

Лабораторная работа № 6

«Некоторые экстремальные кривые и точки»

1. Определения и обозначения.

Грузооборот [1] это экономический показатель работы транспорта, равный произведению веса перевозимого за определенное время груза на расстояние перевозки. Грузооборот измеряется в тонно-километрах.

Материальной точкой называется пара (m, A) , где m – число, а A – точка пространства. Для удобства, материальные точки обозначают mA . Известно [2], что для системы материальных точек $\sigma = \{m_1A_1, m_2A_2, \dots, m_nA_n\}$ с суммарной ненулевой массой: $m = \sum_{i=1}^n m_i \neq 0$, существует единственная точка M , называемая *центром масс системы σ* или ее *барицентром*, т.е. такая, что

$$\sum_{i=1}^n m_i \overrightarrow{MA_i} = \vec{0} \quad (1)$$

Лабораторная работа состоит из 2-х заданий + обязательное условие.

Задание 1 лабораторной работы. Для данной системы материальных точек $\{m_1A_1, m_2A_2, \dots, m_nA_n\}$ найти и построить три оптимальные прямые l_1, l_2, l_m по следующим трем критериям:

$$\sum_{i=1}^n m_i \rho(A_i, l_1) \leq \sum_{i=1}^n m_i \rho(A_i, l), \quad \forall l; \quad (2)$$

$$\max_{1 \leq i \leq n} (m_i \rho(A_i, l_\infty)) \leq \max_{1 \leq i \leq n} (m_i \rho(A_i, l)), \quad \forall l, \quad (3)$$

$$\sum_{i=1}^n m_i \rho^2(A_i, l_2) \leq \sum_{i=1}^n m_i \rho^2(A_i, l), \quad \forall l \quad (4)$$

где $\rho(A, l)$ – расстояние от точки A до прямой l .

Задание 2 лабораторной работы. Для данной системы материальных точек $\{m_1A_1, m_2A_2, \dots, m_nA_n\}$ найти и построить три точки Q, P, R и C по следующим трем критериям:

$$\sum_{i=1}^n m_i |A_i - Q| \leq \sum_{i=1}^n m_i |A_i - T|, \quad \forall T; \quad (5)$$

$$\sum_{i=1}^n m_i d(A_i, P) \leq \sum_{i=1}^n m_i d(A_i, T), \quad \forall T \quad (6)$$

$$\max_{1 \leq i \leq n} m_i |A_i - R| \leq \max_{1 \leq i \leq n} m_i |A_i - T|, \quad \forall T \quad (7)$$

$$\sum_{i=1}^n m_i |A_i - C|^2 \leq \sum_{i=1}^n m_i |A_i - T|^2, \quad \forall T; \quad (8)$$

где $|A - C| = \sqrt{(x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2}$ – евклидово расстояние между точками A и C , а $d(A, B) = |x_A - x_B| + |y_A - y_B|$ – линейное расстояние [3, с. 153] (линейные расстояния обычно применяются при монтаже печатных схем, в математике оно известно как метрика пространства l_1).

Отметим, что задачи (5)-(7) определены и рассмотрены в [3, с. 231] как минисуммная и минимаксная задачи размещения:

Минисуммная задача размещения. Дана сеть с обслуживаемыми объектами. Разместить пункт регулярного обслуживания так, чтобы сумма кратчайших расстояний от этого пункта до вершин графа была минимально возможной.

Минимаксная задача размещения. Дана сеть с обслуживаемыми объектами. Разместить пункт экстренного обслуживания так, чтобы расстояние до самого удаленного объекта было минимально возможным.

Задания лабораторной работы моделируются программой «Lab8.html» по заданному числу n и номеру варианта студента. Запустив эту программу и щелкнув на заголовок, студенты получают необходимую инструкцию. Фрагмент работы программы представлен на рисунке 1.

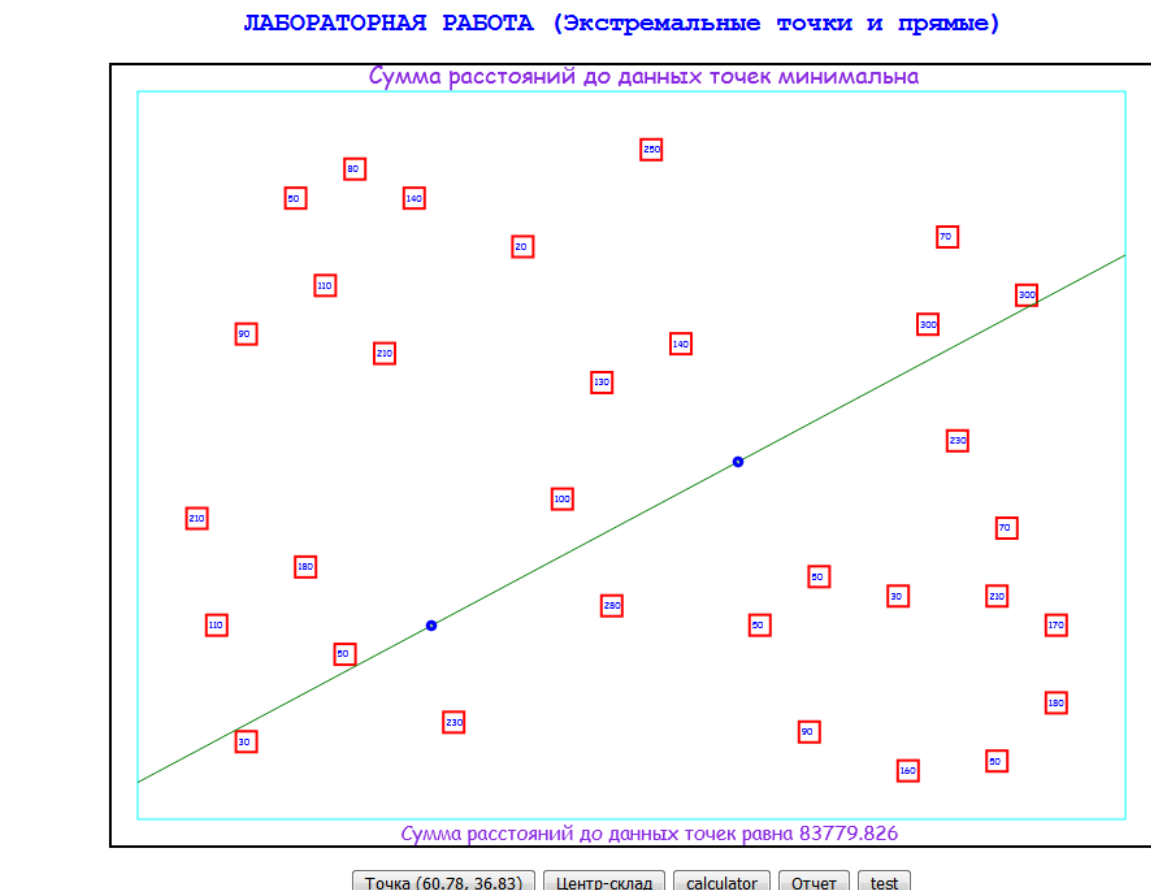


Рис.1

Для заданий 1 и 2 используется одна система материальных точек, изображенная на рис. 1. С помощью первой кнопки или мыши вводятся две точки, через которые проводится прямая, являющаяся решением задач (2)-(4). Выбор этих задач осуществляется щелчком мыши на заголовок задачи (вверху картинке). С помощью первой кнопки аналогично вводятся решения задач (5)-(8). Нижний текст картинке показывает найденные студентом значения критерия, щелкая мышью на этот текст можно посмотреть искомое значение критерия.

Задания (2)-(4), (6) и (8) имеют точные (теоретические) решения, а решения задач (5) и (7) находятся приближенно с помощью градиентного метода, «вручную» или методами изложенными ниже.

Для выполнения и защиты лабораторной работы студенты должны владеть необходимым теоретическим материалом. Этим материалом пользуются при оформлении отчета.

Обязательным условием успешной сдачи работ является сравнение решений точных решений и решений полученных с помощью какого-либо пакета прикладных программ как, например, MathCad.

Теоретическим материал для задач (2)-(8).

Так как суммы (2)-(8) непрерывно зависят от прямых l , то по теореме Вейерштрасса [4] прямые l_1 , l_∞ и l_2 существуют. Докажем следующие теоремы.

Теорема 1. Среди любых n ($n > 1$) материальных точек плоскости m_1A_1 , m_2A_2 , ..., m_nA_n с положительными массами найдутся две, через которые проходит прямая, удовлетворяющая (2).

Для системы трех материальных точек $\{m_A A, m_B B, m_C C\}$ назовем *взвешенной средней линией* треугольника ABC отрезок, соединяющий барицентры систем $\{m_A A, m_B B\}$ и $\{m_A A, m_C C\}$. Тогда справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. Среди любых n ($n > 1$) материальных точек плоскости m_1A_1 , m_2A_2 , ..., m_nA_n с положительными массами найдутся такие три, что взвешенная средняя линия треугольника с вершинами в этих точках, будет принадлежать прямой l_∞ , удовлетворяющей (3). При этом вершины упомянутого треугольника лежат попеременно над и под этой прямой.

Теорема 3. Для любых $A_1, \dots, A_n$, ($n > 2$) точек плоскости наилучшая в смысле квадратического приближения (т.е. удовлетворяющая (4)) прямая существует и единственная или таких прямых бесконечно много и все они проходят через центр масс этой системы точек.

Доказательство теоремы 1. Пусть точки $A_1, A_2, \dots, A_n$ лежат в плоскости Oxy , тогда если уравнение прямой l имеет вид:

$$y \cos \alpha - x \sin \alpha + c = 0,$$

где α – угол, образованный прямой с направлением оси абсцисс, то расстояние от точки $A(x_0, y_0)$ до прямой l выражается формулой:

$$\rho(A, l) = |y_0 \cos \alpha - x_0 \sin \alpha + c| \quad (9)$$

Рассмотрим функцию

$$S(\alpha, c) = \sum_{i=1}^n m_i |y_i \cos \alpha - x_i \sin \alpha + c|, \quad (10)$$

где (x_i, y_i) – координаты точек A_i , $i=1, \dots, n$. Тогда неравенство (2) примет вид

$$s_0 = S(\alpha_1, c_1) \leq S(\alpha, c), \quad \forall \alpha, c \quad (11)$$

где $y \cos \alpha_1 - x \sin \alpha_1 + c_1 = 0$ – уравнение прямой l_1 , удовлетворяющей (2). Докажем, что эта прямая будет содержать две точки из множества $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$.

Предположим противное. Пусть l_1 не содержит ни одной точки из $A_1, A_2, \dots, A_n$. Введем систему координат Oxy с осью абсцисс, совпадающей с прямой l_1 . Тогда все точки A_i , $i=1, \dots, n$, будут иметь ненулевые ординаты, поэтому найдутся прямые l , полученные поворотом l_1 вокруг начала координат на угол α , как по часовой стрелке, так и против часовой стрелки, такие, что точки A_i с положительными ординатами будут лежать над l , а с отрицательными – под l . Пусть l : $y \cos \alpha - x \sin \alpha = 0$ – одна из таких прямых. Тогда из (9) и (10) имеем

$$s_0 = \sum_{i=1}^n m_i |y_i| = \sum_{i: y_i > 0} m_i y_i - \sum_{i: y_i < 0} m_i y_i.$$

и

$$\begin{aligned} S(\alpha, 0) &= \cos \alpha \left(\sum_{i: y_i > 0} m_i y_i - \sum_{i: y_i < 0} m_i y_i \right) - \sin \alpha \left(\sum_{i: y_i > 0} m_i x_i - \sum_{i: y_i < 0} m_i x_i \right) = \\ &= s_0 \cos \alpha - \sin \alpha \left(\sum_{i: y_i > 0} m_i x_i - \sum_{i: y_i < 0} m_i x_i \right). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что найдется α такое, что $S(\alpha, 0) < s_0$. А это противоречит неравенству (11). Следовательно, среди $A_1, A_2, \dots, A_n$, найдется точка, лежащая на прямой l_1 .

Предположим теперь, что прямая l_1 проходит через точку A_1 и не содержит ни одной из точек множества $\{A_2, \dots, A_n\}$. Тогда введем систему координат началом в точке A_1 и с осью абсцисс, совпадающей с прямой l_1 и в этой системе координат все точки $A_2, \dots, A_n$ будут иметь ненулевые ординаты. Повторяя предыдущие рассуждения, аналогично докажем, что найдется прямая l , не удовлетворяющая (7). Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Пусть l_∞ – прямая, удовлетворяющая неравенству (3) и

$$s_0 = \max_{1 \leq i \leq n} (m_i \rho(A_i, l_\infty)) \leq \max_{1 \leq i \leq n} (m_i \rho(A_i, l)), \quad \forall l. \quad (12)$$

Для удобства изложения представим себе, что прямая l_∞ горизонтальная, т.е. является осью абсцисс, и пусть точка A_1 такая, что $s_0 = m_1 \rho(A_1, l)$. Тогда, если других таких точек не существует, т.е. $\rho(A_i, l) < s_0$, $i = 2, 3, \dots, n$, то небольшим параллельным сдвигом прямой l_∞ к точке A_1 получим прямую l , не удовлетворяющую (12). Значит, существует две точки, пусть A_1 и A_2 на которых достигается равенство: $s_0 = m_1 \rho(A_1, l) = m_2 \rho(A_2, l)$. Если при этом других таких точек не существует, то легко видеть, что при небольшом повороте прямой l_∞ вокруг барицентра системы $\{m_1 A_1, m_2 A_2\}$, величины $m_1 \rho(A_1, l)$ и $m_2 \rho(A_2, l)$ уменьшатся и эта прямая, так же не будет удовлетворять (12). Следовательно, найдутся три точки A_1, A_2 и A_3 такие, что

$$m_1 \rho(A_1, l) = m_2 \rho(A_2, l) = m_3 \rho(A_3, l) = s_0. \quad (13)$$

Предположим, что равенство (13) выполняется только для трех точек, т.е. $m_i \rho(A_i, l) < s_0$, $i=4, \dots, n$. Для определенности будем считать, что точка A_1 лежит левее точки A_2 , а точка A_2 – левее точки A_3 . Тогда, если точка A_1 лежит под прямой l_∞ , а точки A_2 и A_3 – над этой прямой то, как и выше, поворот прямой l_∞ вокруг барицентра системы $\{m_1 A_1, m_2 A_2\}$ уменьшит величины $m_1 \rho(A_1, l)$, $m_2 \rho(A_2, l)$ и $m_3 \rho(A_3, l)$. Поэтому, если точка A_1 лежит под прямой l_∞ , то точка A_2 должна лежать над прямой, а точка A_3 – под l_∞ .

Если равенство (13) выполняется более, чем для трех точек, то аналогичным образом, доказываем, что среди них можно выбрать три точки, которые расположены попеременно над и под прямой l_∞ и удовлетворяющие (13). Не сложно видеть, что эта прямая проходит через взвешенную среднюю линию треугольника с вершинами в этих точках. Теорема 2 доказана.

Замечание. Точки A_1, A_2 и A_3 , найденные при доказательстве теоремы 2, в теории приближений называются точками чебышёвского альтернанса [5]. Эти точки характеризуют полиномы наилучшего приближения.

Доказательство теоремы 3. Как и выше рассмотрим функцию

$$S_2(\alpha, c) = \sum_{i=1}^n m_i (y_i \cos \alpha - x_i \sin \alpha + c)^2 \quad (14)$$

где (x_i, y_i) – координаты точек A_i , $i=1, \dots, n$. Поскольку функция $S_2(\alpha, c)$ непрерывно дифференцируемая функция, то в точке минимума ее частные производные обращаются в ноль. Найдем производную по переменной c и приравняв ее к нулю, получим:

$$\frac{\partial S_2}{\partial c} = 2 \sum_{i=1}^n m_i (y_i \cos \alpha - x_i \sin \alpha + c) = 0 \Leftrightarrow c = -\frac{\cos \alpha}{n} \sum_{i=1}^n m_i y_i + \frac{\sin \alpha}{n} \sum_{i=1}^n m_i x_i$$

И уравнение прямой l_2 примет вид:

$$(y - y_c) \cos \alpha - (x - x_c) \sin \alpha = 0 \quad (15)$$

где $x_c = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n m_i x_i$ и $y_c = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n m_i y_i$ – координаты центра масс системы точек $m_1 A_1, m_2 A_2, \dots, m_n A_n$.

Без потери общности, можно считать, начало координат совпадает с этим барицентром системы точек $\{m_1 A_1, m_2 A_2, \dots, m_n A_n\}$, тогда $\sum_{i=1}^n m_i x_i = \sum_{i=1}^n m_i y_i = 0$. Кроме того, можно считать, что $\sum_{i=1}^n m_i x_i y_i = 0$. В самом деле, если $\sum_{i=1}^n m_i x_i y_i \neq 0$, то повернув нашу систему координат на угол β придем к следующей системе координат:

$$\begin{cases} x' = x \cos \beta - y \sin \beta \\ y' = x \sin \beta + y \cos \beta \end{cases}$$

и приравняв к нулю сумму $\sum_{i=1}^n m_i x'_i y'_i$ найдем угол β из тригонометрического уравнения:

$$0 = \sum_{i=1}^n m_i x'_i y'_i = (\cos^2 \beta - \sin^2 \beta) \sum_{i=1}^n m_i x_i y_i + \cos \beta \sin \beta \sum_{i=1}^n m_i (x_i^2 - y_i^2)$$

Пусть теперь система координат такова, что выполняются условия:

$$\sum_{i=1}^n m_i x_i = \sum_{i=1}^n m_i y_i = 0 \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^n m_i x_i y_i = 0 \quad (16)$$

и нашей задачей будет исследовать на экстремум функцию одной переменной $S_2(\alpha, 0)$.

Из равенств (16) имеем

$$S_2(\alpha, 0) = \sum_{i=1}^n m_i (y_i \cos \alpha - x_i \sin \alpha)^2 = \cos^2 \alpha \sum_{i=1}^n m_i y_i^2 + \sin^2 \alpha \sum_{i=1}^n m_i x_i^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^n m_i y_i^2 + \sin^2 \alpha \left(\sum_{i=1}^n m_i x_i^2 - \sum_{i=1}^n m_i y_i^2 \right) = \sum_{i=1}^n m_i x_i^2 + \cos^2 \alpha \left(\sum_{i=1}^n m_i y_i^2 - \sum_{i=1}^n m_i x_i^2 \right)$$

Поэтому $S_2(\alpha, 0)$ лежит между величинами $\sum_{i=1}^n m_i y_i^2$ и $\sum_{i=1}^n m_i x_i^2$. То есть искомой прямой будет ось Ox , если $\sum_{i=1}^n m_i x_i^2 > \sum_{i=1}^n m_i y_i^2$ или ось Oy , если $\sum_{i=1}^n m_i x_i^2 < \sum_{i=1}^n m_i y_i^2$. Если же $\sum_{i=1}^n m_i x_i^2 = \sum_{i=1}^n m_i y_i^2$, то решений будет бесконечно много, т.е. решением нашей задачи будет любая прямая (пучок прямых), проходящая через центр масс системы точек $A_1, A_2, \dots, A_n$ с единичными массами.

В механике эти найденные прямые ($x=0$ и $y=0$) называются главными осями инерции системы материальных точек $\{m_1 A_1, m_2 A_2, \dots, m_n A_n\}$.

С помощью теорем 1-3 находятся прямые l_1, l_2, l_m , удовлетворяющие (2)-(4). Для нахождения прямых l_1 и l_m при большом n ($n > 20$) прибегают к помощи компьютера. Соответствующие программы пишутся на любом из языков программирования, но лучше пользоваться программой «Lab8.html»: в левом (нижнем) текстовом окне пишем код программы, щелкаем на кнопку «calculator» и получаем результат в правом текстовом окне. Например, для решения задачи (2) набираем код:

```
s=100*n*(r+r1);
for(i=0;i<n;i++)for(j=i+1;j<n;j++){z=ro1(x[i]+'+y[i],x[j]+'+y[j]);if(z<s){s=z;i0=i;j0=j}}
x[i0]+'+y[i0]+'n'+x[j0]+'+y[j0]
```

на выходе получаем координаты двух точек прямой l_1 .

Для решения задачи (3) – код:

```
s=100*(r+r1);
for(i=0;i<n;i++)for(j=i+1;j<n;j++)for(q=j+1;q<n;q++){
z1=(u[i]*x[i]+u[j]*x[j])/(u[i]+u[j])+'+(u[i]*y[i]+u[j]*y[j])/(u[i]+u[j]);
z2=(u[i]*x[i]+u[q]*x[q])/(u[i]+u[q])+'+(u[i]*y[i]+u[q]*y[q])/(u[i]+u[q]);
z3=(u[j]*x[j]+u[q]*x[q])/(u[j]+u[q])+'+(u[j]*y[j]+u[q]*y[q])/(u[j]+u[q]);
z=rom(z1,z2);if(z<s){s=z;p0=z1;p1=z2}
z=rom(z1,z3);if(z<s){s=z;p0=z1;p1=z3}
z=rom(z2,z3);if(z<s){s=z;p0=z2;p1=z3}}
p0+'n'+p1
```

на выходе – координаты двух точек прямой l_m .

Для решения задачи (4) – код:

```
s=0;for(i=0;i<n;i++)s+=u[i];xc=0;yc=0;
for(i=0;i<n;i++){xc+=u[i]*x[i];yc+=u[i]*y[i]}xc/=s;yc/=s;
```

```

s=0;s1=0;for(i=0;i<n;i++){x1=x[i]-xc;y1=y[i]-yc;s+=u[i]*(x1*x1-y1*y1);
s1+=u[i]*x1*y1}al=atan(2*s1/s)/2
al1=al+PI/2;al=cos(al)+' '+sin(al);al1=cos(al1)+' '+sin(al1);
if(ro(al)>ro(al1))al=al1;al=al.split(',');
al[0]+' '+al[1]+'\\n'+xc+' '+yc

```

на выходе получаем $al[0]=\sin\alpha$, $al[1]=-\cos\alpha$ в уравнении (15) и x_c , y_c – координаты центра масс.

Перейдем теперь к теоретическому материалу для решения задач (5)-(8). Сразу заметим, что решением задачи (8) является барицентр системы материальных точек $\{m_1A_1, m_2A_2, \dots, m_nA_n\}$, т.е. точка $C(x_c, y_c)$:

$$x_c = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n m_i x_i, \quad y_c = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n m_i y_i.$$

Задачи (5) и (6) являются минисуммными задачами сформулированными выше. Подобная формулировка подходит для размещения автобазы, обслуживающей ряд объектов, центрального склада, с которого осуществляется доставка продукции, школы, коммутатора в телефонной сети и т.д. Однако в реальности обслуживаемые объекты имеют разные приоритеты. Например, в случае с размещением склада, очевидно, что объекты с наибольшей потребностью в продукции должны размещаться ближе к складу, поскольку ездить туда придется чаще, а в целом речь идет о минимизации транспортных расходов (в частности об их грузооборотах). Если говорить о размещении школы, то вполне очевидно, что стоит учитывать количество детей, проживающих в каждом из населенных пунктов с тем, чтобы минимизировать суммарное пройденное ими всеми расстояние. Обобщая эти рассуждения, каждому объекту можно сопоставить некоторое число, называемое весом. В наших обозначениях это будут числа m_i , местоположения обслуживаемых объектов – в точках A_i , $i=1, \dots, n$. Так же следует отметить, что к пункту обслуживания не всегда можно добраться по прямой линии (такой дороги может просто не быть). Поэтому расстояния между объектами иногда считают «по клеткам» [4, с. 150]:

$$d(A, B) = |x_A - x_B| + |y_A - y_B| \quad (17)$$

Задача о нахождении точки Q , удовлетворяющей (5) имеет древние корни, она известна под различными названиями: *обобщенная задача Ферма-Торричелли*, *задача Ферма-Торричелли-Штейнера*, *задача Вебера*, *задача о взвешенной геометрической медиане*. С конца XIX века подобные задачи стали предметом изучения в экономической географии. Систематические исследования были начаты Вильгельмом Лаунхардтом и позднее развиты Альфредом Вебером [3 Курант-Робинс]. Последний ввел понятие *штандорта* – оптимального места размещения производства, «склада».

Эта задача не имеет простого точного решения при больших n и произвольном выборе точек $A_1, A_1, \dots, A_n$ и нашей целью является построение несложных алгоритмов для нахождения приближенных решений этой задачи.

Если точки $A_1, A_1, \dots, A_n$ не лежат на одной прямой, то задача (5) имеет единственное решение, а задача (6) – не всегда.

В самом деле, если существуют две точки Q и Q_1 , удовлетворяющие (5), т.е.

$$\min_T \sum_{i=1}^n m_i |A_i - T| = \sum_{i=1}^n m_i |A_i - Q| = \sum_{i=1}^n m_i |A_i - Q_1| = r$$

то для точки C – середины отрезка QQ_1 имеем

$$\sum_{i=1}^n m_i |A_i C| < \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i (|A_i Q| + |A_i Q_1|) = r$$

т.к. медиана невырожденного треугольника ($\Delta QA_i Q_1$) меньше полусуммы его сторон. То есть точка C лучше точки Q в смысле (5), что противоречит выбору точки Q .

Пусть x и y – координаты точки $T(x, y)$ и $A_1(x_1, y_1), A_2(x_2, y_2), \dots, A_n(x_n, y_n)$, тогда по определению (17)

$$\sum_{i=1}^n m_i d(A_i, T) = \sum_{i=1}^n m_i |x - x_i| + \sum_{i=1}^n m_i |y - y_i| = L(x) + L_1(y)$$

и задача (6) сводится к нахождению минимумов функций $L(x)$ и $L_1(y)$.

Пусть точки x_i расположены на оси абсцисс в порядке возрастания: $x_1 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n$, тогда на отрезке $[x_1, x_n]$ функция $L(x)$ является кусочно-линейной функцией и, следовательно, достигает своего минимального значения в одной из точек $x_i, i=1, \dots, n$, а может и на одном из отрезков, соединяющих эти точки. Обозначим эту точку как x_p . Найдем производную функции $L(x)$:

$$L'(x) = \left(\sum_{i=1}^n m_i |x - x_i| \right)' = \begin{cases} \sum_{i: x > x_i} m_i - \sum_{i: x < x_i} m_i, & \text{если } x \notin \{x_1, \dots, x_n\} \\ \text{не существует, если } x \in \{x_1, \dots, x_n\} \end{cases} \quad (18)$$

Так как числа $m_i > 0, i=1, \dots, n$, то функция $L'(x)$ является монотонной кусочно-постоянной функцией. Следовательно, в точке x_p она меняет знак или на интервале (x_p, x_j) $L'(x)=0$, где x_j – следующая за x_p точка из множества $\{x_1, \dots, x_n\}$. Например, если $m_1=m_2=\dots=m_n=1, x_1 < x_1 < \dots < x_n$ и $n=2k$ – четное число, то на интервале (x_k, x_{k+1}) производная $L'(x)$ равна нулю, т.е. в каждой точке отрезка $[x_k, x_{k+1}]$ функции $L(x)$ достигает своего минимального значения.

Аналогичные рассуждения проводим для функции $L_1(y)$ и тогда равенство (18) приводит нас к простому алгоритму нахождения точки P , удовлетворяющей (6). Сначала сортируем материальные точки $m_1A_1, m_2A_2, \dots, m_nA_n$ в порядке возрастания абсцисс точек A_i и методом половинного деления или перебором определяем номер j , где разность сумм масс (18) меняет знак. Это и будет абсциссой искомой точки P . Затем сортируем точки $m_1A_1, m_2A_2, \dots, m_nA_n$ в порядке возрастания их ординат и аналогично находим ординату точки P . При этом, если сумма масс $\sum_{i=1}^n m_i$ разбивается на две равные подсуммы, то точки, удовлетворяющие (6), заполняют прямоугольник $[x_p, x_j] \times [y_p, y_j]$, где A_j – один из ближайших соседей точки P .

Теперь вернемся к задаче (4). Рассмотрим функцию $S(T)$:

$$S(T) = \sum_{i=1}^n m_i |A_i T| = \sum_{i=1}^n m_i \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2} \quad (19)$$

Функция $S(T)$ является дифференцируемой везде кроме точек $A_1, A_2, \dots, A_n$ (в этих точках частные производные $S_x(T)$ и $S_y(T)$ не существуют). Как было доказано выше, точка Q , удовлетворяющая (5), является единственной точкой минимума функции $S(T)$, поэтому Q является или одной из точек $A_1, A_2, \dots, A_n$, или ее координаты x_Q и y_Q являются единственным решением системы уравнений

$$\begin{cases} S_x(x, y) = 0 \\ S_y(x, y) = 0 \end{cases} \quad (20)$$

где $S_x(x, y) = S_x(T)$ и $S_y(x, y) = S_y(T)$ – частные производные функции $S(T)$.

Пусть $T \notin \{A_1, \dots, A_n\}$ тогда

$$S_x(T) = \sum_{i=1}^n m_i \frac{x - x_i}{\sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2}}$$

и

$$S_{xx}(T) = \sum_{i=1}^n m_i \frac{(y - y_i)^2}{\left(\sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2}\right)^3}$$

Так как вторая производная $S_{xx}(T)$ больше нуля, то для любого y существует только одна точка x_0 , где производная $S_x(x, y)$ меняет знак, т.е. $S(x_0, y) \leq S(x, y)$, $\forall x$. Аналогичные рассуждения верны и для производных $S_y(T)$ и $S_{yy}(T)$.

Таким образом, приближенное решение задачи (5) можно найти методом покоординатного спуска [6, с. 288], выбирая в качестве начального приближения любую точку плоскости Oxy . То есть, находя поочередно решения уравнений:

$$S_x(x_i, y_{i-1}) = 0 \text{ и } S_x(x_i, y_i) = 0, i = 1, 2, \dots \quad (21)$$

где x_0 и y_0 выбираются произвольно.

Построим теперь итерационный алгоритм, сходящийся к точке Q , являющейся решением задачи (5). Для этого проведем аналогию со следующими фактами.

1. Центр масс M системы материальных точек $\sigma = \{m_1A_1, m_2A_2, \dots, m_nA_n\}$ можно найти по формуле [2]:

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i \overrightarrow{OA_i} \quad (22)$$

где точка O – начало координат.

2. В силу формул Лагранжа [2, с. 66] момент инерции (2) системы σ принимает наименьшее значение в ее барицентре, т.е.

$$\sum_{i=1}^n m_i MA_i^2 \leq \sum_{i=1}^n m_i TA_i^2, \quad \forall T \quad (23)$$

Из (19) и (5) имеем

$$S(Q) \leq S(T) = \sum_{i=1}^n m_i |A_i T| = \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{|A_i T|} A_i T^2 \quad (24)$$

для любой точки T .

В силу (20) градиент функции $S(T)$ обращается в нуль при $T=Q$ или не существует (когда Q – одна из точек $A_1, A_2, \dots, A_n$), т.е.

$$\text{grad } S(Q) = \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{|A_i Q|} \overrightarrow{A_i Q} = \vec{0}, \quad (25)$$

если $Q \notin \{A_1, \dots, A_n\}$.

Сравнивая (24)-(25) с (22)-(23), приходим к следующему рекуррентному алгоритму:

$$T_i = F(T_{i-1}), i = 1, 2, \dots \quad (26)$$

где вектор-функция $F(T)$ определяется следующим образом:

$$F(T) = \begin{cases} \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{m_i}{|A_i T|}} \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{|A_i T|} \overrightarrow{OA_i}, & \text{если } T \notin \{A_1, A_2, \dots, A_n\} \\ \frac{1}{\sum_{i \neq j} \frac{m_i}{|A_i T|}} \sum_{i \neq j} \frac{m_i}{|A_i T|} \overrightarrow{OA_i}, & \text{если } T = A_j \end{cases} \quad (27)$$

а точку $T_0(x_0, y_0)$ можно брать любой.

Несложно видеть, что при каждом T_i , $i=1, 2, \dots$, вектор-функция (15) является центром масс системы материальных точек:

$$\left\{ \frac{m_1}{|A_1 T_{i-1}|} A_1, \frac{m_2}{|A_2 T_{i-1}|} A_2, \dots, \frac{m_n}{|A_n T_{i-1}|} A_n \right\}, i=1, 2, \dots,$$

а Q является неподвижной точкой отображения F , т.е. решением уравнения

$$F(Q)=Q.$$

Как было замечено в [7, с. 22] барицентр M и точка Q , удовлетворяющая (4) часто оказываются близкими при больших n . Поэтому в качестве $T_0(x_0, y_0)$ – начального приближения алгоритмов (21) и (26), естественно выбирать центр масс M , координаты которого находятся формуле (22), т.е. решением задачи (6). Правило остановки алгоритмов определяется близостью соседних шагов, т.е. T_i и T_{i+1} .

Минимаксная задача (7) также имеет единственное решение. В самом деле, если существуют две точки R и R_1 , удовлетворяющие (7):

$$r = \min_T \max_{1 \leq i \leq n} m_i |A_i - T| = \max_{1 \leq i \leq n} m_i |A_i - R| = \max_{1 \leq i \leq n} m_i |A_i - R_1| \quad (28)$$

то для точки C – середины отрезка RR_1 имеем

$$\max_{1 \leq i \leq n} m_i |A_i C| < \frac{1}{2} \max_{1 \leq i \leq n} (m_i (|A_i R| + |A_i R_1|)) \leq \frac{1}{2} \left(\max_{1 \leq i \leq n} m_i (|A_i R| + \max_{1 \leq i \leq n} |A_i R_1|) \right) = r$$

т.к. медиана невырожденного треугольника ($\Delta QA_i Q_1$) меньше полусуммы его сторон. То есть точка C лучше точки Q в смысле (5), что противоречит выбору точки Q .

Пусть теперь R – решение задачи (7) и

$$r = \min_T \max_{1 \leq i \leq n} m_i |A_i T| = m_1 |A_1 R|$$

Тогда, если $m_i|A_iR| < r$, $i=2, \dots, n$, то двигая точку R к точке A_1 мы уменьшим величину r , что противоречит ее определению. Значит, существует еще одна точка A_2 такая, что $r = m_2|A_2R| = m_1|A_1R|$. И точка R будет решением задачи (7), если для всех $i=3, \dots, n$ будет выполняться неравенства: $m_i|A_iR| \leq r$. Иначе, найдется еще одна точка A_3 такая, что

$$r = m_3|A_3R| = m_2|A_2R| = m_1|A_1R|.$$

Таким образом, мы приходим к следующему результату.

Теорема 4. Среди любых n ($n > 1$) материальных точек плоскости $m_1A_1, m_2A_2, \dots, m_nA_n$ с положительными массами найдутся две (m_1A_1 и m_2A_2) или три (m_1A_1, m_2A_2 и m_3A_3) такие точки, что

$$r = \min_T \max_{1 \leq i \leq n} m_i |A_iT| = \max_{1 \leq i \leq n} m_i |A_iR| = m_1 |A_1R| = m_2 |A_2R| \quad (29)$$

или

$$r = \min_T \max_{1 \leq i \leq n} m_i |A_iT| = \max_{1 \leq i \leq n} m_i |A_iR| = m_1 |A_1R| = m_2 |A_2R| = m_3 |A_3R| \quad (30)$$

где R – решение задачи (7).

Будем искать точку R следующим образом. Сначала заметим, что барицентр M системы материальных точек $\{m_1A_1, m_2A_2\}$ является решением задачи (7) для системы $\{m_1A_1, m_2A_2\}$, при этом

$$r = |A_1M| m_1 = |A_2M| m_2 = \frac{|A_1A_2| m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

и координаты точки M определяются равенством:

$$\vec{M} = \vec{A_1} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{A_1A_2}$$

где $\vec{M}$ и $\vec{A_1}$ – радиус-векторы точек R и A_1 соответственно.

Отсюда получаем оценку снизу для системы $\{m_1A_1, m_2A_2, \dots, m_nA_n\}$

$$r = \min_T \max_{1 \leq i \leq n} m_i |A_iT| \geq \max_{i \neq j} \frac{m_i m_j |A_iA_j|}{m_i + m_j} = r_0 \quad (31)$$

Поэтому сначала находим величину r_0 с соответствующим ей барицентром M и проверяем гипотезу: $r = r_0$, т.е. находим величины $m_i|A_iM|$ и если все они не превосходят r_0 , то $R=M$ – решение задачи (7). Если гипотеза: $r = r_0$ – не подтвердилась, то переходим к рассмотрению троек точек.

Для трех материальных точек m_1A_1, m_2A_2 и m_3A_3 рассмотрим множество

$$\mu = \{M : m_1 | MA_1 | = m_2 | MA_2 | = m_3 | MA_3 |\} \quad (32)$$

Если точки A_1, A_2 и A_3 неколлинеарны, то множество μ может оказаться пустым, состоять из одной точки или состоять из двух точек. В самом деле, рассмотрим два случая: $m_1 = m_2 = m_3$ и $m_1 \neq m_2, m_1 \neq m_3$.

В первом случае μ состоит из одной точки M , являющейся центром окружности, описанной около треугольника $A_1A_2A_3$.

Во втором случае $m_1 \neq m_2$ и $m_1 \neq m_3$, тогда множество μ является пересечением двух множеств:

$$\mu = \{M : m_1 | MA_1 | = m_2 | MA_2 |\} \cap \{m_1 | MA_1 | = m_3 | MA_3 |\}$$

каждое из которых является окружностью (окружностью Аполлония). Радиусы этих окружностей находятся по формулам:

$$\frac{m_1 m_2 | A_1 A_2 |}{| m_1^2 - m_2^2 |} \quad \text{и} \quad \frac{m_1 m_3 | A_1 A_3 |}{| m_1^2 - m_3^2 |}$$

а радиус-векторы их центров есть

$$\vec{A}_1 + \frac{m_2^2}{m_2^2 - m_1^2} \vec{A_1 A_2} \quad \text{и} \quad \vec{A}_1 + \frac{m_3^2}{m_3^2 - m_1^2} \vec{A_1 A_3}$$

соответственно.

В силу теоремы 4 одно из множеств μ (32) будет содержать точку R – решение задачи (7).

Отметим, что решения задач (5)-(8) студенты часто находят «вручную» пользуясь программой «Lab8.html», при этом число неудачных попыток говорит о понимании студентом градиентного метода. Также применяют рекуррентные методы, методы покоординатного спуска и метод наискорейшего спуска. Однако это не освобождает студента от знания теоретического материала.

//К минисуммной задаче

```
function F(a){a=a.split(',');var s=0;var s1=0;var s2=0;
for(i=0;i<n;i++){z=sqrt((a[0]-x[i])**2+(a[1]-y[i])**2);
if(z!=0){s+=u[i]*x[i]/z;s1+=u[i]*y[i]/z;s2+=u[i]/z;}}
return s/s2+', '+s1/s2}
z2=x[9]+' '+y[9];sh=0;z=1
while(z>.00001){z3=F(z2);z=sqrt((z2.split(',')[0]-z3.split(',')[0])**2+(z2.split(',')[1]-
z3.split(',')[1])**2);z2=z3;sh++;}
z2+'\nsh='+sh
```

большинстве