

Министерство образования и науки Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное  
учреждение высшего профессионального образования  
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ СИСТЕМ  
УПРАВЛЕНИЯ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ

**Кафедра автоматизации обработки информации (АОИ)**

**Л. П. Турунтаев**

# **ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ**

**Методические указания  
по выполнению лабораторной работы**

**2016**

Корректор: Осипова Е. А.

**Турунтаев Л. П.**

Исследование операций: методические указания по выполнению лабораторной работы. — Томск: Факультет дистанционного обучения, ТУСУР, 2016. — 45 с.

© Турунтаев Л. П., 2016

© Факультет дистанционного  
обучения, ТУСУР, 2016

## СОДЕРЖАНИЕ

|                                                                     |    |
|---------------------------------------------------------------------|----|
| 1 Введение.....                                                     | 4  |
| 2 Методические указания по выполнению лабораторной работы .....     | 4  |
| 2.1 Задача использования ресурсов (планирования производства) ..... | 7  |
| 2.2 Транспортная задача линейного программирования.....             | 12 |
| 2.3 Задача о назначениях .....                                      | 12 |
| 3 Требования к содержанию и оформлению лабораторной работы.....     | 14 |
| 4 Решение ЗЛП с помощью MS Excel .....                              | 32 |
| Список литературы.....                                              | 45 |

## 1 ВВЕДЕНИЕ

Методические указания предназначены для выполнения лабораторной работы по курсу «Исследование операций» с целью закрепления знаний по моделям и алгоритмам решения задач принятия решений в условиях определенности, приобретения навыков моделирования и решения задач принятия решений с помощью пакетов прикладных программ (ППП).

Руководство включает краткое описание задач исследования операций, методы и программные средства их решения, задания на выполнение лабораторной работы.

## 2 МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ

**Тема лабораторной работы: Моделирование и решение задач  
линейного программирования общего вида**

Процессы принятия решений лежат в основе любой целенаправленной деятельности человека. Они призваны способствовать наиболее полному удовлетворению потребностей (целей) членов общества при имеющихся ресурсах и эффективному их воспроизводству. Закономерности таких процессов изучаются в теории принятия решений, включающей исследование операций.

Исследование операций (ИСО) представляет собой комплекс научных методов количественного обоснования принимаемых решений по управлению целенаправленной деятельностью коллектива.

В качестве одного из основных методологических принципов исследования операций является математическое моделирование как процесс построения моделей исследуемых объектов или операций.

*Модель* — это некоторое отражение оригинала. Математическая модель, представляющая из себя систему уравнений и ограничений, описывающих состояние исследуемой системы через ее входные и выходные параметры в любой момент времени, называется моделью без управления. Назовем ее  $\Omega$ . Если ввести функцию предпочтения состояний системы  $Z$  (критерий оптимальности, целевая функция), то мы уже будем говорить об оптимизационной модели управления  $(Z, \Omega)$ .

Оптимизационные модели целесообразны и эффективны тогда, когда они позволяют сгенерировать альтернативные решения и оценить их через критерии оптимальности с целью выбора наилучшей. В решении сложных проблем используют имитационное моделирование.

Математическую (формализованную) постановку задачи исследования операций в условиях определенности можно представить в виде оптимизационной модели. Математическая модель решения задачи служит для выяснения количественных оценок предполагаемых действий. Формализация задачи в принципе может иметь два крайних случая. В первом случае в распоряжении субъекта управления к моменту получения задачи имеется формальная модель, подходящая для описания возникшей ситуации; во втором — такой готовой модели нет, но есть время для ее составления. В практике же, как правило, наблюдается промежуточное положение, т. е. имеются модели, частично пригодные для формализации возникшей ситуации.

В качестве основных количественных методов обоснования управленческих решений для ЗПР в условиях определенности являются методы математического программирования. Общая постановка однокритериальных детерминированных задач принятия решений полностью совпадает с общей постановкой задач математического программирования (ЗМП). Поэтому весь арсенал математических методов, разрабатываемых для решения ЗМП, может и должен быть использован для решения ЗПР этого класса.

Сделаем общую постановку задачи математического программирования (МП).

Пусть  $x_1, x_2, \dots, x_n$  — переменные (неизвестные) величины, которые характеризуют систему управления;  $Z(x_1, x_2, \dots, x_n)$  — целевая функция, цель управления системы;  $g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) R b_i, i = 1, 2, \dots, m$  — ограничения, накладываемые системой на неизвестные величины, где  $b_i$  — константы,  $R$  — возможные отношения  $\geq, =, \leq$ .

Необходимо найти вектор управления (план)  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , который максимизирует (минимизирует) целевую функцию  $Z(X)$  и удовлетворяет системе ограничений  $g_i(X) R b_i, i = \overline{1, m}$ . На неизвестные величины могут быть наложены условия неотрицательности  $x_j \geq 0, j = \overline{1, n}$ . Объединение всех ограничений, накладываемых на неизвестные величины, называют областью допустимых решений и обозначают буквой  $\Omega$ , т. е.  $X \in \Omega$ . Таким образом, общая детерминированная модель математического программирования примет вид

$$\max(\min): Z = Z(X), X \in \Omega.$$

Допустимый план  $X \in \Omega$ , доставляющий экстремальное значение целевой функции (критерию оптимальности), называется оптимальным.

В зависимости от вида функций  $Z(X)g_i(X)$  задачи МП делятся на несколько классов:

- 1) задачи линейного программирования, если  $Z(X)$  и  $g(X)$  линейны относительно переменных  $X$ ;
- 2) задачи нелинейного программирования, если хотя бы одна из этих функций не линейна относительно  $X$ ;
- 3) задачи дискретного (целочисленного) программирования, если хотя бы одна из управляемых переменных, входящих в вектор  $X$ , должна принимать дискретные значения (например, целые);

4) задачи динамического программирования, если решение исходной задачи можно разложить на ряд более простых задач, для каждой из которых определены рекуррентные вычисления соответствующей управляемой переменной, входящей в вектор  $X$ .

Метод поиска оптимального решения существенно зависит от вида математической модели. В настоящее время наиболее разработаны методы решения задач линейного программирования, в рамки которого укладывается весьма широкий круг задач исследования операций.

Наиболее хорошо разработаны модели и алгоритмы решения на этих моделях для следующих классов задач:

- 1) распределения,
- 2) управления запасами,
- 3) массового обслуживания,
- 4) упорядочения и согласования,
- 5) выбора маршрута.

Рассмотрим некоторые классы задач исследования операций, образующие подгруппу однокритериальных задач принятия решений в условиях определенности

## **2.1 Задача использования ресурсов (планирования производства)**

Рассмотрим задачу линейного программирования об оптимальном использовании ресурсов.

Пусть предприятие изготавливает  $n$  видов продуктов (рис. 2.1), располагая  $m$  видами ресурсов в количестве  $b_1, b_2, \dots, b_m$ . Известна матрица  $A = \|a_{ij}\|$  расходов  $i$ -го ресурса на изготовление одной единицы  $j$ -го продукта ( $i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}$ ). Эффективность (прибыль) выпуска единицы  $j$ -го про-

дукта равна  $c_j$ . Требуется определить план выпуска продукции  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , максимизирующий прибыль предприятия.

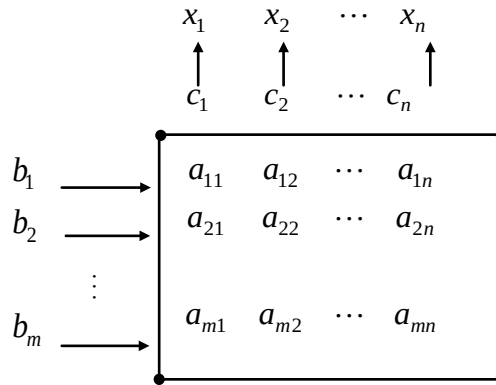


Рис. 2.1 — Формализованное описание задачи

Для задачи, сформулированной выше, математическая модель имеет следующий вид: максимизировать

$$Z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \quad (2.1)$$

при ограничениях:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = \overline{1, m}, \quad (2.2)$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n}. \quad (2.3)$$

Ограничения (2.2) представляют собой многогранное множество допустимых решений ЗЛП. Если многогранное множество ограничено, то оно называется многогранником. Многогранное множество в ЗЛП выпукло, содержит крайние (угловые) точки  $X_1, X_2, \dots, X_k$ , удовлетворяющие следующим условиям:

1) любая точка  $X$  может быть представлена как выпуклая линейная комбинация угловых точек;

2) каждой угловой точке соответствует базисный допустимый план ЗЛП.

Базисный план задачи (2.1)—(2.2) всегда имеет не более  $m$  (если ограничения являются линейно независимыми ( $m < n$ )) отличных от нуля координат. Они называются базисными. Если таких координат, отличных от нуля, меньше  $m$ , то базисный план называется вырожденным. Допустимый план  $X$  ЗЛП называется оптимальным, если целевая функция (2.1) достигает своего экстремального значения в точке(ах)  $X^*$ . Оптимальный план  $X^*$  всегда является базисным планом.

На рис. 2.2 представлена геометрическая интерпретация ЗЛП для случая двух переменных  $x_1$  и  $x_2$ . Геометрически целевая функция — семейство параллельных прямых уровня цели  $Z$ , множество допустимых решений — выпуклый многоугольник.

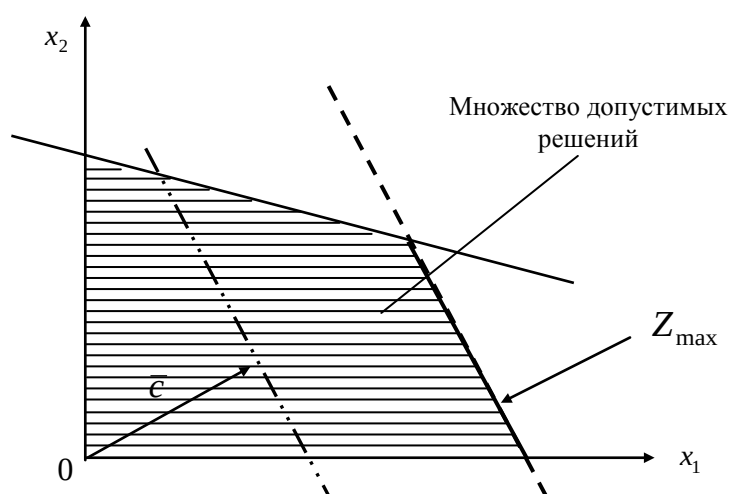


Рис. 2.2 — Геометрическая интерпретация ЗЛП

Для решения ЗЛП Г. Данцигом был предложен симплекс-метод. В основу симплекс-метода положено поэтапное движение к оптимуму  $X^*$  от исходной угловой точки области допустимых решений к рядом лежащей угловой точке, позволяющее последовательно улучшать значение целевой функции. Так как угловая точка характеризуется  $m$  базисными переменными

ми, то на каждом этапе встают вопросы: какие переменные выбирать за базисные, а какие — за небазисные. Ответы на вопросы дает симплекс-алгоритм, который характеризуется сходимостью (последовательностью улучшения решений) и конечностью в силу конечности множества угловых точек.

Для любой задачи ЛП всегда существует обратная (двойственная) ей задача.

| Если прямая задача:                                                       |       | то двойственной будет задача:                                             |
|---------------------------------------------------------------------------|-------|---------------------------------------------------------------------------|
| $\max: Z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \quad (2.4)$                              |       | $\min: f = \sum_{i=1}^m b_i y_i \quad (2.7)$                              |
| $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = \overline{1, m} \quad (2.5)$ | $y_i$ | $\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \geq c_j, \quad j = \overline{1, n} \quad (2.8)$ |
| $x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n} \quad (2.6)$                       |       | $y_i \geq 0, \quad i = \overline{1, m} \quad (2.9)$                       |

Пара задач (2.4)—(2.6) и (2.7)—(2.9) называется симметричной парой двойственных задач, где  $y_i$  — двойственная оценка. В содержательной постановке, если  $x_j$  — продукт,  $b_i$  — ресурс,  $c_j$  — прибыль, то в двойственной задаче  $y_i$  — оценка ресурса (его дефицитность).

В линейном программировании существуют следующие теоремы двойственности [2, 3].

1. Если одна из двойственных задач ЛП имеет оптимальное решение, то и другая его имеет, причем  $\sum_{j=1}^n c_j x_j = \sum_{i=1}^m b_i y_i$ , в других случаях

$\sum_{j=1}^n c_j x_j < \sum_{i=1}^m b_i y_i$ . Если целевая функция одной из ЗЛП не ограничена, то система условий другой противоречива.

2. Чтобы допустимые решения  $X$  и  $Y$  пары двойственных задач были оптимальными, необходимо и достаточно выполнение условий:

$$x_j \cdot \left( \sum_{i=1}^n a_{ij} y_i - c_j \right) = 0, \quad j = \overline{1, n}$$

$$y_i \cdot \left( \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j - b_i \right) = 0, \quad i = \overline{1, m}$$

Получить решение двойственной задачи можно из оптимальной симплекс-таблицы прямой задачи. Допустим, из оптимальной симплекс-таблицы получили оптимальные значения основных и дополнительных переменных прямой и двойственной задач:

|                     |                |               |               |                |               |
|---------------------|----------------|---------------|---------------|----------------|---------------|
| Строка<br>$Z_{opt}$ | $0 \cdot x_1$  | $5 \cdot x_2$ | $0 \cdot x_3$ | $12 \cdot x_4$ | $0 \cdot x_5$ |
| Решение<br>$X^*$    | Основные       |               |               | Дополнительные |               |
|                     | $x_1 = 6$      | $x_2 = 0$     | $x_3 = 4$     | $x_4 = 0$      | $x_5 = 8$     |
| Решение<br>$Y^*$    | Дополнительные |               |               | Основные       |               |
|                     | $y_3 = 0$      | $y_4 = 5$     | $y_5 = 0$     | $y_1 = 12$     | $y_2 = 0$     |

Тогда:

$x_j$  (основные),  $j = \overline{1, n}$  — план выпуска продукции;

$x_j$  (дополнительные),  $j = \overline{n+1, n+m}$  — остаток ресурса  $b_i$ ;

$y_i$  (основные) — оценка дефицитности ресурса  $i$ , отражающая изменение целевой функции при изменении ресурса на одну единицу;

$$y_i \text{ (основные)} = \frac{\Delta Z}{\Delta b_i}, \quad i = \overline{1, m};$$

$y_i$  (дополнительные),  $i = \overline{m+1, m+n}$  свидетельствуют об убытке производства продуктов  $x_j$ ,  $j = \overline{1, n}$ .

## 2.2 Транспортная задача линейного программирования

Имеется  $m$  поставщиков и  $n$  потребителей однородной продукции, возможности и потребности которых соответственно равны  $a_i$  и  $b_j$ ,  $i = \overline{1, m}$ ,  $j = \overline{1, n}$ . Стоимость перевозки одной единицы продукции из пункта  $i$  в пункт  $j$  равна  $C_{ij}$ . Определить план перевозки продукции от поставщиков к потребителям  $x_{ij}$ , минимизирующий общую стоимость всех перевозок.

Математическая постановка задачи:

$$\min : Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} , \quad (2.10)$$

при ограничениях:

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} \geq b_j, \quad j = \overline{1, n} \quad (2.11)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \leq a_i, \quad i = \overline{1, m} \quad (2.12)$$

Ограничение (2.11) накладывается на спрос  $j$ -го потребителя, ограничение (2.12) — на возможности  $i$ -го поставщика. Если  $\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$ , то задача называется закрытой, в противном случае — открытой.

## 2.3 Задача о назначениях

Имеется  $m$  потенциальных исполнителей ( $j = \overline{1, m}$ ) соответственно одной из имеющихся  $m$  работ ( $i = \overline{1, m}$ ). Известны затраты  $c_{ij}$  на выполнение  $j$ -м исполнителем  $i$ -й работы. Требуется назначить каждого исполнителя на одну работу так, чтобы минимизировать суммарные затраты. Математическая постановка задачи:

$$\min : Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} , \quad (2.13)$$

при ограничениях:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, \quad i = \overline{1, m} \quad (2.14)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = 1, \quad j = \overline{1, n} \quad (2.15)$$

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если работа } i \text{ поручается } j\text{-му} \\ & \text{исполнителю;} \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (2.16)$$

Ограничение (2.14) указывает, что на каждую  $i$ -ую работу должен быть назначен только один исполнитель. Ограничение (2.15) указывает, что каждый  $j$ -й исполнитель должен быть назначен для выполнения только одной работы. Если число работ не равно числу потребителей, то задача о назначениях называется задачей открытого типа, в противном случае — закрытого.

### 3 ТРЕБОВАНИЯ К СОДЕРЖАНИЮ И ОФОРМЛЕНИЮ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ

**Тема: Моделирование и решение задач линейного программирования  
общего вида**

Лабораторная работа представляется к защите в виде отчета, содержащего постановку и решение задач линейного программирования, указанных в задании на работу. В отчет включаются следующие пункты:

- 1) номер варианта и текст задачи;
- 2) таблица исходных данных;
- 3) математическая модель задачи в общем виде с указанием физического смысла переменных, целевой функции и ограничений;
- 4) математическая задача в числовой форме;
- 5) методы решения задачи;
- 6) результаты решения и их содержательная интерпретация, включая физический смысл всех вспомогательных переменных, введенных при решении задачи.

*Цель работы:*

1. Построение математической модели реальных ситуаций в виде задачи ЛП.
2. Изучение возможностей пакетов прикладных программ для ЛП.
3. Решение индивидуальной задачи путем построения математической модели и использования пакета.
4. Анализ решений задачи ЛП.

*Порядок выполнения работы:*

1. Знакомство с пакетом ПП (с помощью Ms Excel, см. п.4).
2. Изучение возможностей ППП, математическое моделирование тестовой задачи.

3. Выполнение индивидуального задания:

a) введение формализованных обозначений задачи,

b) составление математической модели,

c) ввод и решение задачи,

d) анализ оптимального решения на чувствительность к изменениям исходных данных.

Составление подробного отчёта по лабораторной работе, в котором представляется:

- формулировка индивидуального задания,
- математическая модель и пояснение к её построению,
- входная таблица с экрана монитора и выходные таблицы для всех опций программы и содержательные пояснения к ним,
- анализ на пределы (диапазон) изменения запаса одного из дефицитных ресурсов,
- выводы по лабораторной работе.

### **Выбор варианта лабораторной работы**

Выбор варианта лабораторной работы осуществляется по общим правилам с использованием следующей формулы:

$$V = (N \times K) \text{ div } 100,$$

где  $V$  — искомый номер варианта,

$N$  — общее количество вариантов,

$\text{div}$  — целочисленное деление,

при  $V = 0$  выбирается максимальный вариант,

$K$  — код варианта.

## Варианты заданий

### ***Вариант 1***

На швейной фабрике для изготовления четырёх видов изделий может быть использована ткань трёх артикулов. Нормы расхода тканей всех артикулов на пошив одного изделия приведены в таблице 3.1. В ней также указаны имеющиеся в распоряжении фабрики общее количество тканей каждого артикула и цена изделия данного вида. Определить, сколько изделий каждого вида должна произвести фабрика, чтобы стоимость изготовленной продукции была максимальной.

Таблица 3.1 — Исходные данные (вариант 1)

| Артикул<br>ткани          | Норма расхода ткани (м) на одно изделие вида |   |   |   | Общее<br>количе-<br>ство ткани |
|---------------------------|----------------------------------------------|---|---|---|--------------------------------|
|                           | 1                                            | 2 | 3 | 4 |                                |
| I                         | 1                                            | — | 2 | 1 | 180                            |
| II                        | —                                            | 1 | 3 | 2 | 210                            |
| III                       | 4                                            | 2 | — | 4 | 800                            |
| Цена<br>изделия<br>(руб.) | 9                                            | 6 | 4 | 7 |                                |

### ***Вариант 2***

Предприятие выпускает четыре вида продукции и использует три типа основного оборудования: токарное, фрезерное и шлифовальное. Затраты времени на изготовление единицы продукции для каждого из типов оборудования приведены в таблице 3.2. В ней же указаны общий фонд рабочего времени каждого из типов оборудования, а также прибыль от реализации одного изделия данного вида. Определить такой объем выпуска каждого из изделий, при котором общая прибыль от их реализации является максимальной.

Таблица 3.2 — Исходные данные (вариант 2)

| Тип оборудования                               | Затраты времени (станко-ч) на единицу продукции вида |   |   |   | Общий фонд рабочего времени (станко-ч) |
|------------------------------------------------|------------------------------------------------------|---|---|---|----------------------------------------|
|                                                | 1                                                    | 2 | 3 | 4 |                                        |
| Токарное                                       | 2                                                    | 1 | 1 | 3 | 300                                    |
| Фрезерное                                      | 1                                                    | — | 2 | 1 | 70                                     |
| Шлифовальное                                   | 1                                                    | 2 | 1 | — | 340                                    |
| Прибыль от реализации единицы продукции (руб.) | 8                                                    | 3 | 2 | 1 |                                        |

**Вариант 3**

Для перевозок груза на трёх линиях могут быть использованы суда трёх типов. Производительность судов при использовании их на различных линиях характеризуются данными, приведёнными в таблице 3.3. В ней же указаны общее время, в течение которого суда каждого типа находятся в эксплуатации, и минимально необходимые объёмы перевозок на каждой линии. Определить, какие суда, на какой линии и в течение какого времени следует использовать, чтобы обеспечить максимальную загрузку судов с учётом возможного времени их эксплуатации.

Таблица 3.3 — Исходные данные (вариант 3)

| Тип судна                                 | Производительность судов (млн.тонномиль в сутки) на линии |      |      | Общее время эксплуатации судов |
|-------------------------------------------|-----------------------------------------------------------|------|------|--------------------------------|
|                                           | 1                                                         | 2    | 3    |                                |
| I                                         | 8                                                         | 14   | 11   | 300                            |
| II                                        | 6                                                         | 15   | 13   | 300                            |
| III                                       | 12                                                        | 12   | 4    | 300                            |
| Заданный объём перевозок (млн тонно-миль) | 3000                                                      | 5400 | 3300 |                                |

**Вариант 4**

Найти решение, состоящее в определении плана изготовления изделий А, В и С, обеспечивающего максимальный их выпуск, в стоимости, выраженной с учётом ограничений на возможное использование сырья трёх видов. Нормы расхода сырья каждого вида на одно изделие, цена одного изделия соответствующего вида, а также имеющегося сырья приведены в таблице 3.4.

Таблица 3.4 — Исходные данные (вариант 4)

| Вид сырья                  | Нормы затрат (кг) на одно изделие |    |    | Общее количество сырья (кг) |
|----------------------------|-----------------------------------|----|----|-----------------------------|
|                            | А                                 | В  | С  |                             |
| I                          | 18                                | 15 | 12 | 360                         |
| II                         | 6                                 | 4  | 8  | 192                         |
| III                        | 5                                 | 3  | 3  | 180                         |
| Цена одного изделия (руб.) | 9                                 | 10 | 16 | —                           |

**Вариант 5**

На ткацкой фабрике для изготовления трёх артикулов ткани используются станки двух типов, пряжа и красители. В таблице 3.5 указаны производительность станка каждого типа, нормы расхода пряжи и красителей, цена 1 метра ткани данного артикула, а также общий фонд рабочего времени станков каждого типа, имеющихся в распоряжении фабрики фонды пряжи и красителей и ограничения на возможный выпуск тканей данного артикула.

Таблица 3.5 — Исходные данные (вариант 5)

| Ресурсы                                | Нормы затрат на 1 м ткани артикула |      |       | Общее количество ресурсов |
|----------------------------------------|------------------------------------|------|-------|---------------------------|
|                                        | 1                                  | 2    | 3     |                           |
| Производительность станков (станко-ч): |                                    |      |       |                           |
| I типа                                 | 0,02                               | —    | 0,04  | 200                       |
| II типа                                | 0,04                               | 0,03 | 0,01  | 500                       |
| Пряжа (кг)                             | 1,0                                | 1,5  | 2,0   | 15000                     |
| Красители (кг)                         | 0,03                               | 0,02 | 0,025 | 450                       |
| Цена 1м ткани (руб.)                   | 5                                  | 8    | 8     | —                         |
| Выпуск ткани (м):                      |                                    |      |       |                           |
| Минимальный                            | 1000                               | 2000 | 2500  | —                         |
| Максимальный                           | 2000                               | 9000 | 4000  | —                         |

**Вариант 6**

Машиностроительное предприятие для изготовления четырёх видов продукции использует токарное, фрезерное, сверлильное, расточное и шлифовальное оборудование, а также комплектующие изделия.

Кроме того, сборка изделий требует выполнения определённых сборочно-наладочных работ. Нормы затрат всех видов на изготовление каждого из изделий приведены в таблице 3.6. В этой же таблице указаны наличный фонд каждого из ресурсов, прибыль от реализации единицы продукции данного вида, а также ограничения на возможный выпуск продукции 2-го и 3-го вида.

Найти план выпуска продукции, при котором прибыль от её реализации является максимальной.

Таблица 3.6 — Исходные данные (вариант 6)

| Ресурсы                                      | Нормы затрат на изготовление одного изделия |     |     |     | Общий объём ресурсов |
|----------------------------------------------|---------------------------------------------|-----|-----|-----|----------------------|
|                                              | 1                                           | 2   | 3   | 4   |                      |
| Производительность оборудования (человек-ч): |                                             |     |     |     |                      |
| Токарного                                    | 550                                         | —   | 620 | —   | 64270                |
| Фрезерного                                   | 40                                          | 30  | 20  | 20  | 4800                 |
| Сверлильного                                 | 86                                          | 110 | 150 | 52  | 22360                |
| Расточного                                   | 160                                         | 92  | 158 | 128 | 26240                |
| Шлифовального                                | —                                           | 158 | 30  | 50  | 7900                 |
| Комплектующие изделия (шт.)                  | 3                                           | 4   | 3   | 3   | 520                  |
| Сборочно-наладочные работы (человек-ч)       | 4,5                                         | 4,5 | 4,5 | 4,5 | 720                  |
| Прибыль от реализации одного изделия (руб.)  | 315                                         | 278 | 573 | 370 | —                    |
| Выпуск (шт.):                                |                                             |     |     |     |                      |
| Минимальный                                  | —                                           | 40  | —   | —   | —                    |
| Максимальный                                 | —                                           | —   | 120 | —   | —                    |

**Вариант 7**

Для обогрева помещений используются четыре агрегата, каждый из которых может работать на любом из пяти сортов топлива, имеющегося в количествах 90, 110, 70, 80 и 150 т. Потребность в топливе каждого из агрегатов соответственно равна 80, 120, 140 и 160 т. Теплотворная способность  $i$ -ого сорта топлива при использовании его на  $j$ -ом агрегате задаётся матрицей

$$(C_{ij}) = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 9 & 11 & 8 \\ 6 & 5 & 8 & 7 & 6 \\ 7 & 11 & 5 & 8 & 7 \\ 9 & 8 & 7 & 9 & 11 \end{pmatrix}.$$

Найти такое распределение топлива между агрегатами, при котором получается максимальное количество теплоты от использования всего топлива.

### **Вариант 8**

Изготавливаемый на пяти кирпичных заводах кирпич поступает на шесть строящихся объектов. Ежедневное производство кирпича и потребность в нём указаны в таблице 3.7. В ней же указана цена перевозок 1000 шт. кирпича с каждого из заводов к каждому из объектов.

Составить план перевозок, согласно которому обеспечиваются потребности в кирпиче на каждом из строящихся объектов при минимальной общей стоимости перевозок.

Таблица 3.7 — Исходные данные (вариант 8)

| Кирпичный завод                  | Цена перевозки 1 тыс. шт. кирпича к строящемуся объекту |     |     |     |     |     | Производство кирпича (тыс. шт.) |
|----------------------------------|---------------------------------------------------------|-----|-----|-----|-----|-----|---------------------------------|
|                                  | 1                                                       | 2   | 3   | 4   | 5   | 6   |                                 |
| I                                | 8                                                       | 7   | 5   | 10  | 12  | 8   | 240                             |
| II                               | 13                                                      | 8   | 10  | 7   | 6   | 13  | 360                             |
| III                              | 12                                                      | 4   | 11  | 9   | 10  | 11  | 180                             |
| IV                               | 14                                                      | 6   | 12  | 13  | 7   | 14  | 120                             |
| V                                | 9                                                       | 12  | 14  | 15  | 8   | 13  | 150                             |
| Потребность в кирпиче (тыс. шт.) | 230                                                     | 220 | 130 | 170 | 190 | 110 | —                               |

### **Вариант 9**

Для поддержания нормальной жизнедеятельности человеку необходимо потреблять не менее 118 г белков, 56 г жиров, 500 г углеводов, 8 г минеральных солей. Количество питательных веществ, содержащихся в 1 кг каждого вида потребляемых продуктов, а также цена 1 кг каждого из этих продуктов приведены в таблице 3.8.

Таблица 3.8 — Исходные данные (вариант 9)

| Питательные вещества       | Содержание (г) питательных веществ в 1 кг продуктов |      |        |       |     |       |            |
|----------------------------|-----------------------------------------------------|------|--------|-------|-----|-------|------------|
|                            | Мясо                                                | рыба | молоко | масло | сыр | крупы | кар-тофель |
| Белки                      | 180                                                 | 190  | 30     | 10    | 260 | 130   | 21         |
| Жиры                       | 20                                                  | 3    | 40     | 865   | 310 | 30    | 2          |
| Углеводы                   | —                                                   | —    | 50     | 6     | 20  | 650   | 200        |
| Минеральные соли           | 9                                                   | 10   | 7      | 12    | 60  | 20    | 10         |
| Цена 1 кг продуктов (руб.) | 1,8                                                 | 1,0  | 0,28   | 3,4   | 2,9 | 0,5   | 0,1        |

Составить дневной рацион, содержащий не менее минимальной суточной нормы потребности человека в необходимых питательных веществах при минимальной общей стоимости потребляемых продуктов.

### ***Вариант 10***

Для перевозок трёх видов продукции предприятие использует два типа технологического оборудования и два вида сырья. Нормы затрат сырья и времени на изготовление одного изделия каждого вида приведены в таблице 3.9.

Таблица 3.9 — Исходные данные (вариант 10)

| Ресурсы                                   | Нормы затрат на одно изделие вида |    |    | Общее количество ресурсов |
|-------------------------------------------|-----------------------------------|----|----|---------------------------|
|                                           | 1                                 | 2  | 3  |                           |
| Производительность оборудования (норм-ч): |                                   |    |    |                           |
| I типа                                    | 2                                 | —  | 4  | 200                       |
| II типа                                   | 4                                 | 3  | 1  | 500                       |
| Сырьё (кг):                               |                                   |    |    |                           |
| 1-го вида                                 | 10                                | 15 | 20 | 1495                      |
| 2-го вида                                 | 30                                | 20 | 25 | 4500                      |

Окончание табл. 3.9

| Ресурсы                    | Нормы затрат на одно изделие<br>вида |    |     | Общее количество ресурсов |
|----------------------------|--------------------------------------|----|-----|---------------------------|
|                            | 1                                    | 2  | 3   |                           |
| Цена одного изделия (руб.) | 10                                   | 15 | 20  | —                         |
| Выпуск (шт.):              |                                      |    |     |                           |
| Минимальный                | 10                                   | 20 | 25  | —                         |
| Максимальный               | 20                                   | 40 | 100 | —                         |

В ней же указаны общий фонд рабочего времени каждой из групп технологического оборудования, объёмы имеющегося сырья каждого вида, а также цена одного изделия данного вида и ограничения на возможный выпуск каждого из изделий.

Составить такой план производства продукции, согласно которому будет изготовлено необходимое количество изделий каждого вида, а общая стоимость всей изготавливаемой продукции максимальна.

### ***Вариант 11***

При производстве четырёх видов кабеля выполняется пять групп технологических операций. Нормы затрат на 1 км кабеля данного вида на каждой из групп операции, прибыль от реализации 1 км каждого вида кабеля, а также общий фонд рабочего времени, в течение которого могут выполняться эти операции, указаны в таблице 3.10.

Таблица 3.10 — Исходные данные (вариант 11)

| Технологическая операция | Нормы затрат времени (ч)<br>на обработку 1 км кабеля вида |     |     |     | Общий фонд рабочего времени (ч) |
|--------------------------|-----------------------------------------------------------|-----|-----|-----|---------------------------------|
|                          | 1                                                         | 2   | 3   | 4   |                                 |
| Волочение                | 1,2                                                       | 1,8 | 1,6 | 2,4 | 7200                            |
| Наложение изоляции       | 1,0                                                       | 0,4 | 0,8 | 0,7 | 5600                            |

Окончание табл. 3.10

| Технологическая операция          | Нормы затрат времени (ч)<br>на обработку 1 км кабеля вида |     |     |     | Общий фонд рабочего времени (ч) |
|-----------------------------------|-----------------------------------------------------------|-----|-----|-----|---------------------------------|
|                                   | 1                                                         | 2   | 3   | 4   |                                 |
| Скручивание элементов в кабель    | 6,4                                                       | 5,6 | 6,0 | 8,0 | 11176                           |
| Освинцевание                      | 3,0                                                       | —   | 1,8 | 2,4 | 3600                            |
| Испытание и контроль              | 2,1                                                       | 1,5 | 0,8 | 3,0 | 4200                            |
| Прибыль от реализации 1 км кабеля | 1,2                                                       | 0,8 | 1,0 | 1,3 | —                               |

Определить такой план выпуска кабеля, при котором общая прибыль от реализации изготавливаемой продукции является максимальной.

### **Вариант 12**

На мебельной фабрике изготавливается пять видов продукции: столы, шкафы, диваны-кровати, кресла-кровати и тахты. Нормы затрат труда, а также древесины и ткани на производство единицы продукции данного вида приведены в таблице 3.11.

Таблица 3.11 — Исходные данные (вариант 12)

| Ресурсы                     | Норма расхода ресурса на единицу продукции |      |               |                |       | Общее количество ресурсов |
|-----------------------------|--------------------------------------------|------|---------------|----------------|-------|---------------------------|
|                             | стол                                       | шкаф | диван-кровать | кресло-кровать | тахта |                           |
| Трудозатраты (человека-ч)   | 4                                          | 8    | 12            | 9              | 10    | 3456                      |
| Древесина (м <sup>3</sup> ) | 0,4                                        | 0,6  | 0,3           | 0,2            | 0,3   | 432                       |
| Ткань (м)                   | —                                          | —    | 6             | 4              | 5     | 2400                      |

Окончание табл. 3.11

| Ресурсы                                     | Норма расхода ресурса на единицу продукции |      |               |                |       | Общее количество ресурсов |
|---------------------------------------------|--------------------------------------------|------|---------------|----------------|-------|---------------------------|
|                                             | стол                                       | шкаф | диван-кровать | кресло-кровать | тахта |                           |
| Прибыль от реализации одного изделия (руб.) | 8                                          | 10   | 16            | 14             | 12    | —                         |
| Выпуск (шт.):                               |                                            |      |               |                |       |                           |
| Минимальный                                 | 120                                        | 90   | 20            | 40             | 30    | —                         |
| Максимальный                                | 480                                        | 560  | 180           | 160            | 120   | —                         |

В этой же таблице указана прибыль от реализации одного изделия каждого вида, приведено общее количество ресурсов данного вида, имеющееся в распоряжении фабрики, а также указано (на основе изучения спроса), в пределах каких объёмов может изготавливаться каждый вид продукции.

Определить план производства продукции мебельной фабрикой, согласно которому прибыль от её реализации является максимальной. Используя пакет PER, найти решение задачи, а также провести послеоптимизационный анализ полученного решения.

### ***Вариант 13***

Из трёх видов сырья необходимо составить смесь, в состав которой должно входить не менее 26 ед. химического вещества А, 30 ед. — вещества В и 24 ед. — вещества С. Количество единиц химического вещества, содержащегося в 1 кг сырья каждого вида, указано в таблице 3.12. В ней же приведена цена 1 кг сырья каждого вида.

Составить смесь, содержащую не менее необходимого количества данного вида и имеющую минимальную стоимость.

Таблица 3.12 — Исходные данные (вариант 13)

| Вещество               | Количество единиц вещества, содержащегося в 1 кг сырья вида |   |   |   |
|------------------------|-------------------------------------------------------------|---|---|---|
|                        | 1                                                           | 2 | 3 | 4 |
| A                      | 1                                                           | 1 | — | 4 |
| B                      | 2                                                           | — | 3 | 5 |
| C                      | 1                                                           | 2 | 4 | 6 |
| Цена 1 кг сырья (руб.) | 5                                                           | 6 | 7 | 8 |

**Вариант 14**

Стальные прутья длиной 110 см необходимо разрезать на заготовки длиной 45, 35 и 50 см. Требуемое количество заготовок данного вида составляет соответственно 40, 30 и 20 шт. Возможные варианты разреза и величина отходов при каждом из них приведены в таблице 3.13.

Таблица 3.13 — Исходные данные (вариант 14)

| Длина заготовки (см)  | Вариант разреза |    |    |   |    |    |
|-----------------------|-----------------|----|----|---|----|----|
|                       | 1               | 2  | 3  | 4 | 5  | 6  |
| 45                    | 2               | 1  | 1  | — | —  | —  |
| 35                    | —               | 1  | —  | 3 | 1  | —  |
| 50                    | —               | —  | 1  | — | 1  | 2  |
| Величина отходов (см) | 20              | 30 | 15 | 5 | 25 | 10 |

Определить, сколько прутьев по каждому из возможных вариантов следует разрезать, чтобы обеспечить нужное количество заготовок каждого вида при минимальных отходах.

Как изменится модель и решение задачи, если из заготовок выпускаются комплекты: 2 заготовки по 45 см, 3 заготовки по 35 см, 1 заготовка по 50 см.

Максимизируется число комплектов. Число прутьев, которое имеется, взять из решения первоначальной задачи. Как при этом изменятся отходы?

**Вариант 15**

Министерству необходимо составить план развития каждого из  $m$  предприятий, выпускающих однородную продукцию. Число возможных вариантов развития  $i$ -го предприятия различно и равно  $n_i$ . Реализация  $j$ -го варианта развития  $i$ -го предприятия ( $j = 1, n$ ) требует капитальных затрат, равных  $K_{ij}$ , и обеспечивает выпуск продукции в объеме  $b_{ij}$  единиц. При этом экономический эффект от капитальных вложений на развитие  $i$ -го предприятия по  $j$ -му варианту равен  $c_{ij}$ . Учитывая, что необходимо выпустить продукции в количестве  $B$  единиц и что общая величина капиталовложений ограничена и равна  $K$ , составить такой план развития предприятий, при котором экономический эффект от реализации выбранных вариантов развития предприятий является максимальным.

$$K = 10$$

$$B = 40$$

$$K_{ij} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \text{ млн руб.}, \quad b_{ij} = \begin{pmatrix} 15 & 20 & 10 \\ 30 & 12 & 17 \\ 18 & 21 & 19 \end{pmatrix}, \quad c_{ij} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Как изменится решение, если  $K$  и  $B$  уменьшатся на 20 %.

**Вариант 16**

В аэропорту для перевозки пассажиров по  $n$  маршрутам может быть использовано  $m$  типов самолётов. Вместимость самолёта  $i$ -го типа равна  $a_i$  человек, а количество пассажиров, перевозимых по  $j$ -му маршруту за сезон, составляет  $b_j$  человек. Затраты, связанные с использованием самолёта  $i$ -го типа на  $j$ -ом маршруте, составляет  $c_{ij}$  руб.

Определить, сколько самолётов данного типа и на каком из маршрутов следует использовать, чтобы удовлетворить потребности в перевозках при наименьших общих затратах.

$$a_1 = 100$$

$$a_2 = 150$$

$$a_3 = 200$$

$$b_1 = 10 \text{ т}$$

$$b_2 = 20 \text{ т}$$

$$b_3 = 8 \text{ т}$$

$$b_4 = 30 \text{ т}$$

$$C_{ij} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & 6 \\ 5 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Подсчитать количество самолетов каждого типа в оптимальном решении. Как изменится решение, если самолетов 2-го типа есть только 100, а 3-го типа меньше 100.

### **Вариант 17**

Пароход может быть использован для перевозки 11 наименований груза, масса, объём и цена единицы каждого из которых приведены в таблице 3.14.

Таблица 3.14 — Исходные данные (вариант 17)

| Параметры<br>единицы груза | Номер груза |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|----------------------------|-------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
|                            | 1           | 2   | 3   | 4   | 5   | 6   | 7   | 8   | 9   | 10  | 11  |
| Масса (т)                  | 80          | 62  | 92  | 82  | 90  | 60  | 81  | 83  | 86  | 65  | 83  |
| Объём (м³)                 | 100         | 90  | 96  | 110 | 120 | 80  | 114 | 60  | 106 | 114 | 86  |
| Цена (тыс. руб.)           | 4,4         | 2,7 | 3,2 | 2,8 | 2,7 | 2,8 | 3,3 | 3,5 | 4,7 | 3,9 | 4,0 |

На пароход может быть погружено не более 800 т груза общим объёмом, не превышающим 600 м³. Определить, сколько единиц каждого груза следует поместить на пароход так, чтобы общая стоимость размещённого груза была максимальной. Как изменится решение, если количество единиц каждого груза ограничено величинами соответственно: 2; 1; 4; 2; 2; 3; 4; 4; 4; 3; 3?

**Вариант 18**

Из листового проката нужно выкроить заготовки четырёх видов. Один лист длиной 184 см можно разрезать на заготовки длиной 45, 50, 65 и 85 см. Всего заготовок каждого вида необходимо соответственно 90, 96, 88 и 56 шт. Способы разреза одного листа на заготовки и величина отходов при каждом способе приведены в таблице 3.15.

Определить, какое количество листов по каждому из способов следует разрезать, чтобы получить нужное количество заготовок данного вида при минимальных общих отходах.

Таблица 3.15 — Исходные данные (вариант 18)

| Длина<br>заготовки (см)  | Количество заготовок, выкраиваемых из одного листа<br>при разрезе способом |    |    |   |    |   |    |   |    |    |    |    |    |
|--------------------------|----------------------------------------------------------------------------|----|----|---|----|---|----|---|----|----|----|----|----|
|                          | 1                                                                          | 2  | 3  | 4 | 5  | 6 | 7  | 8 | 9  | 10 | 11 | 12 | 13 |
| 45                       | 4                                                                          | 2  | 2  | 2 | 1  | 1 | 1  | 1 | —  | —  | —  | —  | —  |
| 50                       | —                                                                          | 1  | —  | — | 2  | — | 1  | 1 | 3  | 2  | 1  | —  | —  |
| 65                       | —                                                                          | —  | 1  | — | —  | 2 | 1  | — | —  | 1  | 2  | 1  | —  |
| 85                       | —                                                                          | —  | —  | 1 | —  | — | —  | 1 | —  | —  | —  | 1  | 2  |
| Величина<br>отходов (см) | 4                                                                          | 44 | 29 | 9 | 39 | 9 | 24 | 4 | 34 | 19 | 4  | 34 | 14 |

**Вариант 19**

Имеются одинаковые заготовки, которые могут быть раскроены тремя способами. Из имеющихся заготовок нужно получить не менее 10 деталей 1-го типоразмера, не менее 8-ми деталей 2-го типоразмера и не менее 10-ти деталей 3-го типоразмера. Способы раскроя определяются матрицей вида:

$$A = [a_{ij}] = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь  $a_{ij}$  — количество деталей типоразмера  $i$ , получаемое из одной заготовки путём её раскроя способом  $j$ .

Количество заготовок, раскраиваемых каждым способом, должно быть целым и не превышать 4-х. Отходы от раскроя одной заготовки для каждого из способов составляют 4, 5 и 5 (усл. единиц). Предложить вариант раскроя с минимальными суммарными отходами. Определить величину этих отходов.

Фирма предполагает продавать выкроенные детали по ценам \$4, \$6 и \$2,5 соответственно для 1-го, 2-го и 3-го типоразмера. При этом потери от процедуры раскроя оцениваются величиной \$0,3 на условную единицу отходов. Оптимизируйте процесс раскроя, исходя из соображений получения максимальной прибыли.

### **Вариант 20**

Рассматриваются пять проектов, которые могут быть осуществлены в течение последующих трёх лет. Ожидаемые величины прибыли от реализации каждого из проектов и распределение необходимых капиталовложений по годам (в тыс. долларов) приведены в таблице 3.16.

Таблица 3.16 — Исходные данные (вариант 20)

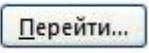
| Проект                              | Распределение капиталовложений |       |       | Прибыль |
|-------------------------------------|--------------------------------|-------|-------|---------|
|                                     | Год 1                          | Год 2 | Год 3 |         |
| 1                                   | 5                              | 1     | 8     | 20      |
| 2                                   | 4                              | 7     | 10    | 40      |
| 3                                   | 3                              | 9     | 2     | 20      |
| 4                                   | 7                              | 4     | 10    | 15      |
| 5                                   | 8                              | 6     | 1     | 30      |
| Максимальный объем капиталовложений | 25                             | 25    | 25    |         |

Предполагается, что каждый утверждённый проект будет реализован за трёхлетний период.

Требуется выбрать совокупность проектов, которой соответствует максимум суммарной прибыли. Как изменится максимум суммарной прибыли, если максимальный объем капиталовложений уменьшать от 25 до 0 или увеличивать от 25 до бесконечности? Построить график.

## 4 РЕШЕНИЕ ЗЛП С ПОМОЩЬЮ MS EXCEL

Для решения задач оптимизации в MS Excel используют надстройку «Поиск решения». Алгоритмы, заложенные в эту надстройку, позволяют вводить ограничения для задачи и решать оптимизационные задачи, такие, как транспортные задачи и задачи линейного программирования.

Для запуска надстройки «Поиск решения» в Excel 2003 необходимо выбрать в строке «Меню-Сервис-Надстройки» — установить флажок против команды Поиск решения, если такая строка отсутствует, то необходимо нажать на строку с командой: «Надстройки» и поставить отметку против строки «Поиск решения» (рис. 4.1). Тому, кто использует Excel 2007, необходимо открыть окно Параметры Excel, в котором следует выбрать (слева) кнопку , затем в нижней части окна найти: Управление:  . После того, как будет нажата кнопка: Перейти..., поставить флажок против команды Поиск решения, как показано на рис. 4.1. После закрытия окна «Надстройки» на ленте в закладке «Данные» появится инструмент «Анализ», внутри которого будет отображена команда: «Поиск решения». Все дальнейшие действия для любой версии MS Excel будут аналогичными.

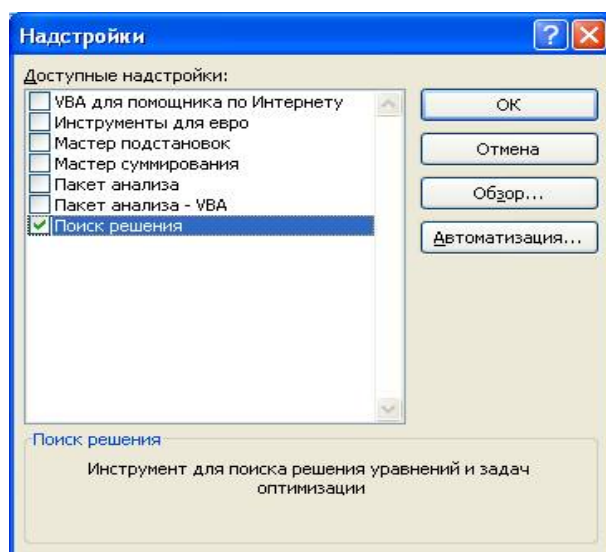


Рис. 4.1 — Окно вызова «Поиск решения»

Для освоения правил работы с надстройкой Excel — *Поиск решения* решим практическую задачу, постановка которой заключается в следующем: требуется определить оптимальные размеры объемов выпуска ассортимента продукции, обеспечивающие максимальную суммарную прибыль, с учетом имеющихся ресурсов на складе, которые вовлечены в производство.

Формализация постановки задачи начинается с ввода обозначений для будущей модели:

- пусть намечается выпуск 3-х видов продукции: П1, П2, П3, ( $j = 1, \dots, 3$ );
- для производства продукции используется шесть видов деталей (ресурсов) ( $i = 1, \dots, 6$ );
- известны нормы расхода деталей (ресурсов) на изготовление единицы каждого вида продукции  $a_{ij}$  [ед. детал./ед. прод.];
- каждый вид деталей (ресурса) ограничен  $b_i$  [ед. детал.] наличием на складе;
- предполагается, что от реализации единицы продукции предприятие получает прибыль  $P_j$  [ден. ед./ед. прод.].

Исходные данные оптимизационной задачи сведены в таблице 4.1.

Таблица 4.1 — Исходные данные

| Наименование деталей на складе                  | Наличие на складе | Вид продукции |           |           |
|-------------------------------------------------|-------------------|---------------|-----------|-----------|
|                                                 |                   | Телевизор     | DVD-плеер | Компьютер |
| Шасси                                           | 450               | 1             | 0         | 1         |
| Динамик                                         | 340               | 4             | 2         | 1         |
| Блок питания                                    | 500               | 1             | 1         | 1         |
| Монитор                                         | 125               | 1             | 0         | 1         |
| Электр. плата                                   | 270               | 2             | 1         | 1         |
| Процессор                                       | 470               | 0             | 1         | 1         |
| Прибыль от реализации единицы продукции (руб.): |                   | 75            | 50        | 35        |

Введем обозначения для построения математической модели:

Через  $X_j$  — обозначим неизвестное, которое показывает возможное количество выпускаемой продукции  $j$ -ого вида при использовании  $(a_{ij})$  существующих норм единицы деталей (ресурса) на выпуск определенного вида продукции, при ограничениях на общее использование ресурса  $b_i$ . Добавим дополнительное условие, которое показывает, что изготавливаемая продукция должна быть выпущена всех видов. Это значит, что все переменные  $X_j$  должны быть не менее 1 ( $X_1 \geq 1, X_2 \geq 1, X_3 \geq 1$ ). Отметим, что если не имеет значение, какие виды продукции следует выпускать при поиске оптимального использования ресурсов, то в ограничениях следует указать не 1, а 0. Обозначив через  $Z$  величину суммарной прибыли при организации выпуска продукции, можно записать следующую математическую модель:

$$\begin{aligned} \max Z &= 450 \cdot X_1 + 125 \cdot X_2 + 340 \cdot X_3 \\ 1 \cdot X_1 + 0 \cdot X_2 + 1 \cdot X_3 &\leq 450 && \text{— Шасси} \\ 4 \cdot X_1 + 2 \cdot X_2 + 1 \cdot X_3 &\leq 340 && \text{— Динамик} \\ 1 \cdot X_1 + 1 \cdot X_2 + 1 \cdot X_3 &\leq 500 && \text{— Блок питания} \\ 1 \cdot X_1 + 0 \cdot X_2 + 1 \cdot X_3 &\leq 125 && \text{— Монитор} \\ 2 \cdot X_1 + 1 \cdot X_2 + 1 \cdot X_3 &\leq 270 && \text{— Электронная плата} \\ 0 \cdot X_1 + 1 \cdot X_2 + 1 \cdot X_3 &\leq 470 && \text{— Процессор} \\ X_1 \geq 1, X_2 \geq 1, X_3 \geq 1 &&& \text{— Ограничения для выпуска продукции} \end{aligned}$$

## Создание модели в Excel

### 1. Открыть табличный процессор Excel.

Подготовить начальную таблицу для размещения описаний задачи, исходных данных, ограничений, коэффициентов целевой функции, место для проведения вычислений и сохранения результатов. Начальная таблица, как она будет выглядеть в Excel, представлена на рис. 4.2. Столбец D введен для занесения результатов в ячейки D5:D10. В этих ячейках

будут отображаться результаты вычислений, т. е. сколько на самом деле будет задействовано единиц каждого вида ресурса для выпуска всей номенклатуры продукции. Добавить в таблицу новые обозначения, которые понадобятся для ввода начальных значений и вывода результатов. Для этой цели:

- в строке 11 (ячейки E11:G11) ввести коэффициенты для целевой функции, ее название — «Прибыль от реализации единицы продукции»;
- в строке 12 создать заголовок — «Значения  $X_j$  при решении задачи», ячейки E12:G12 понадобятся для ввода формул;
- можно выделить ячейку E13, в которой будет формироваться результат, поэтому в строке 13 сделана запись — «Конечная прибыль от реализации продукции», это и есть значение целевой функции.

| Решение оптимизационной задачи с линейными ограничениями |                                           |                   |                           |               |           |           |
|----------------------------------------------------------|-------------------------------------------|-------------------|---------------------------|---------------|-----------|-----------|
|                                                          | Наименование деталей на складе            | Наличие на складе | Фактическое использование | Вид продукции |           |           |
|                                                          |                                           |                   |                           | Телевизор     | DVD плеер | Компьютер |
| 5                                                        | Шасси                                     | 450               |                           | 1             | 0         | 1         |
| 6                                                        | Динамик                                   | 340               |                           | 4             | 2         | 1         |
| 7                                                        | Блок питания                              | 500               |                           | 1             | 1         | 1         |
| 8                                                        | Монитор                                   | 125               |                           | 1             | 0         | 1         |
| 9                                                        | Электронная плата                         | 270               |                           | 2             | 1         | 1         |
| 10                                                       | Процессор                                 | 470               |                           | 0             | 1         | 0         |
| 11                                                       | Ограничения для выпуска продукции:        |                   |                           |               |           |           |
| 12                                                       | Прибыль от реализации единицы продукции:  |                   |                           | 75            | 30        | 55        |
| 13                                                       | Значения $X_j$ при решении задачи:        |                   |                           |               |           |           |
| 14                                                       | Конечная прибыль от реализации продукции: |                   |                           |               |           |           |

Рис. 4.2 — Окно ввода исходных данных

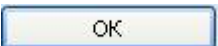
## 2. Ввести формулы в таблицу с начальными данными.

Для решения оптимизационной задачи методом линейного программирования необходимо математическую модель записать в терминах Excel, т. е. в определенные ячейки предварительно необходимо ввести формулы. В таблице 4.2 указаны координаты ячеек для рассматриваемого примера, математическая запись уравнений и формулы, которые введены в соответствующие ячейки в табличном процессоре Excel.

Таблица 4.2 — Перечень формул для установки в ячейках таблицы Excel

| Ячейка | Математическая запись                           | Формула                            |
|--------|-------------------------------------------------|------------------------------------|
| D5     | $1 \cdot X_1 + 0 \cdot X_2 + 1 \cdot X_3$       | =E\$13*E5+\$F\$13*F5+\$G\$13*G5    |
| D6     | $4 \cdot X_1 + 2 \cdot X_2 + 1 \cdot X_3$       | =E\$13*E6+\$F\$13*F6+\$G\$13*G6    |
| D7     | $1 \cdot X_1 + 1 \cdot X_2 + 1 \cdot X_3$       | =E\$13*E7+\$F\$13*F7+\$G\$13*G7    |
| D8     | $1 \cdot X_1 + 0 \cdot X_2 + 1 \cdot X_3$       | =E\$13*E8+\$F\$13*F8+\$G\$13*G8    |
| D9     | $2 \cdot X_1 + 1 \cdot X_2 + 1 \cdot X_3$       | =E\$13*E9+\$F\$13*F9+\$G\$13*G9    |
| D10    | $0 \cdot X_1 + 1 \cdot X_2 + 1 \cdot X_3$       | =E\$13*E10+\$F\$13*F10+\$G\$13*G10 |
| E11    | $X_1 \geq 1$                                    | >=1                                |
| G11    | $X_2 \geq 1$                                    | >=1                                |
| F11    | $X_3 \geq 1$                                    | >=1                                |
| E14    | $450 \cdot X_1 + 125 \cdot X_2 + 340 \cdot X_3$ | =E12*E13+F12*F13+G12*G13           |

## 3. Работа с надстройкой Excel — Поиск решения

- Вызвать окно: «Поиск решения» (рис. 4.1), нажать на кнопку .

- Ввести начальные значения  $X_j$  в ячейки E13:G13. Например, по двадцать единиц каждого вида изделия.

- Выделить курсором ячейку E14 с целевой функцией.
- Выбрать команду в меню Сервис-Поиск решения.

- В открывшемся диалоговом окне — *Поиск решения*, заполнить окна: «*Изменяя ячейки*» и «*Ограничения*» (можно проверить в диалоговом окне факт установки курсора на целевой ячейке, если требуется, то ее положение можно изменить). На рис. 4.3 показано всплывающее диалоговое окно «*Поиск решения*», в котором проведены все перечисленные подготовительные действия.

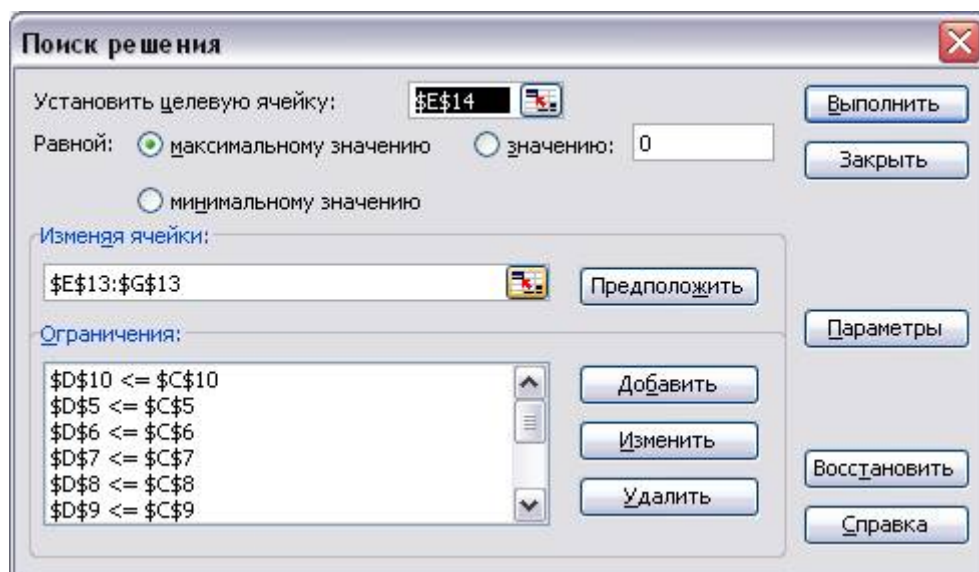
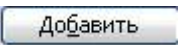


Рис. 4.3 — Окно «Поиск решения»

- Установить диапазон ячеек в строке всплывающего окна: «*Изменяя ячейки*», в которых будет отображаться результат с количеством номенклатуры  $X_j$  изделий. В рассматриваемом примере это будут ячейки E13:G13, которые должны быть фиксированными (перед координатами ячеек ставится знак \$).

- Отметить селекторную кнопку: «*Равной максимальному значению*», т. к. определяется максимальное использование ресурсов.

- В окно с наименованием «*Ограничения*» последовательно ввести все ограничения для уравнений модели. В данном примере ячейки C5:C10 содержат количество деталей на складе, которые потребуются для выпуска всей номенклатуры продукции, а в ячейки D5:D10 были вне-

сены формулы модели по каждому виду комплектующей, следовательно, суммарное количество используемых деталей не должно превышать величину, указанную в правой части уравнения. Для ввода ограничений необходимо нажать на кнопку . После выполненного действия будет открыто диалоговое окно с наименованием «*Добавление ограничений*», которое показано на рис. 4.4. В окне видно, что вычисляемое значение в ячейке D5 должно быть меньше или равно установленной величине в ячейке C5.

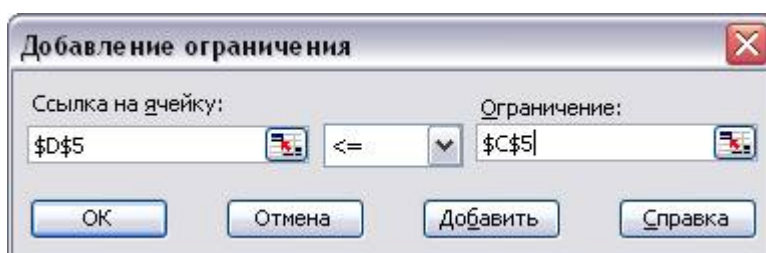
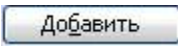
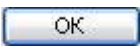


Рис. 4.4 — Окно «Добавление ограничений»

- Если требуется ввести еще ограничения, то нажать на кнопку , в противном случае, нажать на кнопку .

- Ввести ограничения на выпуск номенклатуры продукции в ячейки E13:G13 (в примере всего три вида продукции). Так, в качестве примера на рис. 4.5 показано диалоговое окно для добавления ограничений, в котором указано, что вычисляемое значение в ячейке G13 должно быть более 1 единицы (это условие записано в исходной таблице для изделия — Компьютеры).

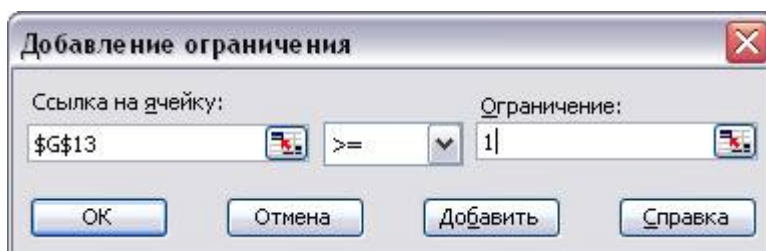


Рис. 4.5 — Окно «Добавление ограничений» на число компьютеров

- Ввести ограничения на форму «Представление результатов». В данной постановке задачи подразумевается, что количество изделий не может быть дробной величиной, а должно отображаться только целыми числами, следовательно, при выполнении расчетов это обстоятельство необходимо учитывать. На рис. 4.6 показано диалоговое окно для добавления ограничений, в котором для ячейки E13 (в ней отображается количество единиц изделия) установлено условие ‘цел’, что означает целочисленное решение. В раскрывающемся списке выбирается необходимое условие.

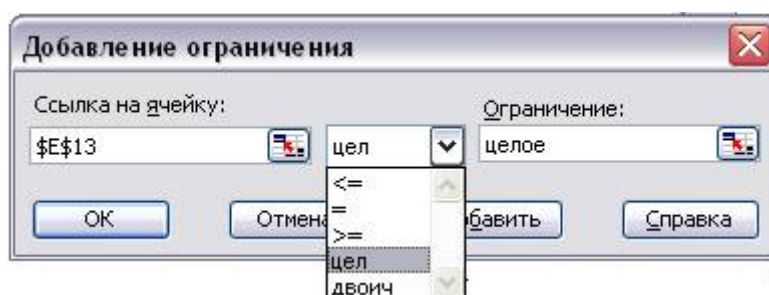


Рис. 4.6 — Окно «Добавление ограничений» на целое число компьютеров

- Установить параметры для оптимизационной задачи, для чего в диалоговом окне: «Поиск решения» нажать на кнопку Параметры. После чего откроется диалоговое окно с наименованием «Параметры поиска решения», представленное на рис. 4.7.

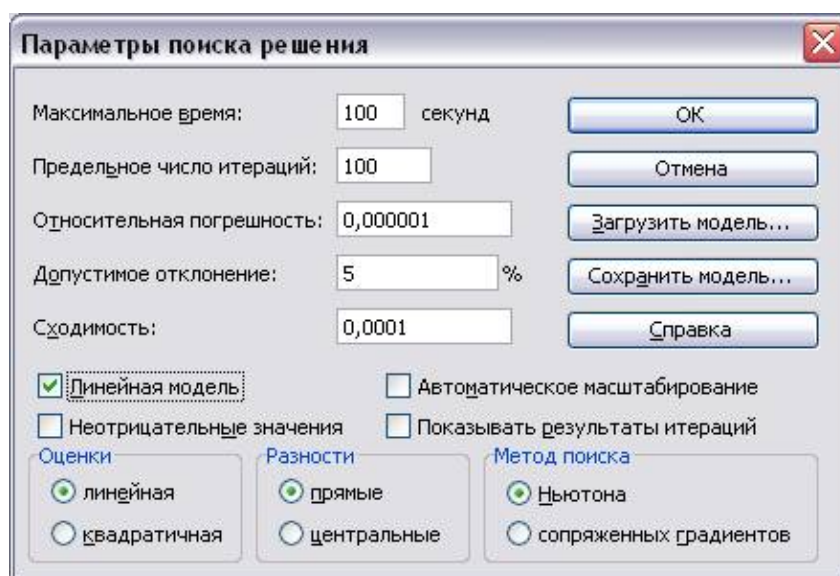
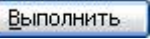


Рис. 4.7 — Окно «Параметры поиска решения»

- В окне установить пометку: «*Линейная модель*» и закрыть кнопкой ОК.
- Провести вычисления, для чего в диалоговом окне «*Поиск решения*» нажать на кнопку . В том случае, если все данные введены правильно, а в вычисляемых ячейках существуют формулы, описанные в данной методике, появится диалоговое окно с наименованием: «*Результаты поиска решения*», которое представлено на рис. 4.8.

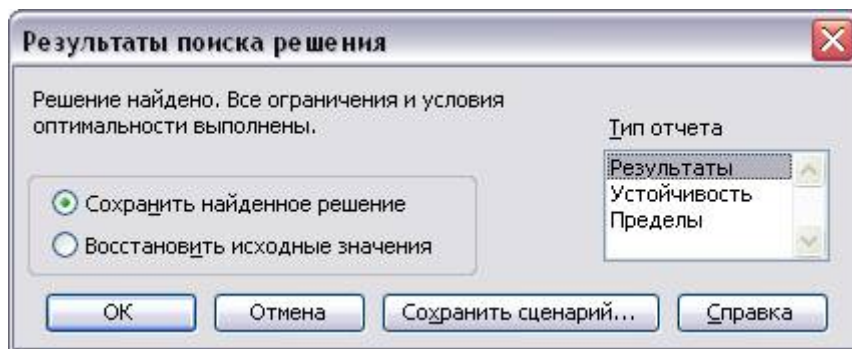


Рис. 4.8 — Окно «Результаты поиска решения»

Программа формирует три типа отчетов: *Результаты*, *Устойчивость* и *Пределы*. Если отметить любой из них или все вместе, а затем вызвать, то можно провести анализ исходных данных и конечных результатов, об этом будет сказано ниже. В том случае, если в окне «*Результаты поиска решения*» появится сообщение: «*Ошибка в модели. Проверьте правильность значений в ячейках и ограничениях*», то отчеты получить невозможно, а следует открыть окно «*Поиск решения*» (рис. 4.4) и проверить правильность установки знаков ограничений, наименования ячеек, в которых должна быть вычислена целевая функция и установлены начальные значения изменяемых ячеек. На рис. 4.9 показан лист Excel, который содержит исходные данные и результаты решения оптимизационной задачи методом линейного программирования по заданным начальным значениям и тем условиям, которые были установлены в соответствии с постановкой задачи.

Microsoft Excel - Поиск решения.xls

Файл Правка Вид Вставка Формат Сервис Данные Окно Справка Введите вопрос

Arial Cyr 10 Ж К Ч

H16

|    | A | B                                                        | C                 | D                         | E             | F         | G         | H |
|----|---|----------------------------------------------------------|-------------------|---------------------------|---------------|-----------|-----------|---|
| 1  |   | Решение оптимизационной задачи с линейными ограничениями |                   |                           |               |           |           |   |
| 2  |   |                                                          |                   |                           |               |           |           |   |
| 3  |   | Наименование деталей на складе                           | Наличие на складе | Фактическое использование | Вид продукции |           |           |   |
| 4  |   |                                                          |                   |                           | Телевизор     | DVD плеер | Компьютер |   |
| 5  |   | Шасси                                                    | 450               | 125                       | 1             | 0         | 1         |   |
| 6  |   | Динамик                                                  | 340               | 340                       | 4             | 2         | 1         |   |
| 7  |   | Блок питания                                             | 500               | 231                       | 1             | 1         | 1         |   |
| 8  |   | Монитор                                                  | 125               | 125                       | 1             | 0         | 1         |   |
| 9  |   | Электронная плата                                        | 270               | 232                       | 2             | 1         | 1         |   |
| 10 |   | Процессор                                                | 470               | 106                       | 0             | 1         | 0         |   |
| 11 |   | Ограничения для выпуска продукции:                       |                   |                           | $\geq 1$      | $\geq 1$  | $\geq 1$  |   |
| 12 |   | Прибыль от реализации единицы продукции:                 |                   |                           | 75            | 30        | 55        |   |
| 13 |   | Значения Xj при решении задачи:                          |                   |                           | 1             | 106       | 124       |   |
| 14 |   | Конечная прибыль от реализации продукции:                |                   |                           | 10075         |           |           |   |
| 15 |   |                                                          |                   |                           |               |           |           |   |

Готово

Рис. 4.9 — Окно результатов решения

Анализ результатов. После того, как будет получено решение, требуется проанализировать результаты. Анализ помогает выработать управленческое решение, направленное на дальнейшую стратегию деятельности предприятия.

- Принятие решения о производственной программе может быть направлено на то, что следует изменить некоторые условия, например предприятие производитель имеет обязательства перед потребителем о поставке в текущем периоде 15-ти телевизоров. Следовательно, условие в ячейке E13 должно быть изменено (вместо 1 следует установить 15).

- Принятие решения о закупках комплектующих проводится в соответствии с полученным результатом, из которого видно, что при принятии программы выпуска номенклатуры изделий в соответствии с оптимальным планом потребуется определенное количество комплектующих.

- Принятие решения о цене на выпускаемую продукцию обосновывается при изменении прибыли (снижении цены на продукцию), для чего можно провести новые расчеты, изменив только величину прибыли от реализации единицы продукции.

| Наименование деталей на складе | Наличие на складе | Фактическое использование | Остаток на складе | % неиспользования |
|--------------------------------|-------------------|---------------------------|-------------------|-------------------|
| Шасси                          | 450               | 125                       | 325,00            | 72,22%            |
| Динамик                        | 340               | 340                       | 0,00              | 0,00%             |
| Блок питания                   | 500               | 231                       | 269,00            | 53,80%            |
| Монитор                        | 125               | 125                       | 0,00              | 0,00%             |
| Электронная плата              | 270               | 232                       | 38,00             | 14,07%            |
| Процессор                      | 470               | 106                       | 364,00            | 77,45%            |

Рис. 4.10 — Окно анализа ресурсов

На рис. 4.10 представлена таблица с результатами проведенных вычислений по заданным параметрам с добавлением дополнительных граф, в которых отражается информация о тех потерях, которые получит предприятие-производитель.

Кроме того, для анализа можно использовать стандартные средства, а именно при заполнении окна «*Результаты поиска решения*» (рис. 8) достаточно отметить тип отчета (напомним, что при решении целочисленных задач отчет по устойчивости и отчет по пределам не составляются). Когда будет отмечен тип отчета и нажата кнопка ОК, тогда в текущей книге добавится новый лист (появится ярлык) с наименованием: Отчет по результатам. Внешний вид отчета показан на рис. 4.11. Отчет с наименовани-

ем «Результаты», который формируется системой, состоит из трех таблиц. Первые две таблицы понятны и не требуют комментариев.

Последняя таблица похожа на ту, которая была построена самостоятельно (рис. 11). При анализе результатов достаточно взглянуть на столбец «Статус» таблицы на рис. 4.11. В том случае, если ресурс был использован полностью, система записывает в соответствующую ячейку текстовое сообщение «Связанное», в противном случае появляется текст «Не связан». Следовательно, получен ответ о недоиспользованных ресурсах, что позволяет внести новые ограничения и решить задачу заново.

Microsoft Excel - Понск решения.xls

Введите вопрос

Аria1 Cyr 10 Ж К Ч

E33 fx

1 Microsoft Excel 11.0 Отчет по результатам

2 Рабочий лист: [Понск решения.xls]Понск решения

3 Отчет создан: 03.10.2010 21:32:12

4

5

6 Целевая ячейка (Максимум)

| Ячейка  | Имя                                           | Исходное значение | Результат |
|---------|-----------------------------------------------|-------------------|-----------|
| \$E\$14 | Конечная прибыль от реализации продукции: >=1 | 9725              | 10075     |

11 Изменяемые ячейки

| Ячейка  | Имя                                             | Исходное значение | Результат |
|---------|-------------------------------------------------|-------------------|-----------|
| \$E\$13 | Значения X <sub>j</sub> при решении задачи: >=1 | 15                | 1         |
| \$F\$13 | Значения X <sub>j</sub> при решении задачи: >=1 | 85                | 106       |
| \$G\$13 | Значения X <sub>j</sub> при решении задачи: >=1 | 110               | 124       |

18 Ограничения

| Ячейка  | Имя                                             | Значение | Формула          | Статус     | Разница |
|---------|-------------------------------------------------|----------|------------------|------------|---------|
| \$D\$5  | Шасси Фактическое использование                 | 125      | \$D\$5<=\$C\$5   | не связан. | 325     |
| \$D\$6  | Динамик Фактическое использование               | 340      | \$D\$6<=\$C\$6   | связанное  | 0       |
| \$D\$7  | Блок питания Фактическое использование          | 231      | \$D\$7<=\$C\$7   | не связан. | 269     |
| \$D\$8  | Монитор Фактическое использование               | 125      | \$D\$8<=\$C\$8   | связанное  | 0       |
| \$D\$9  | Электронная плата Фактическое использование     | 232      | \$D\$9<=\$C\$9   | не связан. | 38      |
| \$D\$10 | Процессор Фактическое использование             | 354      | \$D\$10<=\$C\$10 | не связан. | 116     |
| \$G\$13 | Значения X <sub>j</sub> при решении задачи: >=1 | 124      | \$G\$13=целое    | связанное  | 0       |
| \$F\$13 | Значения X <sub>j</sub> при решении задачи: >=1 | 106      | \$F\$13=целое    | связанное  | 0       |
| \$E\$13 | Значения X <sub>j</sub> при решении задачи: >=1 | 1        | \$E\$13=целое    | связанное  | 0       |
| \$F\$13 | Значения X <sub>j</sub> при решении задачи: >=1 | 106      | \$F\$13>=1       | не связан. | 105     |
| \$G\$13 | Значения X <sub>j</sub> при решении задачи: >=1 | 124      | \$G\$13>=1       | не связан. | 123     |
| \$E\$13 | Значения X <sub>j</sub> при решении задачи: >=1 | 1        | \$E\$13>=1       | связанное  | 0       |

Готово

Рис. 4.11 — Окно анализа результатов решения

*Задание:* Провести изменения в условиях задачи, заменив количество видов продукции и наличия деталей на складе. Попробуйте применить надстройку «Подбор параметров» для изменяемой ячейки с количеством деталей на складе для условия, что конечная прибыль должна составлять 15000 руб.

### **Вопросы для самопроверки**

1. Каким образом представляют условия постановки задачи со многими неизвестными?
2. Почему в условия решения задачи вводят дополнительные переменные вида  $X_i > 0$ ?
3. Как вызвать инструментальное средство для решения оптимизационных задач «Поиск решения»?
4. Какие шаги следует предпринять, чтобы ввести параметры уравнений и ограничений в окне «Поиск решения»?

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Турунтаев Л. П. Исследование операций : учебное пособие / Л. П. Турунтаев. — Томск : ФДО, ТУСУР, 2016. — 138 с.
2. Шикин Е. В. Исследование операций : учебник для вузов / Е. В. Шикин. — М. : Проспект, 2006. — 275 с.
3. Кремер Н. Ш. Исследование операций в экономике : учеб. пособие для вузов / Н. Ш. Крамер. — М. : ЮНИТИ, 2006. — 402 с.
4. Партыка Т. Л. Математические методы : учебник для вузов / Т. Л. Партыка, И. И. Попов. — 2-е изд., испр. и доп. — М. : Форум, 2007. — 463 с.
5. Турунтаев Л. П. Оптимизация и математические методы принятия решений : учеб. пособие / Л. П. Турунтаев. — Томск : ТМЦДО, 2010 — Ч. 1. — 210 с.