

Контрольная работа по дисциплине «Теория массового обслуживания»

Контрольная работа для заочной формы обучения (включая дистанционную) по направлению подготовки 27.03.04 Управление в технических системах выполняется каждым обучающимся индивидуально в соответствии с вариантам задания.

Вариант задания соответствует вашему номеру в списке группы.

Контрольная работа оформляется по требованиям к оформлению выпускной квалификационной работы.

Шкала оценки 0-100% от объёма выполненного задания и сроков сдачи работы. Так работа, выполненная не в полном объёме и/или работа, сданная не в срок, не может быть оценена максимальным количеством баллов.

Структура отчёта по контрольной работе:

- 1) Титульный лист
- 2) Задание согласно варианту
- 3) Теоретическая часть
- 4) Вывод – Практическая значимость теоретической части (сформулировать своими словами)
- 5) Практическая часть (с пошаговым описанием хода решения)

Изменять структуру отчёта запрещено!

Таблица 1 – Варианты заданий

Номер варианта	Теоретическая часть (см. таблица 2)	Практическая часть (см. таблица 3)
1	1, 25	14, 2
2	3, 22	14, 10
3	1, 4	15, 17
4	3, 10	14, 5
5	2, 15	16, 18
6	3, 16	15, 19
7	1, 24	14, 12
8	2, 19	16, 2
9	3, 5	14, 20
10	1, 9	14, 13
11	2, 7	15, 1
12	3, 12	16, 13
13	1, 14	14, 1
14	2, 20	15, 3
15	3, 23	16, 8

16	3, 6	16, 9
17	2, 17	14, 6
18	1, 21	15, 18
19	2, 13	16, 11
20	3, 8	15, 20
21	2, 11	16, 6
22	1, 18	15, 8
23	3, 7	16, 5
24	2, 8	14, 11
25	1, 23	15, 7
26	3, 13	16, 19
27	2, 22	14, 7
28	1, 7	15, 10
29	3, 14	15, 4
30	1, 8	14, 3

Таблица 2 – Теоретическая часть варианта заданий

Номер	Задание
1	Предмет, цель и задачи теории массового обслуживания
2	Классификация систем массового обслуживания. Характеристики качества.
3	Типовая структура системы массового обслуживания
4	Процессы гибели и размножения в системах массового обслуживания
5	Марковский поток событий
6	Системы массового обслуживания с потерями. Второе распределение Эрланга.
7	Одноканальная система с отказами. Характеристики качества обслуживания.
8	N-канальная система с отказами. Характеристики качества обслуживания.
9	Очередь. Закон образования очереди.
10	Системы массового обслуживания с ожиданием и с ограниченным числом мест ожидания (ограничение на длину очереди). Характеристики качества обслуживания.
11	Системы массового обслуживания с ожиданием и с неограниченным временем ожидания. Характеристики качества обслуживания.
12	Системы массового обслуживания с ожиданием и с ограничением времени пребывания заявки в очереди. Характеристики качества обслуживания.
13	Системы массового обслуживания с потерями. Теорема Пальма.
14	Системы массового обслуживания с потерями. Первое распределение Эрланга.
15	История зарождения и развития систем массового обслуживания
16	Родоначальник систем массового обслуживания. Его вклад в развитие данной теории.
17	Типовая структура системы массового обслуживания
18	Русские учёные, которые внесли значительный вклад в развитие теории массового обслуживания.
19	Типовая структура системы массового обслуживания
20	Виды потоков событий, их характеристики
21	А.Н. Колмагоров, вклад в развитие систем массового обслуживания. Уравнение Колмагорова.

22	Основные характеристики многоканальных систем массового обслуживания
23	Основные характеристики одноканальных систем массового обслуживания
24	Цепи Маркова
25	Формула Пуассона, её применение в теории систем массового обслуживания

Таблица 3 – Практическая часть варианта задания

Номер	Задание
1	Дан пуассоновский поток с параметром 2 мин^{-1} . Найти вероятность того, что длина интервала между соседними требованиями составляет от 1 до 2 минут.
2	Производится наложение («суперпозиция») двух простейших потоков с интенсивностями $\lambda_1 = 2$ и $\lambda_2 = 3$. Будет ли поток, получившийся в результате наложения, простейшим, и если да, то с какой интенсивностью?
3	Производится случайное прореживание простейшего потока событий с интенсивностью $\lambda = 3$; каждое событие, независимо от других, с вероятностью p сохраняется в потоке, а с вероятностью $1-p$ выбрасывается. Каким будет поток, получающийся в результате прореживания простейшего потока?
4	Поток машин, идущих по шоссе в одном направлении, представляет собой простейший поток с интенсивностью 2 машины в минуту. Человек выходит на шоссе, чтобы остановить первую попавшуюся машину, идущую в данном направлении. Найти закон распределения времени T , в течение которого ему придется ждать машину; определить математическое ожидание и среднее квадратичное отклонение.
5	Поток машин, идущих по шоссе в одном направлении, представляет собой простейший поток с интенсивностью 4 машины в минуту. Шоссе имеет развилку в два направления. Вероятность движения машин в первом направлении равна 0,12, а во втором – 0,88. Определить интенсивности движения автомобилей в обоих направлениях.
6	Рассмотрим простейший поток с нестационарным параметром, изменяющимся по закону $\lambda(t) = 1 + 0,5 \cos(6\pi t)$. Параметр является периодическим, его период равен $1/3$. Найти вероятность отсутствия требований на отрезке $[1;9]$.
7	Компьютерный класс связан с каналом Интернет через 10-канальный концентратор. Интенсивности передачи данных по каждому из 10 каналов равны соответственно 540 бит/с, 120 бит/с, 40 бит/с, 170 бит/с, 350 бит/с, 60 бит/с, 742 бит/с, 153 бит/с, 500 бит/с, 100 бит/с. Поток данных подчиняется пуассоновскому закону распределения. Определить интенсивность передачи данных в канале Интернет.
8	По железной дороге мимо наблюдателя движется в одном направлении простейший поток поездов. Известно, что вероятность отсутствия поездов в течение 10 минут равна 0,8. Требуется найти вероятность того, что за 20 мин мимо наблюдателя пройдет не более трех поездов.
9	Производится случайное прореживание простейшего потока событий с интенсивностью $\lambda=4$; каждое событие, независимо от других, с вероятностью $p=0,6$ сохраняется в потоке, а с вероятностью $1-p$ выбрасывается. Каким будет поток, получающийся в результате прореживания простейшего потока?
10	В пункт текущего ремонта компьютеров поступают требования на ремонт. Поток требований можно считать простейшим с интенсивностью $\lambda=0,307$. Найти вероятность того, что за час не поступит ни одного требования (компьютера) на ремонт.
11	Время обслуживания для аппаратов некоторой системы массового обслуживания распределено по показательному закону $F(t) = 1 - e^{-1,5t}$, где t - время в минутах. Найти вероятность того, что обслуживание продлится не более 15 мин.
12	Производится разбиение случайного простейшего потока событий с интенсивностью $\lambda=9,4$ на три потока. Вероятности попадания событий в тот или иной поток соответственно равны $p_1=0,2$, $p_2=0,54$, $p_3=0,26$. Определить интенсивности каждого получившегося потока в результате разбиения.
13	Компьютерный класс связан с каналом Интернет через 5-канальный концентратор. Интенсивности передачи данных по каждому из 5 каналов равны соответственно 541 бит/с, 110 бит/с, 44 бит/с, 171 бит/с, 356 бит/с. Поток данных подчиняется пуассонов-

	скому закону распределения. Определить интенсивность передачи данных в канале Интернет.																																																																																				
14	Результаты регистрации входного потока посетителей магазина в течение дня и значения его характеристик представлены в таблице ниже. Дайте подробную характеристику представленного в таблице потока. Рассчитайте итоговые значения $\lambda_{\max}$ и $\lambda_{\min}$. Найдите среднее значение интенсивности потока посетителей в течение дня. Можно ли вычислить интенсивность потока посетителей для каждого часа работы магазина? Ответ на вопрос обоснуйте. <table><tr><th>Интервал времени, ч</th><th>max кол-во покупателей, чел.</th><th>max интенсивность потока $\lambda_{\max}$, мин</th><th>min кол-во покупателей, чел.</th><th>min интенсивность потока $\lambda_{\min}$, мин</th><th>Среднее кол-во покупателей, чел.</th></tr><tr><td>8 – 9</td><td>300</td><td>5</td><td>200</td><td>3,3</td><td>250</td></tr><tr><td>9 – 10</td><td>500</td><td>8,3</td><td>400</td><td>6,6</td><td>450</td></tr><tr><td>10 – 11</td><td>800</td><td>13,3</td><td>500</td><td>8,3</td><td>650</td></tr><tr><td>11 – 12</td><td>1000</td><td>16,6</td><td>300</td><td>5</td><td>650</td></tr><tr><td>12 – 13</td><td>700</td><td>11,6</td><td>300</td><td>5</td><td>500</td></tr><tr><td>13 – 14</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>14 – 15</td><td>900</td><td>15</td><td>200</td><td>3,3</td><td>550</td></tr><tr><td>15 – 16</td><td>800</td><td>13,3</td><td>300</td><td>5</td><td>550</td></tr><tr><td>16 – 17</td><td>700</td><td>11,6</td><td>100</td><td>1,6</td><td>400</td></tr><tr><td>17 – 18</td><td>800</td><td>13,3</td><td>300</td><td>5</td><td>550</td></tr><tr><td>18 – 19</td><td>500</td><td>8,3</td><td>100</td><td>1,6</td><td>300</td></tr><tr><td>19 – 20</td><td>400</td><td>6,6</td><td>300</td><td>5</td><td>350</td></tr><tr><td>Итого:</td><td>7400</td><td>$\lambda_{\max} =$</td><td>3000</td><td>$\lambda_{\min} =$</td><td>5200</td></tr></table>	Интервал времени, ч	max кол-во покупателей, чел.	max интенсивность потока $\lambda_{\max}$, мин	min кол-во покупателей, чел.	min интенсивность потока $\lambda_{\min}$, мин	Среднее кол-во покупателей, чел.	8 – 9	300	5	200	3,3	250	9 – 10	500	8,3	400	6,6	450	10 – 11	800	13,3	500	8,3	650	11 – 12	1000	16,6	300	5	650	12 – 13	700	11,6	300	5	500	13 – 14	0	0	0	0	0	14 – 15	900	15	200	3,3	550	15 – 16	800	13,3	300	5	550	16 – 17	700	11,6	100	1,6	400	17 – 18	800	13,3	300	5	550	18 – 19	500	8,3	100	1,6	300	19 – 20	400	6,6	300	5	350	Итого:	7400	$\lambda_{\max} =$	3000	$\lambda_{\min} =$	5200
Интервал времени, ч	max кол-во покупателей, чел.	max интенсивность потока $\lambda_{\max}$, мин	min кол-во покупателей, чел.	min интенсивность потока $\lambda_{\min}$, мин	Среднее кол-во покупателей, чел.																																																																																
8 – 9	300	5	200	3,3	250																																																																																
9 – 10	500	8,3	400	6,6	450																																																																																
10 – 11	800	13,3	500	8,3	650																																																																																
11 – 12	1000	16,6	300	5	650																																																																																
12 – 13	700	11,6	300	5	500																																																																																
13 – 14	0	0	0	0	0																																																																																
14 – 15	900	15	200	3,3	550																																																																																
15 – 16	800	13,3	300	5	550																																																																																
16 – 17	700	11,6	100	1,6	400																																																																																
17 – 18	800	13,3	300	5	550																																																																																
18 – 19	500	8,3	100	1,6	300																																																																																
19 – 20	400	6,6	300	5	350																																																																																
Итого:	7400	$\lambda_{\max} =$	3000	$\lambda_{\min} =$	5200																																																																																
15	Результаты наблюдения за работой системных администраторов Тюменского индустриального университета по времени обслуживания заявок от сотрудников приведены в таблице ниже. Определите среднее время и интенсивность обслуживания сотрудников. <table><tr><th>Номер интервала</th><th>Интервал обслуживания, мин</th><th>Частота</th></tr><tr><td>1</td><td>0 – 5</td><td>27</td></tr><tr><td>2</td><td>5 – 10</td><td>23</td></tr><tr><td>3</td><td>10 – 15</td><td>18</td></tr><tr><td>4</td><td>15 – 20</td><td>11</td></tr><tr><td>5</td><td>20 – 25</td><td>8</td></tr><tr><td>6</td><td>25 – 30</td><td>3</td></tr></table>	Номер интервала	Интервал обслуживания, мин	Частота	1	0 – 5	27	2	5 – 10	23	3	10 – 15	18	4	15 – 20	11	5	20 – 25	8	6	25 – 30	3																																																															
Номер интервала	Интервал обслуживания, мин	Частота																																																																																			
1	0 – 5	27																																																																																			
2	5 – 10	23																																																																																			
3	10 – 15	18																																																																																			
4	15 – 20	11																																																																																			
5	20 – 25	8																																																																																			
6	25 – 30	3																																																																																			
16	Результаты наблюдения за потоком клиентов в коммерческом банке и проведение регистрации их количества представлены в первой таблице, приведённой ниже. Определите интенсивность потока клиентов за час работы банка, а также среднее время обслуживания и интенсивность обслуживания клиентов в банке при заданном распределении времени обслуживания, приведённом во второй таблице ниже. <table><tr><th>Дни Часы</th><th>Пн.</th><th>Вт.</th><th>Ср.</th><th>Чт.</th><th>Пт.</th><th>Сб.</th></tr><tr><td>9 – 10</td><td>13</td><td>18</td><td>15</td><td>19</td><td>13</td><td>29</td></tr><tr><td>10 – 11</td><td>13</td><td>18</td><td>15</td><td>19</td><td>13</td><td>29</td></tr><tr><td>11 – 12</td><td>19</td><td>32</td><td>23</td><td>21</td><td>26</td><td>58</td></tr><tr><td>12 – 13</td><td>31</td><td>38</td><td>38</td><td>24</td><td>48</td><td>69</td></tr><tr><td>13 – 14</td><td>39</td><td>44</td><td>46</td><td>32</td><td>53</td><td>102</td></tr><tr><td>14 – 15</td><td>47</td><td>57</td><td>59</td><td>39</td><td>71</td><td>117</td></tr><tr><td>15 – 16</td><td>51</td><td>58</td><td>63</td><td>40</td><td>89</td><td>128</td></tr><tr><td>16 – 17</td><td>76</td><td>69</td><td>71</td><td>49</td><td>97</td><td>97</td></tr><tr><td>17 – 18</td><td>89</td><td>83</td><td>86</td><td>67</td><td>103</td><td>84</td></tr><tr><td>18 – 19</td><td>96</td><td>97</td><td>98</td><td>71</td><td>128</td><td>76</td></tr></table>	Дни Часы	Пн.	Вт.	Ср.	Чт.	Пт.	Сб.	9 – 10	13	18	15	19	13	29	10 – 11	13	18	15	19	13	29	11 – 12	19	32	23	21	26	58	12 – 13	31	38	38	24	48	69	13 – 14	39	44	46	32	53	102	14 – 15	47	57	59	39	71	117	15 – 16	51	58	63	40	89	128	16 – 17	76	69	71	49	97	97	17 – 18	89	83	86	67	103	84	18 – 19	96	97	98	71	128	76							
Дни Часы	Пн.	Вт.	Ср.	Чт.	Пт.	Сб.																																																																															
9 – 10	13	18	15	19	13	29																																																																															
10 – 11	13	18	15	19	13	29																																																																															
11 – 12	19	32	23	21	26	58																																																																															
12 – 13	31	38	38	24	48	69																																																																															
13 – 14	39	44	46	32	53	102																																																																															
14 – 15	47	57	59	39	71	117																																																																															
15 – 16	51	58	63	40	89	128																																																																															
16 – 17	76	69	71	49	97	97																																																																															
17 – 18	89	83	86	67	103	84																																																																															
18 – 19	96	97	98	71	128	76																																																																															

		Номер интервала	Интервал времени обслуживания, мин	Частота
		1	0 – 5	29
		2	5 – 10	48
		3	10 – 15	26
		4	15 – 20	9
		5	20 – 25	5
		6	25 – 30	3
		7	30 – 35	2
		8	35 – 40	1
17	Дан пуассоновский поток с параметром 4 мин^{-1} . Найти вероятность того, что длина интервала между соседними требованиями составляет от 1 до 3 минут.			
18	Рассмотрим простейший поток с нестационарным параметром, изменяющимся по закону $\lambda(t) = 1 + 0,7 \cos(6\pi t)$. Параметр является периодическим, его период равен $1/4$. Найти вероятность отсутствия требований на отрезке $[1;15]$.			
19	В пункт текущего ремонта компьютеров поступают требования на ремонт. Поток требований можно считать простейшим с интенсивностью $\lambda=0,75$. Найти вероятность того, что за $\frac{1}{2}$ часа не поступит ни одного требования (компьютера) на ремонт.			
20	Время обслуживания для аппаратов некоторой системы массового обслуживания распределено по показательному закону $F(t) = 1 - e^{-1,7t}$, где t - время в минутах. Найти вероятность того, что обслуживание продлится не более 10 мин.			

Краткие теоретические сведения

Потоком требований (событий) называется последовательность однородных требований, появляющихся одно за другим в случайные моменты времени. Примеры: поток вызовов на телефонной станции; прибытие поездов на станцию; поток сбоев ЭВМ, поток отказов приборов учета (датчиков); поток заявок на проведение регламентных работ на объектах нефтегазодобычи и т.п.

Потоки требований имеют такие свойства, как стационарность, ординарность и отсутствие последствия.

Свойство *стационарности* означает, что с течением времени вероятностные характеристики потока не меняются. Поток можно назвать стационарным, если для любого числа k требований, поступивших за промежуток времени длиной Δt , вероятность поступления требований зависит только от величины промежутка и не зависит от его расположения на оси времени.

Свойство *ординарности* означает практическую невозможность группового поступления требований. Поэтому поток требований можно назвать ординарным тогда, когда вероятность поступления двух или более требований за любой бесконечно малый промежуток времени Δt есть величина бесконечно малая более высокого порядка, чем Δt .

Свойство *отсутствия последствия* означает независимость вероятностных характеристик потока от предыдущих событий. Иными словами, вероятность поступления k требований в промежуток $[t_1, t_2]$ не зависит от числа, времени поступления и длительности обслуживания требований до момента t_1 .

К основным характеристикам случайного потока относят *ведущую функцию* и *интенсивность*.

Ведущая функция случайного потока $\bar{x}(0, t)$ есть математическое ожидание числа требований в промежутке $[0, t)$. Функция $\bar{x}(0, t)$ - неотрицательная, неубывающая и в практических задачах теории распределения информации непрерывна и принимает только конечные значения.

Интенсивностью λ потока событий называется среднее число (математическое ожидание числа) событий, приходящееся на единицу времени. Для стационарного потока $\lambda = \text{const}$; для нестационарного потока интенсивность в общем случае зависит от времени: $\lambda = \lambda(t)$.

Рассмотрим наиболее часто встречающиеся, а именно простейшие потоки и их модификации, потоки Пальма и потоки Эрланга.

Простейшие потоки. Если поток требований обладает свойствами стационарности, ординарности и отсутствия последствия, то такой поток называется простейшим (или пуассоновским) потоком требований.

Вероятность поступления k требований за промежуток времени t в пуассоновском потоке определяется из выражения

$$P_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}.$$

Интервал времени T между двумя соседними событиями простейшего потока имеет показательное распределение $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ (при $t > 0$), где $\lambda = 1/M[T]$ - величина, обратная среднему значению интервала T .

Математическое ожидание, дисперсия и среднеквадратическое отклонение промежутка T :

$$M = \int_0^{\infty} tp(t)dt = \int_0^{\infty} t\lambda e^{-\lambda t}dt = 1/\lambda,$$

$$D = \int_0^{\infty} t^2 p(t)dt - M^2 = \int_0^{\infty} t^2 \lambda e^{-\lambda t}dt - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

$$\sigma = \sqrt{D} = \frac{1}{\lambda}$$

Полученное совпадение величин M и σ характерно для показательного распределения. Это свойство на практике используют как критерий для первоначальной проверки соответствия гипотезы о показательном распределении полученным статистическим данным.

Пример. На пульт диспетчера поступают заявки на ремонт участков магистрального газопровода. Известно, что вероятность отсутствия заявок в течение 5 месяцев равна 0,5. Требуется найти вероятность того, что за 10 месяцев на пульт диспетчера поступит не более двух заявок.

Решение. Примем за единицу времени 5 месяцев. В задаче требуется найти

$$P_{\leq 2}(2) = P_0(2) + P_1(2) + P_2(2) = e^{-\lambda 2} + \frac{(2\lambda)^1}{1!} e^{-\lambda 2} + \frac{(2\lambda)^2}{2!} e^{-\lambda 2}$$

Из условия следует $P_0(1) = 0,5$, т.е. $e^{-\lambda} = 0,5$, следовательно, $\lambda = \ln 2$. Таким образом, в предыдущее уравнение подставляем λ и получим $P_{\leq 2}(2) = 0,84$.

Простейший поток с возможной нестационарностью. Простейшим потоком с возможной нестационарностью (нестационарным простейшим потоком) является поток, обладающий свойствами ординарности, отсутствием последействия и имеющий в каждый момент времени t конечное мгновенное значение параметра $\lambda(t)$.

Мгновенная интенсивность нестационарного простейшего потока $\lambda(t)$ определяется как предел отношения среднего числа событий, которые произошли за

элементарный интервал времени $(t, t+\Delta t)$, к длине Δt этого интервала, когда $\Delta t \rightarrow 0$. Среднее число событий, наступающих в интервале времени τ , следующем непосредственно за моментом t_0 , равно $\Lambda(t_0, \tau) = \int_{t_0}^{t_0+\tau} \lambda(t) dt$. Если поток событий стационарный, то $\Lambda(t_0, \tau) = \Lambda(\tau) = \lambda\tau$.

Тогда вероятность наступления k требований для рассматриваемого вида потока будет

$$P_k(t_0, \tau) = \frac{(\Lambda(t_0, \tau))^k}{k!} e^{-\Lambda(t_0, \tau)}$$

Пример. Рассмотрим простейший поток с нестационарным параметром, изменяющийся по закону $\lambda(t)=1+0,5\sin(6\pi t)$. Параметр является периодическим, его период равен $1/3$. Найти вероятность отсутствия требований на отрезке $[1,5]$.

Решение. Длина отрезка равна 4. Вычислим среднее число событий, наступающих в интервале времени $\tau=4$

$$\Lambda(1,4) = \int_1^5 (1 + 0,5 \sin(6\pi x)) dx = 4,$$

тогда $P_0(1,4) = e^{-4} = 0.0183$

Простейший поток с возможной неординарностью. Простейший поток с возможной неординарностью обладает свойствами стационарности и отсутствием последствия. Требования в таком потоке могут поступать не по одному, а сразу группами (пакетами). В этом случае все требования, приходящие одновременно, объединяются в пакеты, вероятность поступления двух или более числа пакетов за промежуток времени t есть величина бесконечно малая по отношению к t . Каждый пакет, исходя из определения, содержит хотя бы одно требование.

Вероятность поступления k требований для потока с возможной неординарностью с учетом вероятности p_t нахождения t требований в пакете

$$P(k) = e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^k \left[\frac{(\lambda t)^n}{n!} \sum_{\sum_{j=1}^n m_j = k} \prod_{j=1}^n p_{m_j} \right],$$

$$\text{при } \sum_{j=1}^n m_j = k \prod_{j=1}^n p_{m_j} = \begin{cases} 1, & \text{если } k = 0 \\ 0, & \text{если } k \geq 1 \end{cases}$$

Простейшие потоки с возможным последствием. Поток, имеющий конечное значение параметра и обладающий свойствами стационарности и ординарности является простейшим потоком с возможным последствием. Условная вероятность поступления некоторого числа требований на заданном промежутке времени t такого потока вычисляется при предположении о предыстории потока (о поступлении требований до этого промежутка времени) и может отличаться от безусловной вероятности того же события.

Вероятность поступления требований k за данный промежуток времени t для потока с возможным последствием будет выглядеть следующим образом

$$P_k(t) = -\lambda \int_0^t (\varphi_k(x) - \varphi_{k-1}(x)) dx,$$

где $\varphi_k(t)$ - функция Пальма-Хинчина.

Функция $\varphi_k(t)$ представляет собой вероятность поступления k требований за время t при условии, что в начальный момент этого промежутка t поступает хотя бы одно (а в силу ординарности потока ровно одно) требование (это начальное требование не входит в число k требований за время t).

Потоки Пальма. Ординарный поток событий называется потоком Пальма (или рекуррентным потоком, или потоком с ограниченным последствием), если интервалы времени $T_1, T_2, \dots$ между последовательными событиями представляют собой независимые, одинаково распределенные случайные величины.

В связи с одинаковостью распределений $T_1, T_2, \dots$ поток Пальма всегда стационарен. Простейший поток является частным случаем потока Пальма; в нем интервалы между событиями распределены по показательному закону.

Потоки Эрланга. Поток Эрланга n -го порядка называется поток событий, получающийся «прореживанием» простейшего потока, когда сохраняется каждая n -я точка (событие) в потоке, а все промежуточные выбрасываются.

Интервал времени между двумя соседними событиями в потоке Эрланга n -го порядка представляет собой сумму n независимых случайных величин $T_1, T_2, \dots, T_n$, имеющих показательное распределение с параметром λ :

$$T = \sum_{i=1}^n T_i$$

Закон распределения случайной величины T называется законом Эрланга n -го порядка и имеет плотность

$$f_n(t) = \frac{\lambda(\lambda t)^{n-1}}{n-1} e^{-\lambda t} \text{ (при } t > 0 \text{)}.$$

Математическое ожидание, дисперсия и среднее квадратическое отклонение случайной величины T соответственно равны:

$$m_t = \frac{n}{\lambda}; \quad D_t = \frac{n}{\lambda^2}; \quad \sigma_t = \sqrt{\frac{n}{\lambda}}$$

Для потоков Эрланга n -го порядка вероятность поступления k требований за промежуток времени t равняется

$$P_k(t) = e^{-\lambda t} \sum_{l=(n+1)(k-1)}^{(n+1)(k+1)} \frac{(\lambda t)^l}{l!} \left(1 - \left\lfloor \frac{l}{n+1} - k \right\rfloor \right),$$

для $k > 0$. При $k=0$ $P_0(t) = e^{-\lambda t} \sum_{l=0}^{n+1} \frac{(\lambda t)^l}{l!} \left(1 - \frac{l}{n+1} \right)$.

Суммирование и разъединение простейших потоков. При объединении нескольких независимых простейших потоков образуется также простейший по-

ток с параметром, равным сумме параметров исходных потоков. При разъединении поступающего простейшего потока с параметром λ на n направлений так, что каждое требование исходного потока с вероятностью p_i ($\sum_{i=1}^n p_i = 1$) поступает на i -е направление, поток i -го направления также будет простейшим с параметром λp_i . Эти свойства простейшего потока широко используются на практике, поскольку значительно упрощают расчёты стационарного оборудования и информационных сетей.

Показательный закон распределения времени обслуживания. Временем обслуживания называется время, затрачиваемое каждым узлом обслуживания на одно требование.

Время обслуживания характеризует пропускную способность каждого узла обслуживания, не связано с оценкой качества обслуживания и является случайной величиной. Это объясняется неидентичностью узлов обслуживания и различием в спросе на обслуживание отдельных требований. Например, поступающие на ремонт компьютеры имеют неисправности самого различного характера, попадают к различным мастерам по ремонту, поэтому время на обслуживание для различных компьютеров не будет одинаковым.

Во многих задачах теории массового обслуживания закон распределения времени обслуживания предполагается показательным и описывается выражением $F(t) = 1 - e^{-\mu t}$. Параметр μ характеризует среднюю скорость обслуживания требований.

«Заявка на обслуживание» – это кто-либо или что-либо, что необходимо обслуживать.

«Каналы обслуживания» – это операции обслуживания, выполняемые кем-либо или чем-либо.

Основной характеристикой потока заявок массового обслуживания является *интенсивность потока* (λ), которая рассчитывается как среднее число заявок в единицу времени.

Рассмотрим пример расчета интенсивности потока покупателей.

Задача: Результаты наблюдения за потоком покупателей в отделе гипермаркета и проведение регистрации количества покупателей в течение каждого часа работы представлены в таблице 4. Определите интенсивность потока покупателей за час работы гипермаркета.

Таблица 4 – Регистрация потока покупателей

Дни Часы	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	4	5	2	8	3	9	8
2	2	4	8	8	8	10	4	5	3
3	3	8	12	5	10	12	8	3	1
4	5	11	10	9	14	14	7	2	4
5	8	5	9	11	6	6	11	4	6
6	7	9	7	12	7	7	13	14	8
7	11	12	5	14	8	9	14	11	3
8	5	14	10	9	7	10	9	12	2
9	9	5	11	1	6	11	8	10	1

Решение: Для того чтобы определить интенсивность потока покупателей, необходимо найти среднее арифметическое из представленного табличного массива. Простейшим вариантом данного действия будет отыскание частного от деления суммы всех значений, представленных в таблице, на произведение количества столбцов и строк.

1) Находим сумму элементов по каждому столбцу:

Дни Часы	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	4	5	2	8	3	9	8
2	2	4	8	8	8	10	4	5	3
3	3	8	12	5	10	12	8	3	1
4	5	11	10	9	14	14	7	2	4
5	8	5	9	11	6	6	11	4	6
6	7	9	7	12	7	7	13	14	8
7	11	12	5	14	8	9	14	11	3
8	5	14	10	9	7	10	9	12	2
9	9	5	11	1	6	11	8	10	1
Σ	51	70	76	74	68	87	77	70	36

2) Находим общую сумму:

$$51 + 70 + 76 + 74 + 68 + 87 + 77 + 70 + 36 = 609$$

3) Находим частное от деления суммы всех значений, представленных в таблице, на произведение количества столбцов и строк:

$$609 / (9 * 9) = 7,5.$$

Выходной поток заявок связан с потоком обслуживания в канале, где длительность обслуживания $t_{\text{обсл}}$ является тоже случайной величиной и подчиняется во многих случаях показательному закону распределения

$$f(t_{\text{обсл}}) = \mu * e^{-\mu t},$$

где μ – интенсивность потока обслуживания, т.е. среднее число заявок, обслуживаемых в единицу времени. Данная интенсивность находится по формуле

$$\mu = 1/t_{\text{обсл}},$$

где $t_{\text{обсл}}$ – среднее время обслуживания заявок.

Рассмотрим пример расчета интенсивности потока обслуживания.

Задача: Результаты наблюдения за работой консультантов в коммерческом банке по времени обслуживания клиентов представлены в таблице 5. Определите среднее время обслуживания и интенсивность обслуживания клиентов в банке.

Таблица 5 – Регистрация потока покупателей

Номер интервала	Интервал времени обслуживания, мин	Частота (f)
1	0 – 5	12
2	5 – 10	15
3	10 – 15	20
4	15 – 20	14
5	20 – 25	4
6	25 – 30	2

Решение: Для определения интенсивности обслуживания необходимо найти среднее время обслуживания клиентов в банке, а затем найденное значение подставить в формулу $\mu = 1/t_{\text{обсл}}$. При определении среднего времени обслуживания необходимо выполнить следующую последовательность действий:

1) Находим середину каждого из представленных в таблице 5 интервалов:

Номер интервала	Интервал времени обслуживания, мин	Середина интервала
1	0 – 5	2,5
2	5 – 10	7,5

3	10 – 15	12,5
4	15 – 20	17,5
5	20 – 25	22,5
6	25 – 30	27,5

2) Находим сумму произведения середины интервала на частоту:

$$(2,5 * 12) + (7,5 * 15) + (12,5 * 20) + (17,5 * 14) + (22,5 * 4) + (27,5 * 2) = 782,5.$$

3) Находим частное от деления суммы произведения середины интервалов на частоту на сумму частоты:

$$782,5 / (12 + 15 + 20 + 14 + 4 + 2) = 11,68.$$

Таким образом, среднее время обслуживания ($t_{\text{обсл}}$) = 11,68 мин.

Далее полученное значение подставим в формулу $\mu = 1/t_{\text{обсл}}$ и найдем интенсивность обслуживания:

$$\mu = 1 / 11,68 = 0,086 .$$

Переведём полученное значение в часы, получим:

$$0,086 * 60 = 5,16 \text{ кл./ч.}$$

В теории массового обслуживания обычно полученные значения не округляют, т.к. считается, что найденная величина характеризует не физическую величину объекта обслуживания (покупателя, клиента и т.д.), а обслуженную величину его покупки, запроса. Например, если расчетное значение интенсивности обслуживания покупателей в зоне кассового узла крупного магазина самообслуживания получилось 2,5 покупателя в минуту, это значит, что за минуту кассир успел пробить все покупки из корзины двух покупателей и половину покупок из корзины третьего покупателя.

Таким образом, округление как в одну, так и в другую сторону для характеристики работы системы обслуживания будет некорректным, а использование полученных округлённых значений в последующих расчетах может исказить полученные результаты эффективности работы всей системы обслуживания.

Список рекомендуемой литературы

1) Вентцель, Е. С. Теория вероятностей : учебник / Е. С. Вентцель. – М. : Академия, 2003 – 576 с.

2) Вентцель, Е. С. Теория случайных процессов и её приложения : учеб. пособие / Е. С. Вентцель, Л. А. Овчаров. – М. : Академия, 2003 – 432 с.

3) Гмурман, В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике : учеб. пособие / В. Е. Гмурман. – 11-е изд., перераб. – М. : Высшее образование, 2007 – 404 с.

4) Фомин, Г. П. Системы и модели массового обслуживания в коммерческой деятельности : учеб. пособие / Г. П. Фомин. – М. : Финансы и статистика, 2000 – 144 с.

5) Хакимова, Е. А. Методы теории массового обслуживания, используемые для оценки качества обслуживания в коммерческом банке / Е. А. Хакимова // Маркетинг в России и за рубежом. – 2010 – № 1 – С. 30-37.

6) Четыркин, Е. М. Теория массового обслуживания и её применение в экономике : учеб. пособие / Е. М. Четыркин. – М. : Статистика, 1971 – 103 с.

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ТЮМЕНСКИЙ ИНДУСТРИАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
Институт геологии и нефтегазодобычи**

Кафедра Кибернетических систем

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА

по дисциплине «Теория массового обслуживания»
Вариант _____

РУКОВОДИТЕЛЬ:

ст. преп. каф. КС

_____ Лаптева У. В.

РАЗРАБОТЧИК:

обучающийся группы _____

_____ Фамилия И. О.