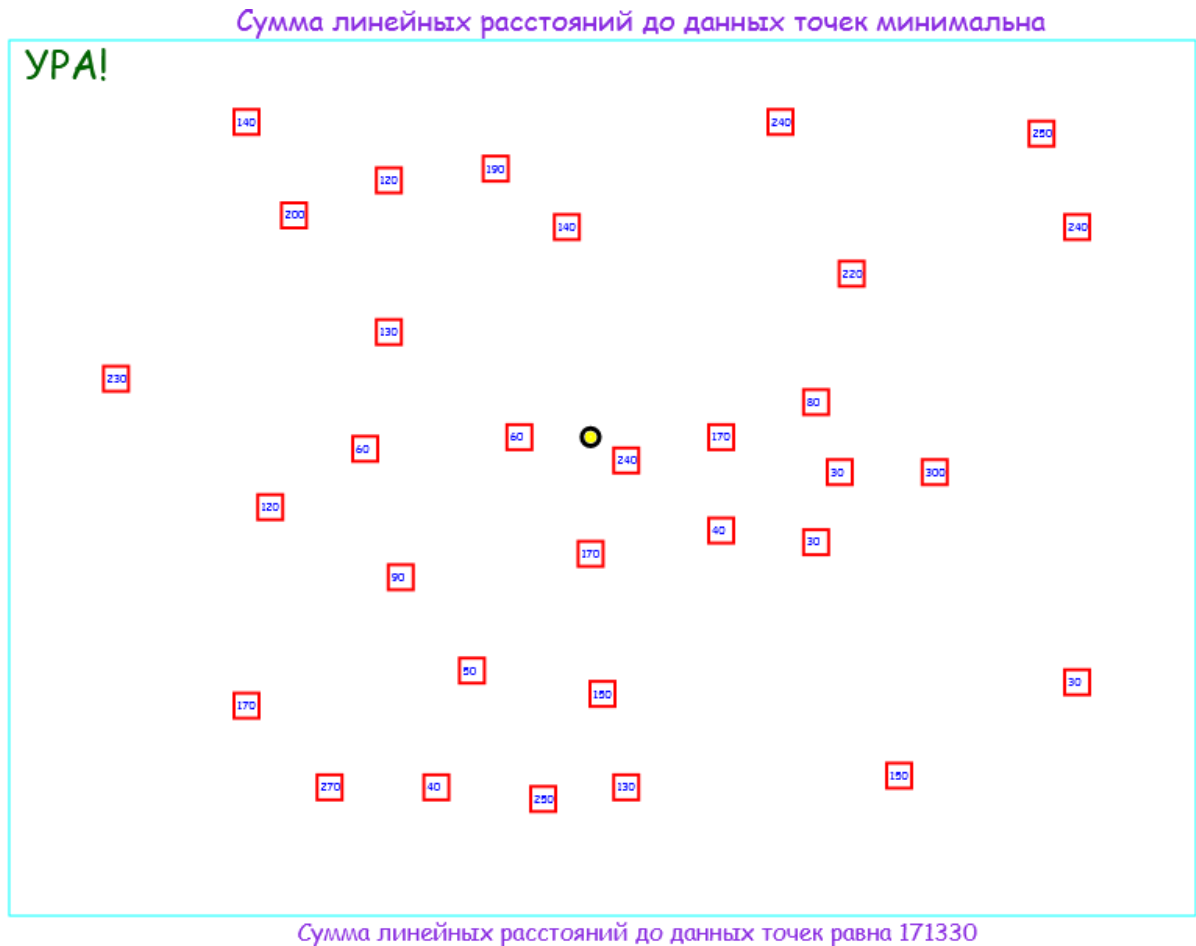
абсциссой искомой точки P . Затем сортируем точки $m_1A_1, m_2A_2, \dots, m_nA_n$ в порядке возрастания их ординат и аналогично находим ординату точки P .

При этом, если сумма масс $\sum_{i=0}^{31} m_i$ разбивается на две равные подсуммы, то точки, удовлетворяющие (5), заполняют прямоугольник $[x_p, x_j] \times [y_p, y_j]$, где A_j – один из ближайших соседей точки P .

```
function sur(a){var b=1;for(var i=0;i<n;i++){l[i]=i;
while(b){b=0;for(i=1;i<n;i++){if(a[l[i]]<a[l[i-1]]){b=l[i];l[i]=l[i-1];l[i-1]=b;b=1}}return l}
var l=new Array();s0=0;for(i=0;i<n;i++)s0+=u[i];
sur(x);s=u[l[0]];for(i=1;i<n;i++){if(2*s>s0)break;else s+=u[l[i]];i0=i;x1=x[l[i0-1]];
sur(y);s=u[l[0]];for(i=1;i<n;i++){if(2*s>s0)break;else s+=u[l[i]];j0=i;y1=y[l[j0-1]]; x1+','+y1+'\ns='+rotl(x1+','+y1)
```

Итак, решением задачи (5) является точка $P(49,41)$ и минимальная сумма линейных взвешенных расстояний равна $\sum_{i=1}^n m_i d(A_i, P) = 171330$.

Правильность решения задачи (5) подтверждаем картинкой:



Найти точное решение задачи (6) поможет теорема 3.

Теорема 3. Среди любых n ($n > 1$) материальных точек плоскости $m_1 A_1, m_2 A_2, \dots, m_n A_n$ с положительными массами найдутся две ($m_1 A_1$ и $m_2 A_2$) или три ($m_1 A_1, m_2 A_2$ и $m_3 A_3$) такие точки, что

$$r = \min_T \max_{1 \leq i \leq n} m_i |A_i T| = \max_{1 \leq i \leq n} m_i |A_i R| = m_1 |A_1 R| = m_2 |A_2 R|$$

или

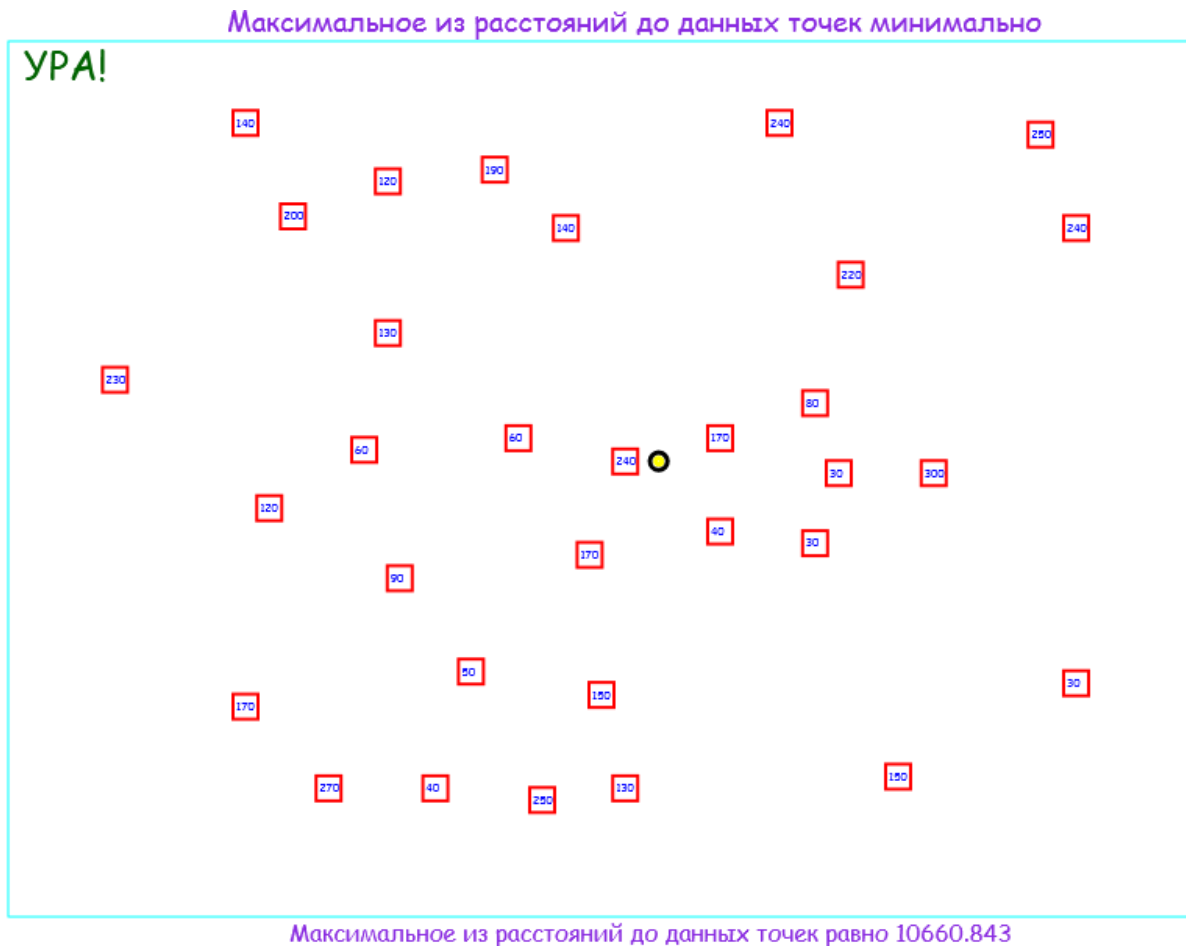
$$r = \min_T \max_{1 \leq i \leq n} m_i |A_i T| = \max_{1 \leq i \leq n} m_i |A_i R| = m_1 |A_1 R| = m_2 |A_2 R| = m_3 |A_3 R|$$

где R – решение задачи (6).

Но в виду громоздкости кода, воспользуемся опцией Minimize в пакете MathCad и с заданной точностью придем к точке $R(54.8224, 39.01677)$ и

минимальным из максимальных взвешенных расстояний от точки R до остальных
 $\max_{1 \leq i \leq n} m_i |A_i - R| \approx 10660.8431$.

Правильность решения задачи (6) подтверждаем картинкой:

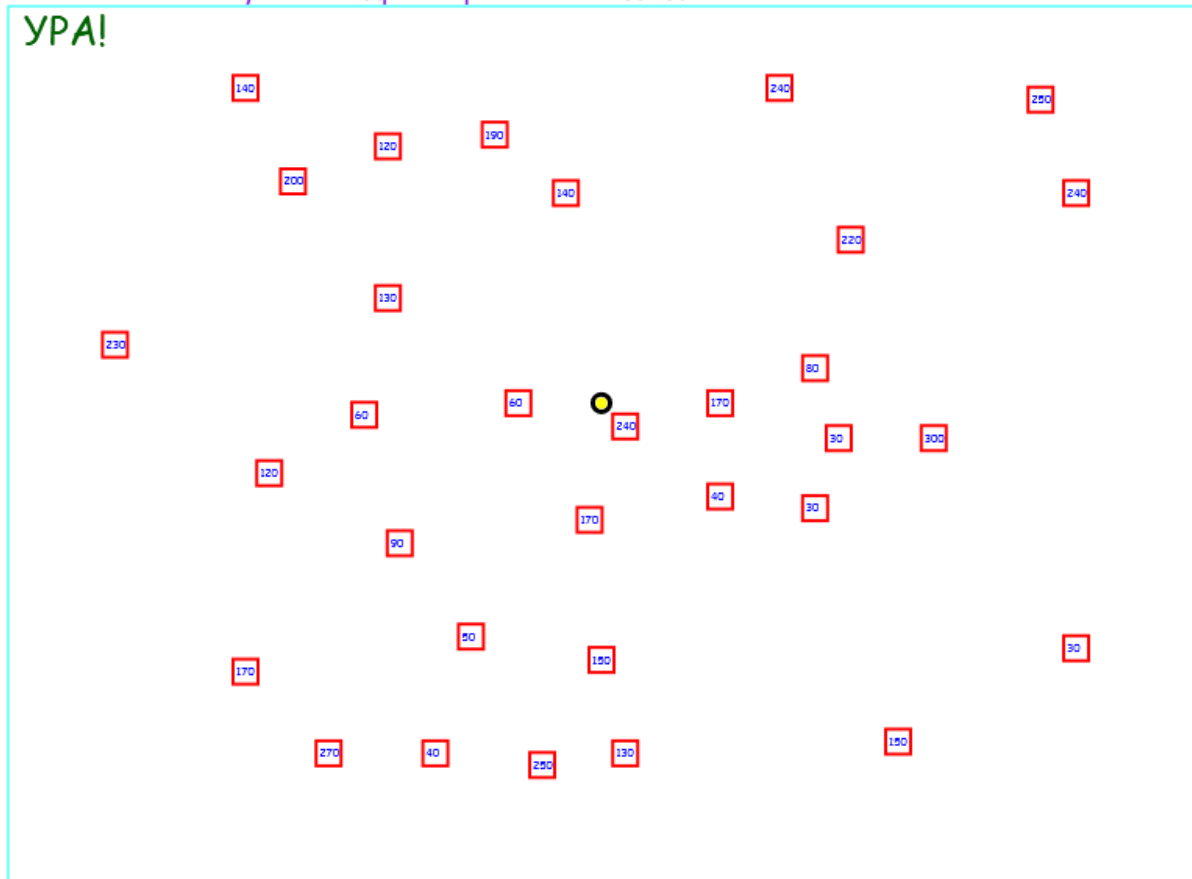


Решением задачи (7) очевидно является центр масс системы материальных точек, найденный ранее. т.е. точка $C(50,41)$. Минимальная сумма квадратов расстояний от точки C до остальных $\sum_{i=1}^n m_i |A_i - C|^2 \approx 4394460$.

Правильность решения задачи (7) подтверждаем картинкой:

Сумма квадратов расстояний до данных точек минимальна

УРА!



Сумма квадратов расстояний до данных точек равна 4394460

Выводы. Для задач (1)-(4) и (5)-(7) удастся найти точные решения, а для задачи (4) точного решения найти пока не удалось, но существуют достаточно эффективные простые алгоритмы для ее аппроксимации.

Решением задачи 1. $F_1(l) = \sum_{i=1}^n m_i \rho(A_i, l) \rightarrow \min_l$ является прямая

$l_1: y = \frac{4}{5}x - \frac{13}{5}$ и $F_1(l_1) = 70667.0655$. Прямая проходит через точки A_3 и A_9 .

Решением задачи 2. $F_2(l) = \max_{1 \leq i \leq n} (m_i \rho(A_i, l))$ является прямая

$l_2: y = \frac{179}{285}x + \frac{933}{95}$ и $F_2(l_2) = 5945.6221$. Прямая проходит через точки

$M\left(\frac{107}{3}, \frac{290}{9}\right)$ и $N\left(\frac{111}{4}, \frac{109}{4}\right)$: $\frac{A_{30}M}{A_7M} = \frac{m_7}{m_{30}} = \frac{200}{250}$ и $\frac{A_{30}N}{A_7N} = \frac{m_{22}}{m_{30}} = \frac{230}{250}$.

Решением задачи 3. $F_3(l) = \sum_{i=1}^n m_i \rho^2(A_i, l) \rightarrow \min_l$ является прямая

$l_3: y = 0.49376x + 16.37021$ и $F_3(l_3) = 164494.5$. Прямая проходит через точки $C(50, 41.06)$ и $D(0, 16.37)$.

Решением задачи 4. $Q_1(T) = \sum_{i=1}^n m_i |A_i - T| \rightarrow \min_T$ является точка

$T_1(52, 39)$ и $Q_1(T_1) = 133116.06$.

Решением задачи 5. $Q_2(T) = \sum_{i=1}^n m_i d(A_i, T) \rightarrow \min_T$ является точка $T_2(49,41)$ и $Q_2(T_2) = 171330$.

Решением задачи 6. $Q_3(T) = \max_{1 \leq i \leq n} m_i |A_i - T| \rightarrow \min_T$ является точка $T_3((54.82, 39.017))$ и $Q_3(T_3) = 10660.8431$.

Решением задачи 7. $Q_4(T) = \sum_{i=1}^n m_i |A_i - T|^2 \rightarrow \min_T$ является точка $T_4(50,41)$ и $Q_4(T_4) = 4394460$.

При работе пользовались функциями:

ro1(a,b) – находит $\sum_{i=1}^n m_i \rho(A_i, l)$, где l проходит через точки a и b ;

rom(a,b) – находит $\max_{1 \leq i \leq n} (m_i \rho(A_i, l))$, где l проходит через точки a и b ;

ro(a) – находит $\sum_{i=1}^n m_i \rho^2(A_i, l)$, где a – нормальный вектор l ,

проходящей через центр масс системы (x_c, y_c) ;

rot(a) – находит $\sum_{i=1}^n m_i |A_i - a|$;

rotl(a) – находит $\sum_{i=1}^n m_i d(A_i, a)$;

rotm(a) – находит $\max_{1 \leq i \leq n} m_i |A_i - a|$;

rot2(a) – находит $\sum_{i=1}^n m_i |A_i - T|^2$.

dr(x) – аппроксимирует число x обыкновенной дробью с точностью $\varepsilon = 10^{-12}$.

А также $u[0...31]$ – массив масс m_i , $x[0...31]$ и $y[0...31]$ – массивы абсцисс и ординат точек $A_1, \dots, A_{32}$.