

ЗАДАНИЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

и методические указания по ее выполнению

Требования к уровню подготовки студентов

Для правильного решения включенных в контрольную работу задач, студентам необходимо

иметь:

- теоретическую подготовку по предмету (знание основных понятий и определений, логической взаимосвязи между ними; владение технической терминологией);

- практические умения и навыки (знание алгоритма решения задач, умение оформить схему, рисунок, математическое решение задания и способность анализировать результаты решения)

знать:

- основные положения кинематического и динамического анализа механических систем;

- возможные методы и способы решения типовых задач теоретической механики.

Требования к оформлению контрольной работы

1. Контрольная работа оформляется в соответствии с СТО ИРНИТУ 05-2020 в виде пояснительной записки формата А4 (210 × 297, записи ведутся на одной стороне листа, размеры полей: верхнего 15 мм, нижнего 20 мм; левое поле – 30 мм, правое – 10 мм). Образец титульного листа курсовой работы приведен в прил. Б.

2. Текст пояснительной записки представляется в электронном виде и должен быть выполнен одним из следующих способов:

- набран с помощью клавиатуры ПК (шрифт Times New Roman, размер шрифта 14, междустрочный интервал «одинарный»;

- рукописным (разборчивым почерком), чернилами или пастой темного цвета с высотой букв и цифр не менее 2,5 мм; расстояние между строками 7...10 мм, затем сканирование и сохранение в требуемом формате.

3. Графический материал выполняется с использованием компьютерной техники (допускается графический материал выполнять карандашом с соблюдением масштаба и использованием чертежных инструментов).

4. Каждая задача начинается с новой страницы с записи условия задачи и исходных данных своего варианта, приводится рисунок (чертеж, схема) изучаемого объекта.

5. Рисунок должен быть аккуратным и наглядным, его необходимо выполнять с учетом исходных данных условия решаемого варианта задачи; все углы, действующие силы, число тел и их расположение на чертеже должны соответствовать этому условию. В результате в целом ряде задач рисунок получается более простой, чем представленный в задании общий рисунок.

6. Решение задач необходимо сопровождать краткими пояснениями (какие формулы или теоремы применяются, каким образом получаются те или иные результаты и т.п.) и подробно излагать весь ход расчетов. Числовые значения физических величин в формулах следует проставлять в той же последовательности, в какой приведены в формуле их символы. Все расчеты должны быть выполнены в единицах СИ или других, допущенных к применению ГОСТ 8.417.

7. Единицы измерения физических величин проставляют только у результата вычислений.

8. Все листы пояснительной записки (форма титульного листа приведена в Приложении А) должны быть пронумерованы арабскими цифрами. Первым листом является содержание.

Текст документа должен быть кратким и четким. Терминология, символы и условные обозначения должны быть едиными на протяжении всей пояснительной записки и соответствовать действующим стандартам.

Работы, не отвечающие всем перечисленным требованиям, проверяться не будут, а будут возвращаться для доработки.

Работы с ошибками возвращаются студенту для устранения указанных преподавателем замечаний и ошибок и после исправлений должны представляться на кафедру повторно.

К работе, подаваемой на повторную проверку, должна обязательно прилагаться не зачтенная ранее работа (копии листов с ошибками).

К моменту сдачи экзамена все контрольные работы по данному разделу курса должны быть зачтены.

Методические указания по решению входящих в контрольную работу задач, даются для каждой задачи после изложения ее текста под рубрикой «Пример выполнения задания». Там же могут даваться некоторые пояснения, касающиеся построения чертежа для отдельных вариантов задачи.

Защита контрольной работы

Контрольная работа считается зачтенной после очной защиты (или защиты в дистанционном режиме), которая проводится во время экзаменационной сессии. Защита работы с учетом индивидуальных особенностей студента может проводиться:

- в устной форме – диалог «преподаватель – студент»;
- в письменной форме – ответы на тестовые вопросы и задания.

В процессе защиты преподаватель работает с каждым студентом индивидуально, выясняя:

- теоретическую подготовку по предмету – знание основных понятий и определений теоретической механики, логическую взаимосвязь между ними; владение технической терминологией;

- практические умения и навыки – знание алгоритма решения задач; правил оформления схем, рисунков и чертежей; умение обосновать применяемые методы

решения; способность анализировать результаты решения (аналитические расчеты и теоретические выводы).

В процессе диалогового общения студент должен показать навык ведения диалога, выражения своего мнения, его аргументации.

Пояснения по тексту заданий контрольной работы

При чтении текста каждой задачи контрольной работы следует учесть следующее. К каждой задаче даются 10 рисунков и таблица с дополняющими текст задачи исходными данными.

Нумерация рисунков двойная, при этом номером рисунка является цифра, стоящая после точки. Например, рис. С1.4 – это рисунок 4 к задаче С1. Рисунки даны без соблюдения масштаба; все линии, параллельные строкам, считаются горизонтальными, а перпендикулярные строкам – вертикальными, и это в тексте задач специально не оговаривается. Нумерация формул в примерах решения задач одинарная, так как ссылки на формулы действуют только внутри примера.

Номера условий представлены в таблицах. ***Студент во всех задачах выбирает номер рисунка по предпоследней цифре своего варианта (номер варианта – две последние цифры номера зачетной книжки), а номер условия в таблице – по последней.*** Например, если номер зачетной книжки заканчивается цифрами 38, то во всех заданиях берутся рисунки 3 и условия № 8 из таблиц.

После текста условия каждой задачи даются методические указания по ее решению, а также приводится пример решения аналогичной задачи. Цель примера – разъяснить ход решения, но не воспроизвести его полностью. Поэтому в ряде случаев промежуточные расчеты опускаются. При решении задачи все преобразования и числовые расчеты должны быть проделаны с необходимыми пояснениями. В конце решения должны быть даны ответы.

ЗАДАЧИ контрольной работы

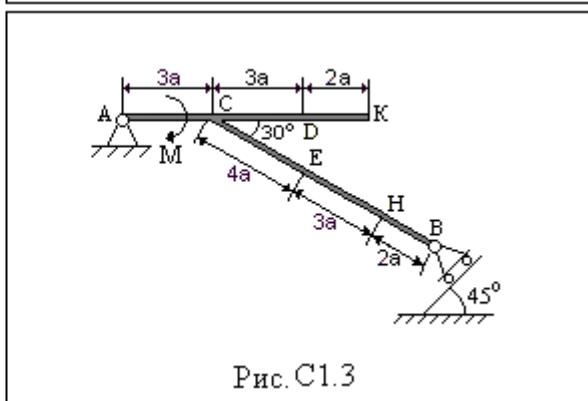
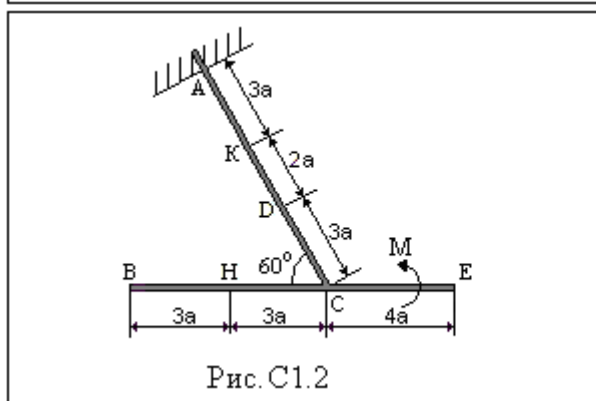
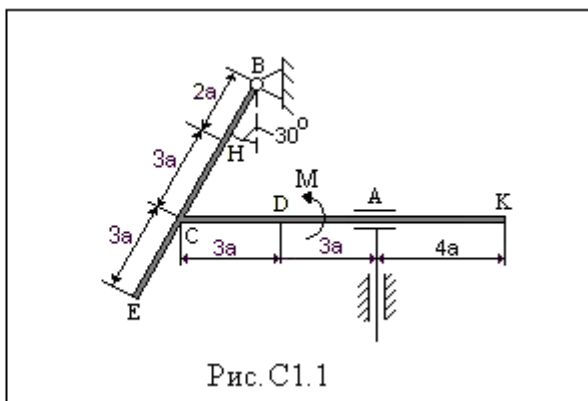
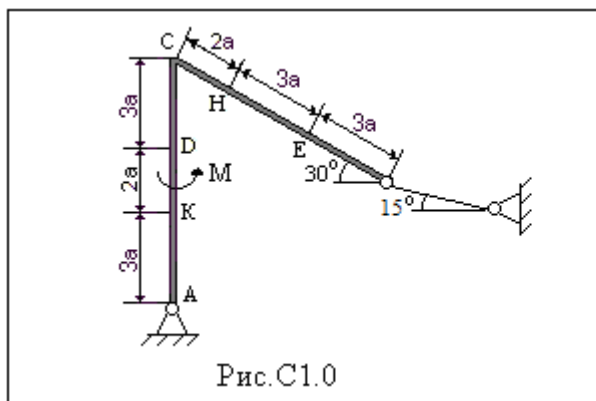
Выполнение контрольной работы требует решения ряда заданий по всем разделам курса теоретической механики. Каждое из заданий представляет собой индивидуальную задачу.

СТАТИКА

Задача С1 Определение реакций опор балки

Конструкция, состоящая из двух прямолинейных стержней, жестко скрепленных между собой в точке С, расположена в вертикальной плоскости. На конструкцию действует пара сил с моментом $M = 50 \text{ кН}\cdot\text{м}$, распределенная нагрузка интенсивности $q = 10 \text{ кН/м}$ и одна сосредоточенная сила. Величина этой силы, ее направление и точка приложения указаны в табл. С1. Там же в столбце «Нагруженный участок» указано, на каком участке действует распределенная нагрузка. Направление распределенной нагрузки на различных по расположению участках указано в табл. С1А. При расчетах размер «а» принять равным 0,5 м. Для данной конструкции определить реакции связей конструкции.

Схемы конструкций



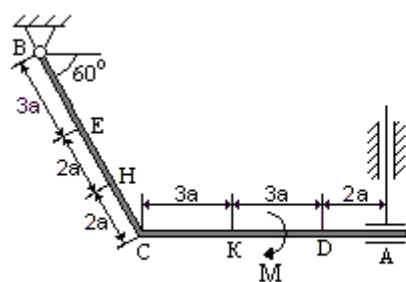


Рис. С1.4

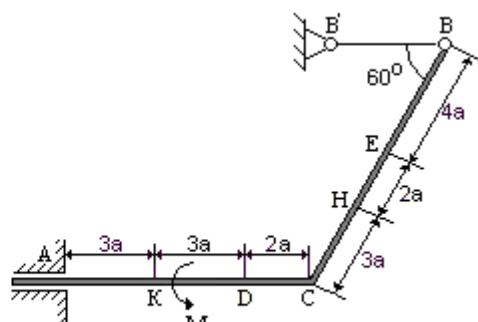


Рис. С1.5

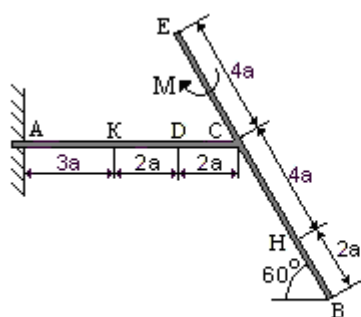


Рис. С1.6

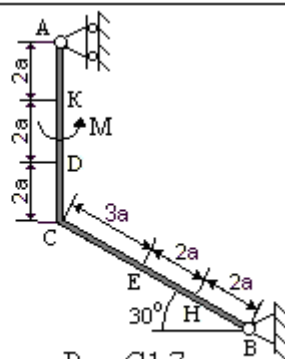


Рис. С1.7

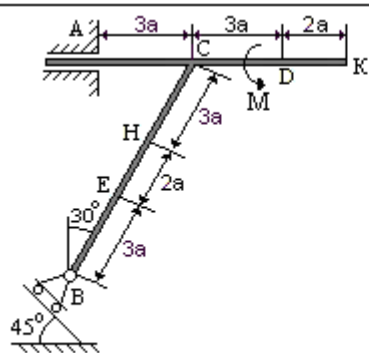


Рис. С1.8

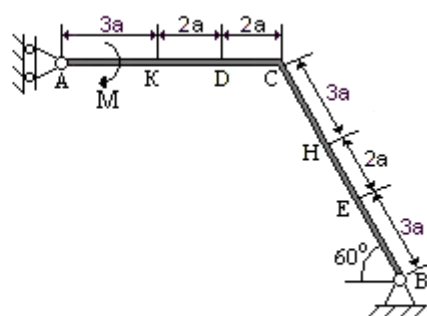


Рис. С1.9

Таблица С1

Действующие нагрузки

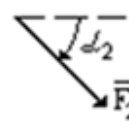
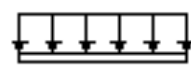
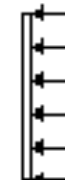
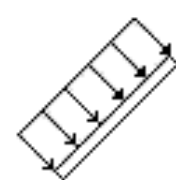
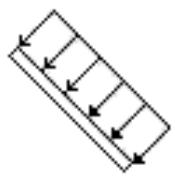
Сила									Нагруженный участок
	$F_1 = 10 \text{ кН}$		$F_2 = 20 \text{ кН}$		$F_3 = 30 \text{ кН}$		$F_4 = 40 \text{ кН}$		
Номер условия	Точка приложения	α_1 град	Точка приложения	α_2 град	Точка приложения	α_3 град	Точка приложения	α_4 град	
0	К	60	—	—	—	—	—	—	СЕ
1	—	—	—	—	—	—	Е	45	AD
2	—	—	—	—	С	15	—	—	AK
3	—	—	D	75	—	—	—	—	CH
4	Н	30	—	—	—	—	—	—	HE
5	—	—	Е	60	—	—	—	—	AC
6	D	15	—	—	—	—	—	—	HB
7	—	—	—	—	К	60	—	—	BE
8	—	—	Н	45	—	—	—	—	AK
9	—	—	—	—	—	—	С	75	KD

Таблица С1а

Направление распределенной нагрузки

Участок на стержне			
горизонтальный	вертикальный	наклонный	наклонный
			

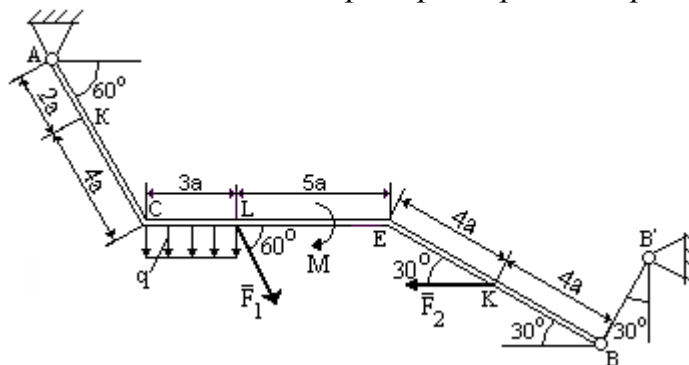
Указания. В задании С1 рассматривается равновесие тела, находящегося под действием плоской произвольной системы сил. Составляя уравнения равновесия,

следует учесть, что уравнение моментов сил будет более простым (содержать меньше неизвестных), если вычислять моменты относительно точки, в которой пересекаются линии действия двух неизвестных реакций связей. При вычислении моментов сил $\bar{F}$ часто удобно разложить их на составляющие $\bar{F}'$ и $\bar{F}''$, для которых плечи можно легко вычислить (эти составляющие могут быть, в частности, параллельны осям координат), и воспользоваться теоремой Вариньона, согласно которой

$$M_O(\bar{F}) = M_O(\bar{F}') + M_O(\bar{F}'').$$

Пример выполнения задания С1

(Дополнительное задание в примере не рассматривается)

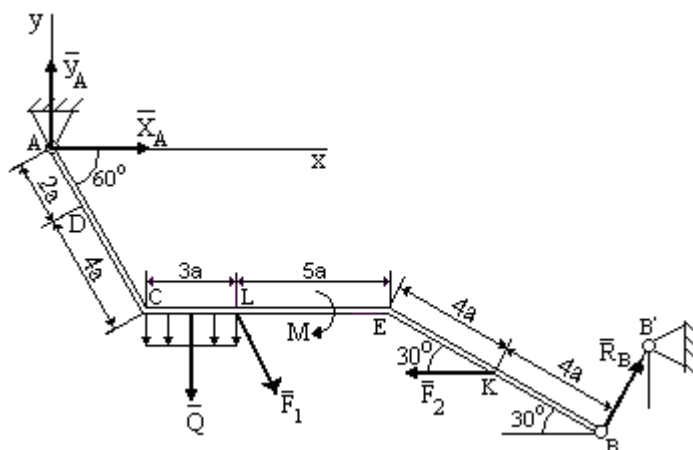


Балка, состоящая из трех прямолинейных стержней AC, CE и EB, которые в точках C и E жестко скреплены друг с другом, расположена в вертикальной плоскости. На балку действуют: пара сил с моментом $M = 30$ кН·м, распределенная нагрузка интенсивности $q = 75$ кН/м и еще две силы $F_1 = 40$ кН и $F_2 = 50$ кН. Распределенная нагрузка действует на участке CL. Определить реакции связей, вызванные заданными нагрузками. При расчетах размер a принять равным 0,2 м.

Решение

Выполняем действия в соответствии с порядком решения задач статики. Активные силы F_1 и F_2 , а также момент пары сил M на рисунке уже показаны, действие распределенной нагрузки на участке CL заменяем равнодействующей силой, величина которой равна $Q = q \cdot CL = 15 \cdot 3a = 45a$ кН, прикладывается сила Q в точке, делящей отрезок CL пополам. Объектом равновесия является балка ACEB, ось которой представляет собой ломаную линию.

На балку связи наложены в точках A и B, причем в точке A связью является шарнирно-неподвижная опора (цилиндрический шарнир или подшипник), в точке B – стержень, шарнирно закрепленный по обоим концам. Реакция шарнирно неподвижной опоры в точке A по направлению неизвестна, поэтому при решении задач на рисунке показываются две взаимно перпендикулярные составляющие реакции X_A и Y_A , реакция R_B стержня, шарнирно закрепленного по обоим концам, направлена вдоль стержня. Покажем на рисунке реакции связей и выберем оси координат с началом в точке A.

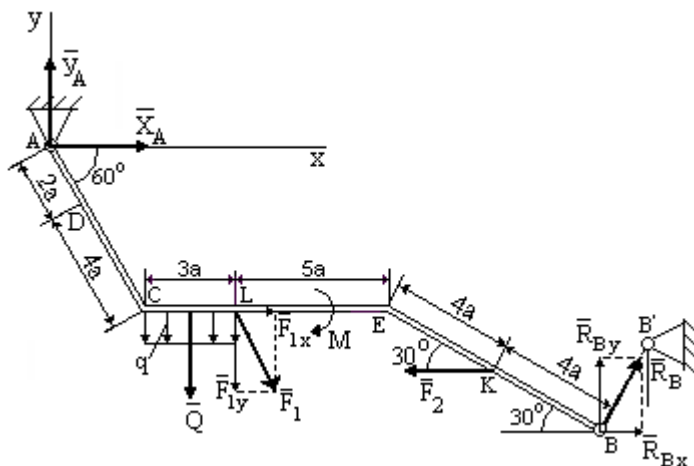


В результате получилось, что на изучаемый объект действует произвольная плоская система сил, для равновесия которой должны выполняться три условия равновесия.

Условия равновесия для балки запишем в виде уравнений проекций сил на оси координат Ax и Ay и уравнения моментов сил относительно точки A (выбор точки A для вычисления моментов удобен, так как моменты двух неизвестных по величине сил X_A и Y_A относительно точки A равны нулю и поэтому в такое уравнение моментов сил войдет лишь одна неизвестная сила R_B).

$$\begin{aligned}\sum F_{ix} &= 0; \\ \sum F_{iy} &= 0; \\ \sum M_A(\vec{F}) &= 0.\end{aligned}$$

Для вычисления моментов сил F_1 и R_B воспользуемся теоремой Вариньона, т. е. разложим эти силы на составляющие ($\vec{F}_1 = F_{1x}\vec{i} + F_{1y}\vec{j}$ и $\vec{R}_B = R_{Bx}\vec{i} + R_{By}\vec{j}$), параллельные осям координат, и будем вычислять сумму моментов составляющих сил F_{1x} , F_{1y} , R_{Bx} , R_{By} относительно точки A .



Проекции сил на оси координат равны:

$$\begin{aligned}F_{1x} &= F_1 \cdot \cos 60^\circ = 40 \cdot 0,5 = 20 \text{ кН}, \\ F_{1y} &= -F_1 \cdot \sin 60^\circ = -40 \cdot 0,866 = -34,64 \text{ кН}; \\ R_{Bx} &= R_B \cdot \sin 30^\circ \\ R_{By} &= R_B \cdot \cos 30^\circ.\end{aligned}$$

Уравнения равновесия имеют вид:

$$\sum F_{ix} = 0 \quad X_A + F_1 \cdot \cos 60^\circ - F_2 + R_B \cdot \sin 30^\circ = 0; \quad (1)$$

$$\sum F_{iy} = 0 \quad Y_A - F_1 \cdot \sin 60^\circ - Q + R_B \cdot \cos 30^\circ = 0; \quad (2)$$

$$\sum M_{Ai} = 0 \quad -Q \cdot (CL/2 + AC \cdot \cos 60^\circ) + F_{1x} \cdot AC \cdot \sin 60^\circ - F_{1y} \cdot (CL + AC \cdot \cos 60^\circ) - M - F_2 \cdot (AC \cdot \sin 60^\circ + EK \cdot \sin 30^\circ) + R_{Bx} \cdot (AC \cdot \sin 60^\circ + BE \cdot \sin 30^\circ) + R_{By} \cdot (EB \cdot \cos 30^\circ + CE + AC \cdot \cos 60^\circ) = 0. \quad (3)$$

Из уравнения (3) можно найти буквенное выражение для определения реакции R_B :

$$R_B = \frac{Q(CL/2 + AC \cos 60^\circ) - F_{1x} AC \sin 60^\circ + F_{1y} (CL + AC \cos 60^\circ) + M + F_2 (AC \sin 60^\circ + EK \sin 30^\circ)}{\sin 30^\circ (AC \sin 60^\circ + EB \sin 30^\circ) + \cos 30^\circ (EB \cos 30^\circ + CE + AC \cos 60^\circ)}.$$

При подстановке числовых значений получим

$$R_B = \frac{45 \cdot 0,2(0,6 \cdot 0,5 + 1,2 \cdot 0,5) - 20 \cdot 1,2 \cdot 0,866 + 34,64(0,6 + 1,2 \cdot 0,5) + 30 + 50(1,2 \cdot 0,866 + 0,8 \cdot 0,5)}{0,5(1,2 \cdot 0,866 + 1,6 \cdot 0,5) + 0,866(1,6 \cdot 0,866 + 1,6 + 1,2 \cdot 0,5)} = 40,59 \text{ кН}.$$

Тогда из уравнения (1) найдем реакцию X_A :

$$X_A = -F_1 \cos 60^\circ + F_2 - R_B \sin 30^\circ = -40 \cdot 0,5 + 50 - 40,59 \cdot 0,5 = 9,705 \text{ кН},$$

а из уравнения (2) – реакцию Y_A

$$Y_A = F_1 \sin 60^\circ + Q - R_B \cos 30^\circ = 40 \cdot 0,866 + 45 \cdot 0,2 - 40,59 \cdot 0,866 = 8,49 \text{ кН}$$

Примечание

Если ответ получился со знаком минус, то это говорит о том, что реакция в действительности направлена в противоположную сторону.

Ответ: $R_B = 40,59 \text{ кН}$; $X_A = 9,705 \text{ кН}$; $Y_A = 44,49 \text{ кН}$.

Задача С2. Определение координат центра тяжести тела

Две однородные прямоугольные пластины, приваренные под прямым углом друг к другу, образуют угольник. Размеры пластин в направлениях, параллельных координатным осям x , y , z , равны соответственно или 2ℓ , 3ℓ и ℓ (рис. С2.0÷С2.4), или 2ℓ , 3ℓ и 4ℓ (рис. С2.5÷С2.9). Силы тяжести большей и меньшей пластин (рис. С2.0÷С2.4) соответственно равны 10 кН и 4 кН, для рис. С2.5÷С2.9 силы тяжести пластин одинаковы и равны 8 кН. Каждая из пластин расположена параллельно одной из координатных плоскостей (плоскость xAy горизонтальная).

Из одной из пластин угольника вырезана фигура, расположение и вид которой указаны в таблице С2. Точки, обозначенные на рисунках, находятся по краям или в серединах сторон пластин.

Вычислить координаты центра тяжести угольника с вырезом для указанных на рисунках систем координат. При расчетах принять $\ell = 0,5 \text{ м}$. Толщиной пластин пренебречь.

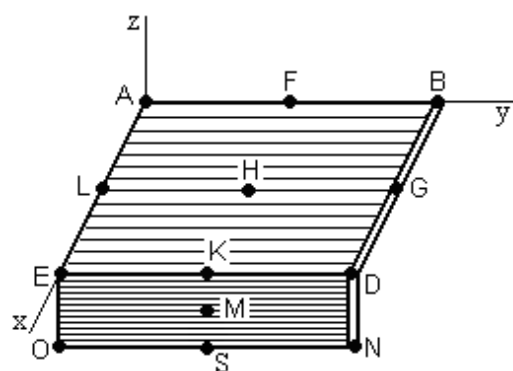


Рис. С2.0

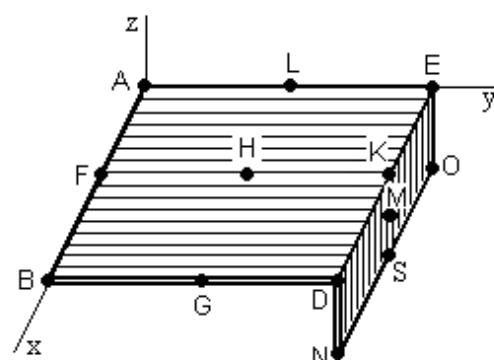


Рис. С2.1

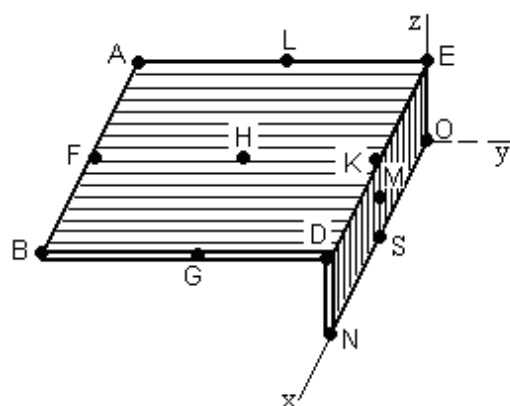


Рис. С2.2

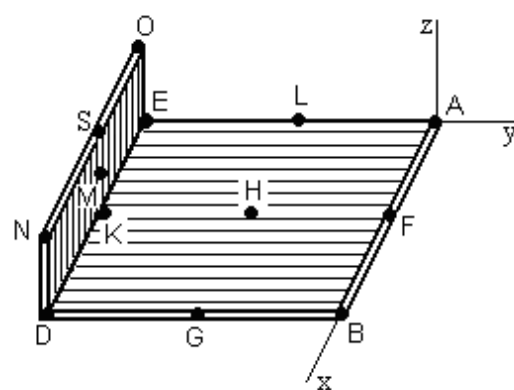


Рис. С2.3

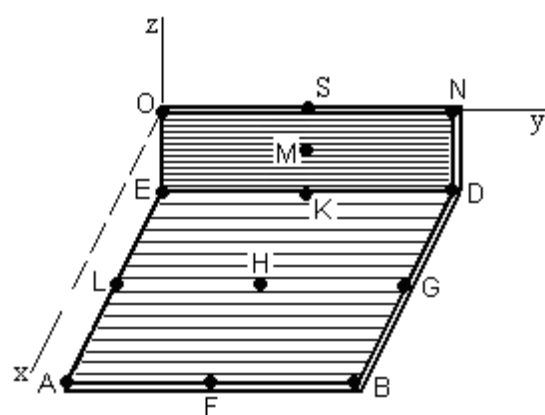


Рис. С2.4

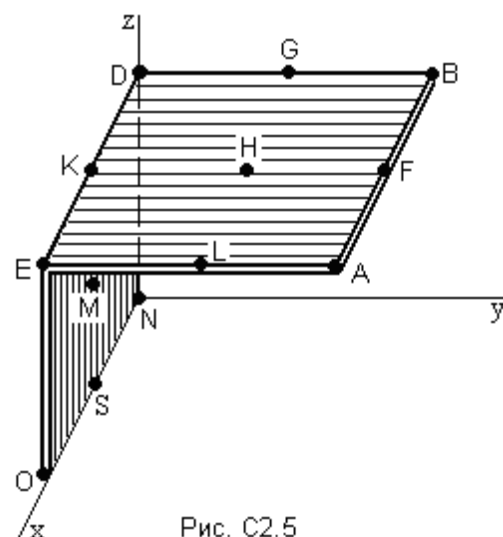


Рис. С2.5

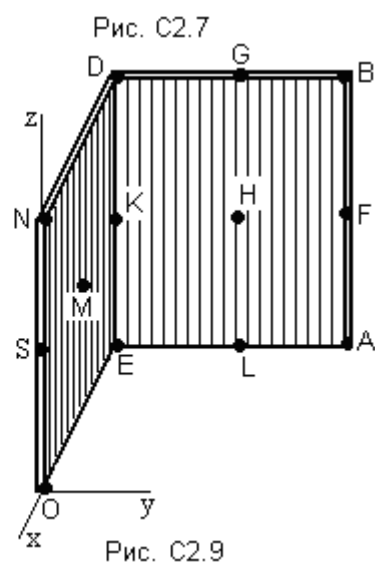
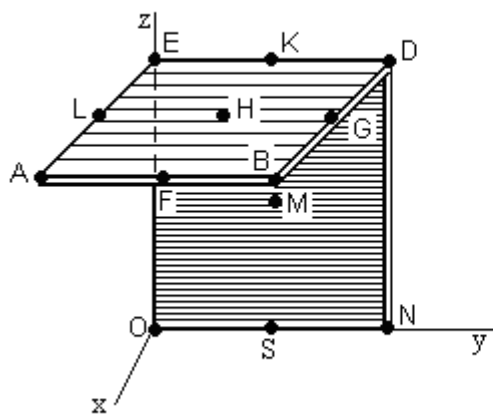
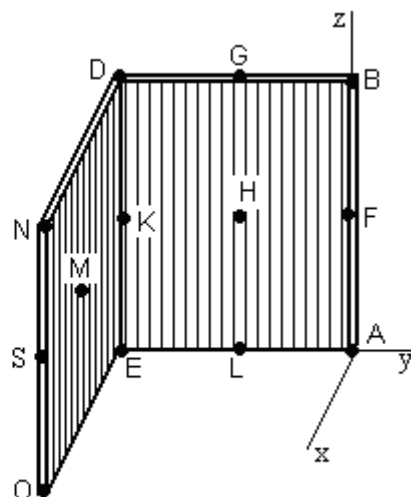
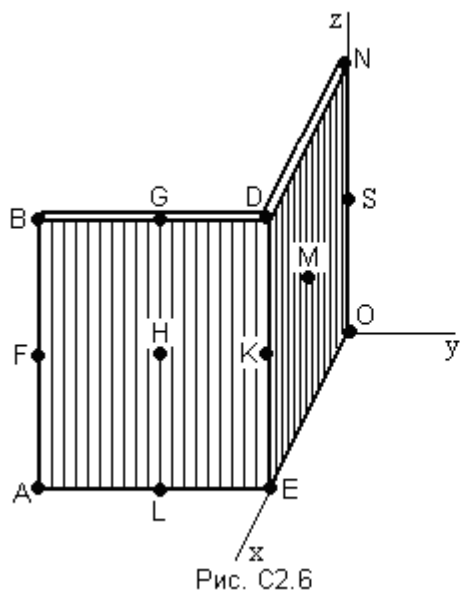


Таблица C2

Расположение и вид вырезаемой фигуры

№ варианта	Вырезаемое тело	
	Треугольник	Половина диска радиуса $R = \ell$ $x_c = OC = \frac{4R}{3\pi}$ прямая aOb половины диска расположена вдоль стороны угольника точка пластины, из которой начинается построение прямой

			aOb
1	2	3	4
0		BGD	B
1	ALF		
2	OMN		
3		ALE	A
4	AHE		
5	GDK		
6		NO	N
7		AFB	A
8	KLE		
9		AFB	B

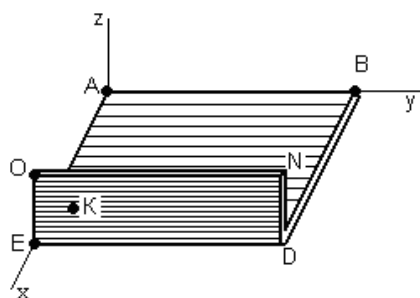
Указания. Решение задач на определение центра тяжести плоской фигуры рекомендуется проводить в следующем порядке:

- исследуемую конструкцию разбить на части, для которых положение центра тяжести известно или его можно легко определить, например, на простейшие геометрические фигуры, при этом считать, что вырезанные из конструкции части (фигуры) обладают отрицательной площадью;
- определить площади частей конструкции;
- найти координаты центров тяжести частей конструкции в выбранной системе координат;
- найденные значения подставить в формулы:

$$x_C = \frac{\sum S_i \cdot x_i}{\sum S_i}, \quad y_C = \frac{\sum S_i \cdot y_i}{\sum S_i}, \quad z_C = \frac{\sum S_i \cdot z_i}{\sum S_i},$$

где S_i – площади частей конструкции, x_i, y_i, z_i – координаты центра тяжести частей конструкции, и произвести вычисления.

Пример решения задачи C2



горизонтальной).

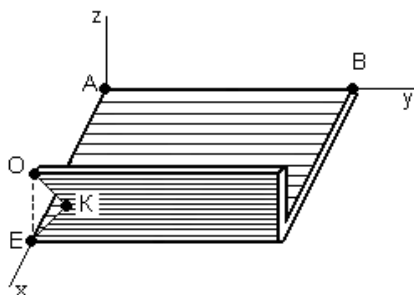
Две однородные прямоугольные пластины, приваренные под прямым углом друг к другу, образуют угольник. Размеры пластин в направлениях, параллельных координатным осям x, y, z , равны соответственно $2\ell, 3\ell$ и ℓ . Вес большей из пластин равен $G_1 = 5$ кН, вес меньшей – $G_2 = 2$ кН. Каждая из пластин расположена параллельно одной из координатных плоскостей (плоскость xAy является

Из угольника вырезана фигура в виде прямоугольного треугольника, расположение которого обозначено буквами ЕОК (гипотенуза совпадает с прямой ЕО). Вычислить координаты центра тяжести пространственной фигуры в виде угольника с вырезом для обозначенной на рисунке системы координат.

При расчетах принять расстояние ℓ равным 0,5 м. Толщиной пластин пренебречь.

Решение

Сделаем рисунок изучаемой конструкции с вырезом в меньшей плите.



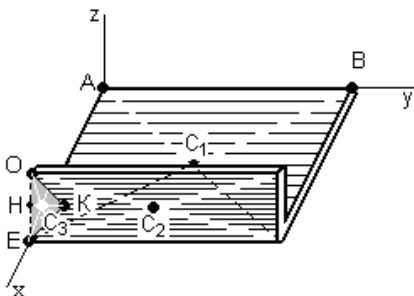
Для решения задачи целесообразно применить или метод разбиения тела на части, или разновидность этого метода - метод отрицательных площадей, для чего использовать формулы

$$x_C = \frac{\sum S_i \cdot x_i}{\sum S_i}, \quad y_C = \frac{\sum S_i \cdot y_i}{\sum S_i}, \quad z_C = \frac{\sum S_i \cdot z_i}{\sum S_i},$$

где S_i – площади частей конструкции, x_i, y_i, z_i – координаты центра тяжести частей конструкции.

Разобьем конструкцию на три части - большая пластина, меньшая пластина и вырезанный треугольник, который будем считать телом с отрицательной площадью.

Центры тяжести большей C_1 и меньшей C_2 пластин в виде прямоугольников находятся на пересечении диагоналей, а центр тяжести C_3 выреза в виде треугольника находится на пересечении медиан. Точки C_1, C_2 и C_3 покажем на рисунке.



Координаты центров тяжести частей конструкции C_1, C_2 и C_3 для указанной на рисунке системы координат соответственно равны:

$$x_{C_1} = \frac{AE}{2} = \frac{2\ell}{2} = \ell, \quad y_{C_1} = \frac{AB}{2} = \frac{3\ell}{2} = 1,5\ell, \quad z_{C_1} = 0;$$

$$x_{C_2} = AE = 2\ell, \quad y_{C_2} = \frac{AB}{2} = \frac{3\ell}{2} = 1,5\ell, \quad z_{C_2} = \frac{EO}{2} = \frac{\ell}{2};$$

$$x_{C_3} = AE = 2\ell, \quad y_{C_3} = \frac{1}{3}HK = \frac{1}{3} \cdot \frac{\ell}{2} = \frac{1}{6}\ell, \quad z_{C_3} = EH = \frac{\ell}{2}.$$

Найдем площади каждой из пластин и вырезаемого треугольника:

– большая пластина $S_1 = 2\ell \cdot 3\ell = 6\ell^2$;

– меньшая пластина $S_2 = \ell \cdot 3\ell = 3\ell^2$;

– треугольник $S_3 = \frac{\ell \cdot 0,5\ell}{2} = 0,25\ell^2$.

Используя формулы координат центра тяжести тела для метода отрицательных площадей, определим координаты центра тяжести C всей конструкции:

$$x_C = \frac{x_{C_1} \cdot S_1 + x_{C_2} \cdot S_2 - x_{C_3} \cdot S_3}{S_1 + S_2 - S_3} = \frac{\ell \cdot 6\ell^2 + 2\ell \cdot 3\ell^2 - 2\ell \cdot 0,25\ell^2}{6\ell^2 + 3\ell^2 - 0,25\ell^2} = \frac{11,5\ell^3}{8,75\ell^2} = 1,314\ell,$$

$$y_C = \frac{y_{C_1} \cdot S_1 + y_{C_2} \cdot S_2 - y_{C_3} \cdot S_3}{S_1 + S_2 - S_3} = \frac{1,5\ell \cdot 6\ell^2 + 1,5\ell \cdot 3\ell^2 - \frac{1}{6}\ell \cdot 0,25\ell^2}{6\ell^2 + 3\ell^2 - 0,25\ell^2} =$$

$$= \frac{13,458\ell^3}{8,75\ell^2} = 1,538\ell,$$

$$z_C = \frac{z_{C_1} \cdot S_1 + z_{C_2} \cdot S_2 - z_{C_3} \cdot S_3}{S_1 + S_2 - S_3} = \frac{0 \cdot 6\ell^2 + \frac{\ell}{2} \cdot 3\ell^2 - \frac{\ell}{2} \cdot 0,25\ell^2}{6\ell^2 + 3\ell^2 - 0,25\ell^2} = \frac{1,375\ell^3}{8,75\ell^2} = 0,157\ell,$$

где S_1 , S_2 , S_3 – площади соответственно большей и меньшей пластин, а также выреза в виде треугольника. Подставляя в формулы заданное значение $\ell = 0,5$ м, вычислим координаты центра тяжести всей конструкции:

$$x_C = 0,657 \text{ м},$$

$$y_C = 0,769 \text{ м},$$

$$z_C = 0,0785 \text{ м}.$$

Ответ: координаты центра тяжести конструкции соответственно равны:

$$x_C = 0,657 \text{ м}, \quad y_C = 0,769 \text{ м}, \quad z_C = 0,0785 \text{ м}.$$

КИНЕМАТИКА

Задача К1. Определение кинематических характеристик движения материальной точки

По заданным уравнениям движения точки $x = f_1(t)$, $y = f_2(t)$ найти уравнение траектории точки. Для момента времени $t_1 = 1$ с вычислить ее скорость, нормальное, касательное и полное ускорения, а также радиус кривизны траектории. На рисунке в масштабе изобразить траекторию движения точки и для заданного момента времени $t_1 = 1$ с построить векторы скорости и ускорения.

Уравнения движения точки $x = f_1(t)$ указаны на соответствующих рисунках, а уравнения движения $y = f_2(t)$ приведены в табл. К1 (для рис. К1.0 ÷ К1.2 – в столбце 2, для рис. К1.3 ÷ К1.6 – в столбце 3, для рис. К1.7 ÷ К1.9 – в столбце 4); величины x и y измеряются в см, время в секундах.

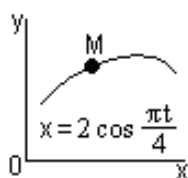


Рис. К1.0

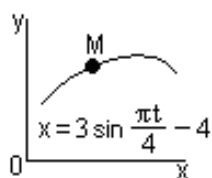


Рис. К1.1

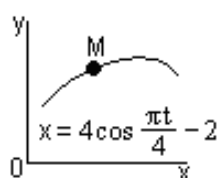


Рис. К1.2

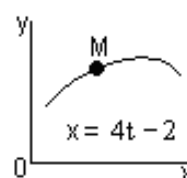


Рис. К1.3

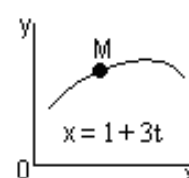


Рис. К1.4

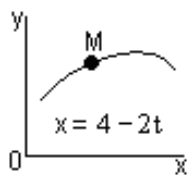


Рис. К1.5

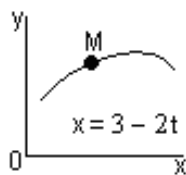


Рис. К1.6

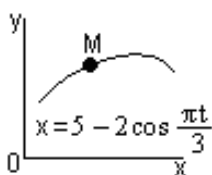


Рис. К1.7

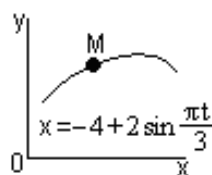


Рис. К1.8

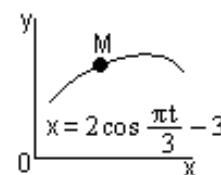


Рис. К1.9

Таблица К1
Уравнения движения точки $y = f_2(t)$

Номер условия	$y = f_2(t)$		
	Рис. К1.0, К1.1, К1.2	Рис. К1.3, К1.4, К1.5, К1.6	Рис. К1.7, К1.8, К1.9
0	$3 - 4\cos^2 \frac{\pi t}{4}$	$4t^2 - 2$	$2 - 3\cos^2 \frac{\pi t}{3}$
1	$1 + 4\sin^2 \frac{\pi t}{4}$	$1 + 3\sin^2 \frac{\pi t}{6}$	$2\sin^2 \frac{\pi t}{3} + 4$

2	$3 \cos \frac{\pi t}{2}$	$5 \cos \frac{\pi t}{3}$	$2t$
3	$-4 \sin^2 \frac{\pi t}{4}$	$\frac{3}{t}$	$2 \cos \frac{2\pi t}{3}$
4	$4 - 3 \cos \frac{\pi t}{2}$	$3 - 2t^2$	$4t - 3$
5	$3 - 2 \sin \frac{\pi t}{4}$	$-1 + 3 \sin \frac{\pi t}{6}$	$2 \sin \frac{2\pi t}{3}$
6	$-2 + 3 \cos \frac{\pi t}{4}$	$\frac{6}{t} - 3$	$4 - 3t$
7	$2 \cos^2 \frac{\pi t}{4} - 3$	$3 - 2 \cos \frac{\pi t}{6}$	$3 - 4 \sin^2 \frac{\pi t}{6}$
8	$4 \cos \frac{\pi t}{2} + 2$	$\frac{2}{t} + 2$	$3 + 2 \cos^2 \frac{\pi t}{6}$
9	$-3 + 2 \cos \frac{\pi t}{2}$	$1 + 3t^2$	$-3 + 2 \cos \frac{\pi t}{6}$

Указания. Перед решением задачи K1 необходимо изучить темы:

1. Способы задания движения материальной точки.

2. Определение скорости и ускорения точки при различных способах задания движения.

Необходимо также познакомиться с порядком действий по определению уравнения траектории точки и вычислению ее кинематических характеристик движения.

При решении задачи целесообразно придерживаться следующего порядка действий:

- по возможности исключить из уравнений движения точки время и получить уравнение траектории движения точки (получить уравнение траектории удастся не всегда);

- на рисунке построить траекторию движения точки;

- по уравнениям движения точки найти ее координаты для заданного момента времени t_1 , вычислить проекции скорости и ускорения на оси координат, показать на рисунке положение точки и построить в соответствующих масштабах векторы скорости и ускорения;

- определить касательное и нормальное ускорения точки в данный момент времени и показать на рисунке разложение вектора полного ускорения точки на указанные составляющие;

- определить, является ли движение точки в данный момент времени ускоренным, замедленным или равномерным;

- вычислить радиус кривизны в соответствующей точке траектории.

Пример решения задачи K1

По заданным уравнениям движения точки

$$x(t) = 1 - 3\cos \pi t/6, \quad y(t) = 2\sin \pi t/6$$

(координаты x и y измеряются в см, время в секундах (с)) найти уравнение траектории точки, ее скорость, нормальное, касательное и полное ускорения, а также радиус кривизны траектории для момента времени $t_1 = 1$ с. На рисунке изобразить траекторию и для заданного момента времени $t_1 = 1$ с в выбранном масштабе построить векторы скорости и ускорения точки.

Решение

1. Нахождение траектории движения точки М

Для нахождения уравнения траектории, по которой движется точка, следует из уравнений движения исключить время. Исключим из заданных уравнений движения параметр t (время), воспользовавшись известной формулой тригонометрии:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1. \quad (1)$$

Из уравнений движения точки выразим функции

$$\cos \pi t/6 = -\frac{x-1}{3} \quad \text{и} \quad \sin \pi t/6 = \frac{y}{2},$$

возведем эти выражения в квадрат и согласно выражению (1) сложим. В результате получим уравнение траектории движения точки

$$\left(\frac{x-1}{3}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 = 1. \quad (2)$$

Уравнение (2) представляет собой каноническое уравнение эллипса, центр которого находится в точке с координатами $x = 1$ см, $y = 0$ см (рис. 5.1). Траекторией движения точки является весь эллипс.

2. Построение траектории

Для построения на рисунке траектории движения точки М можно применить два подхода.

Первый подход предполагает сначала нахождение уравнения траектории движения точки, а затем – по уравнению траектории путем задания числовых значений для одной координаты находят значения другой координаты. По точкам, соответствующим найденным координатам, строится траектория.

Применение второго подхода предполагает использование для определения координат движущейся точки ее уравнений движения. В этом случае параметру t придаются значения в некотором диапазоне, например, от немного меньших до немного больших значений по сравнению с заданным моментом времени t_1 (например, $0,7t_1$, $0,8t_1$, $0,9t_1$, $1,0t_1$, $1,1t_1$, $1,2t_1$, $1,3t_1$ и т. п.). По полученным для этих значений времени координатам x и y на рисунке ставятся точки, через которые проводится траектория.

Используя первый подход, построим на рисунке траекторию точки. Для этого, из уравнений движения точки

$$x(t) = 1 - 3\cos \pi t/6, \quad y(t) = 2\sin \pi t/6$$

определим диапазоны изменения координат ($-2 \leq x \leq 4$ и $-2 \leq y \leq +2$), а затем, используя уравнение траектории (2), составим таблицу значений

x	-2	-1	0	1	2	3	4
y	0	$\pm 1,49$	$\pm 1,89$	± 2	$\pm 1,89$	$\pm 1,49$	0

После этого выбираем масштаб, например, $\overline{\text{1 см}}$ и производим по точкам построения на рисунке.

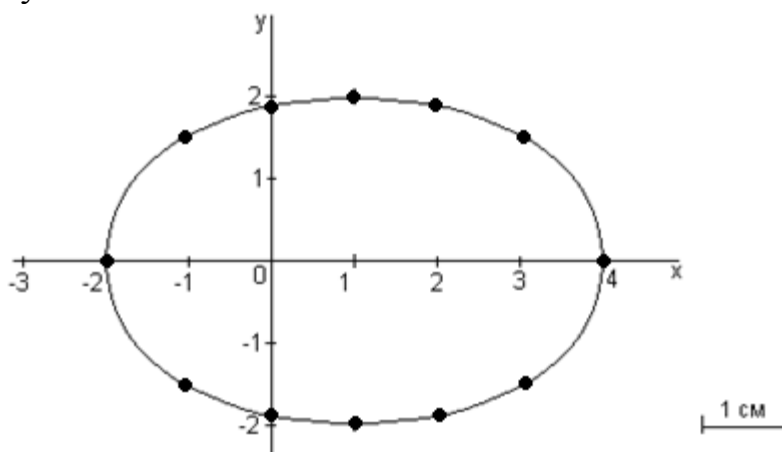


Рис. 1

Путем подстановки в уравнения движения точки заданного момента времени $t_1 = 1$ с определим положение точки на траектории

$$x_{t=1 \text{ с.}} = -1,598 \text{ см}, \quad y_{t=1 \text{ с.}} = 1,0 \text{ см.}$$

Отметим положение точки на траектории на рис. 2.

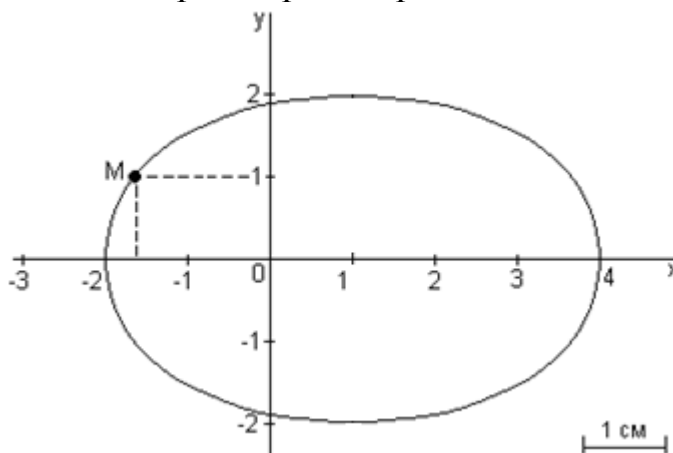


Рис. 2

3. Нахождение величины скорости точки

Для вычисления скорости точки, движение которой задано координатным способом, применяется формула

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}, \quad (3)$$

где $V_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x}$, $V_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y}$ – проекции вектора скорости точки на оси координат.

Вычисляя производные от соответствующих уравнений движения точки по времени, получаем следующие формулы:

$$V_x = \frac{dx}{dt} = 3 \sin \frac{\pi t}{6} \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi t}{6};$$

$$V_y = \frac{dy}{dt} = 2 \cos \frac{\pi t}{6} \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi t}{6}.$$

Вычислим величины проекций вектора скорости на оси координат в момент времени $t = 1$ с.

$$V_x = \frac{3,14}{2} \cdot \sin \frac{3,14 \cdot 1}{6} = 1,57 \cdot 0,5 = 0,785 \text{ см/с};$$

$$V_y = \frac{3,14}{3} \cdot \cos \frac{3,14 \cdot 1}{6} = 1,05 \cdot 0,866 = 1,299 \text{ см/с},$$

а затем, подставляя величины V_x , V_y в (3), и величину скорости точки:

$$V = \sqrt{(0,785)^2 + (1,299)^2} = 1,518 \text{ см/с}.$$

Для того чтобы на рисунке построить вектор скорости точки, воспользуемся формулой

$$\vec{V} = V_x \vec{i} + V_y \vec{j}.$$

Выбираем масштаб и на рисунке из точки М параллельно осям координат в этом масштабе откладываем составляющие вектора скорости $V_x \vec{i}$ и $V_y \vec{j}$, а затем проводим вектор $\vec{V}$ (рис. 3).

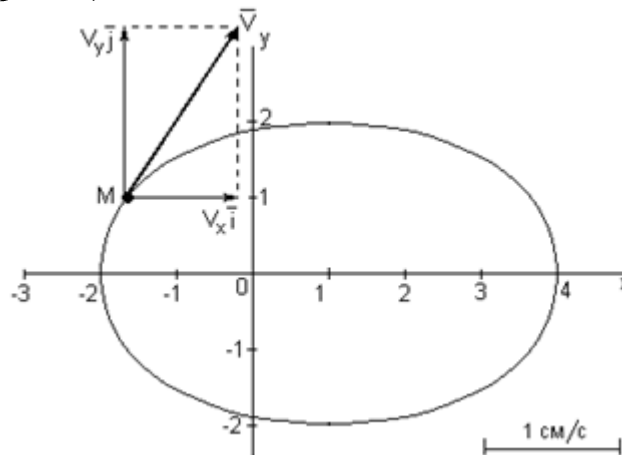


Рис. 3

4. Нахождение величины вектора ускорения точки

Величина ускорения точки при задании ее движения координатным способом вычисляется по формуле

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}, \quad (4)$$

где $a_x = \frac{dV_x}{dt} = \dot{V}_x = \ddot{x}$, $a_y = \frac{dV_y}{dt} = \dot{V}_y = \ddot{y}$ – проекции вектора ускорения точки на оси координат.

$$a_x = \frac{dV_x}{dt} = \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi t}{6} \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{\pi^2}{12} \cos \frac{\pi t}{6};$$

$$a_y = \frac{dV_y}{dt} = -\frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi t}{6} \cdot \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi^2}{18} \sin \frac{\pi t}{6}.$$

При $t = 1$ с имеем $a_x = \frac{3,14^2}{12} \cos 30^\circ = 0,82 \cdot 0,866 = 0,71$ см/с²;

$$a_y = -\frac{3,14^2}{18} \sin 30^\circ = -0,20 \cdot 0,5 = -0,10$$
 см/с².

Тогда

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{(0,71)^2 + (-0,1)^2} = 0,717$$
 см/с².

Применив формулу $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j}$, построим на рис. 4 вектор полного ускорения точки $\vec{a}$.

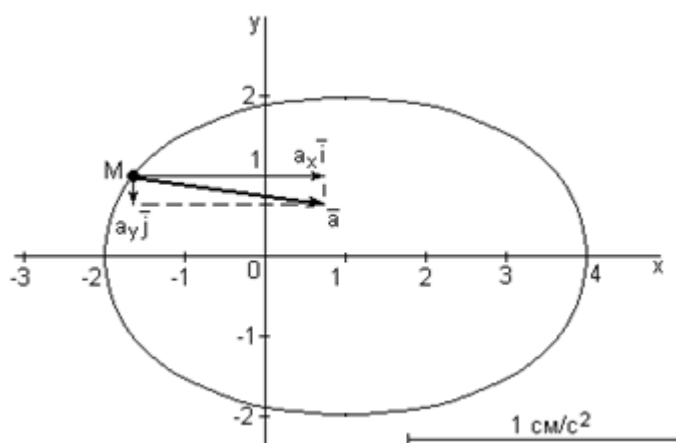


Рис. 4

Ниже на рис. 5 для момента времени $t_1 = 1$ с показано положение точки M на траектории и выполнены построения векторов скорости и ускорения точки.

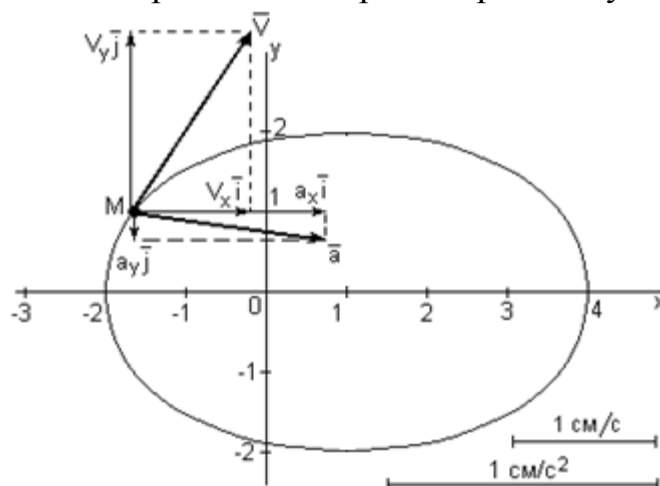


Рис. 5

Вычислим проекции вектора ускорения на касательную (касательную составляющую вектора ускорения):

$$a_\tau = \frac{dV}{dt} = \frac{V_x a_x + V_y a_y}{V} = \frac{0,785 \cdot 0,71 + 1,299 \cdot (-0,1)}{1,518} = 0,285 \text{ см/с}^2$$

и на главную нормаль (нормальную составляющую вектора ускорения):

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2} = \sqrt{(0,717)^2 - (0,285)^2} = 0,66 \text{ см/с}^2.$$

Из формулы $a_n = \frac{V^2}{\rho}$ получим выражение для определения радиуса кривизны траектории движения точки, а затем произведем вычисление для заданного момента времени:

$$\rho = \frac{V^2}{a_n} = \frac{(1,518)^2}{0,66} = 3,41 \text{ см.}$$

На рис. 6 выполнено разложение вектора ускорения точки на касательную и нормальную составляющие.

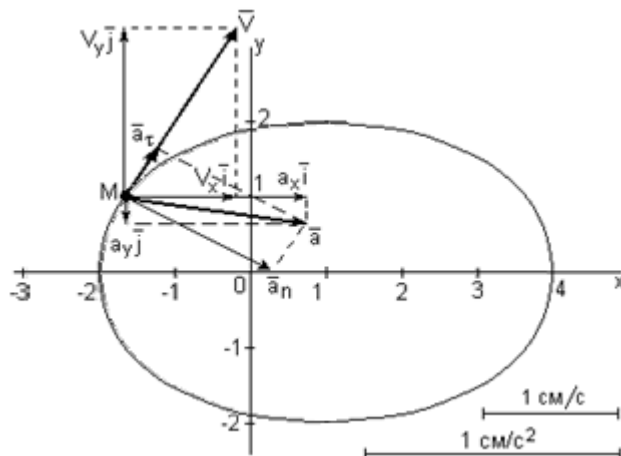


Рис. 6

Ответ: уравнение траектории движения точки $\left(\frac{x-1}{3}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 = 1$;

величина скорости точки $V = 1,518 \text{ см/с}$;

ускорения точки:

- полное $a = 0,717 \text{ см/с}^2$;
- касательное $a_\tau = 0,285 \text{ см/с}^2$,
- нормальное $a_n = 0,66 \text{ см/с}^2$;

радиус кривизны траектории точки $\rho = 3,41 \text{ см}$.

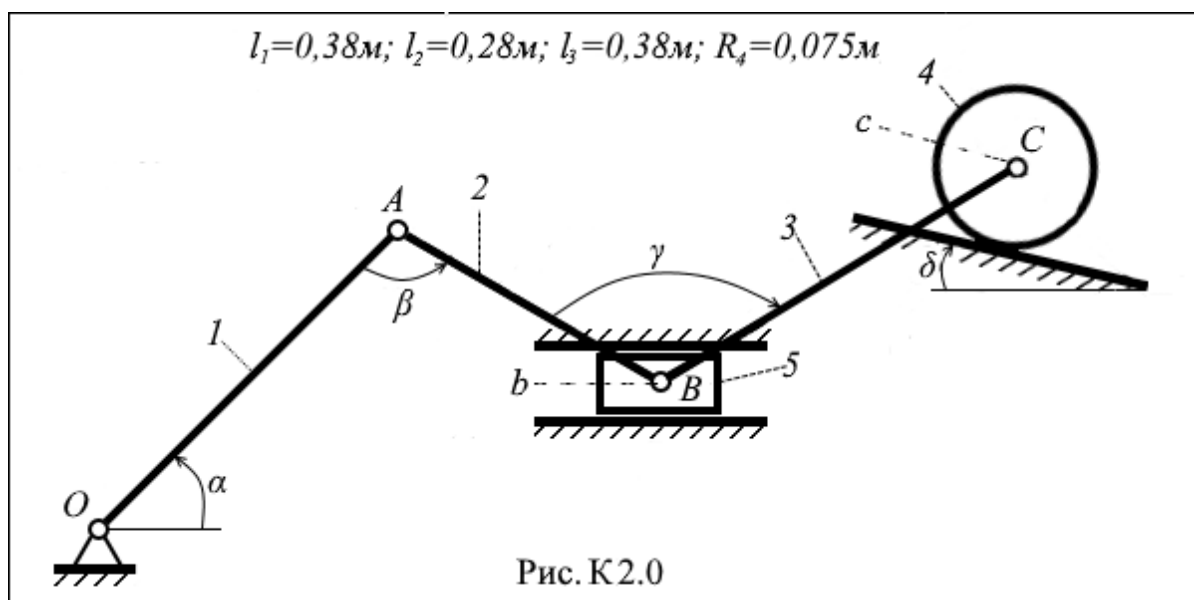
Задача К2. Определение характеристик движения точек и тел плоского механизма

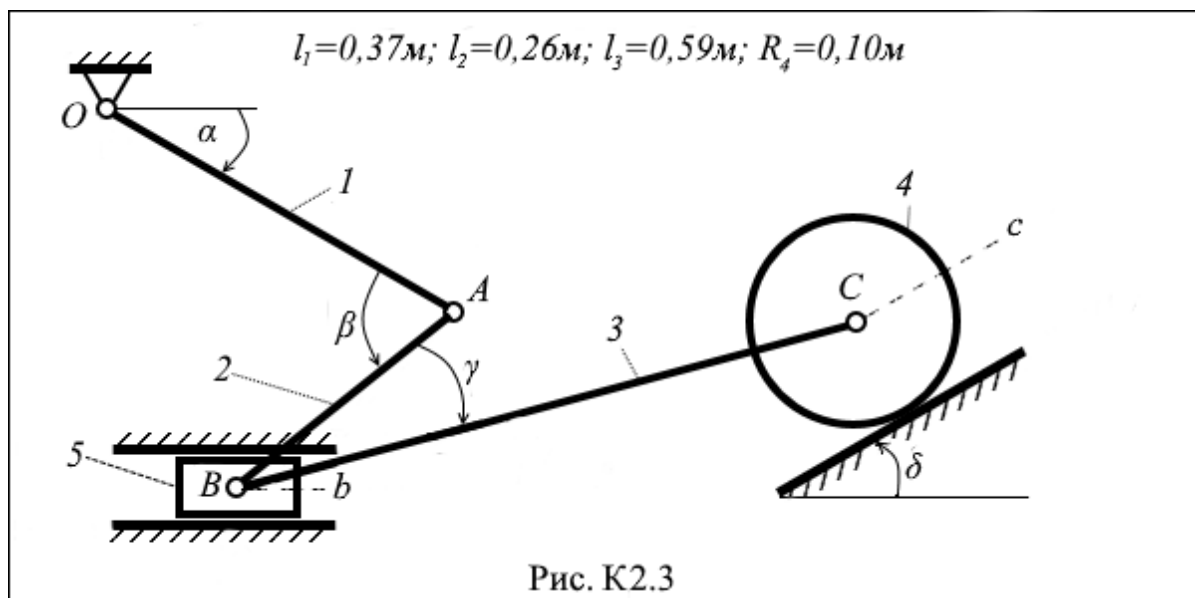
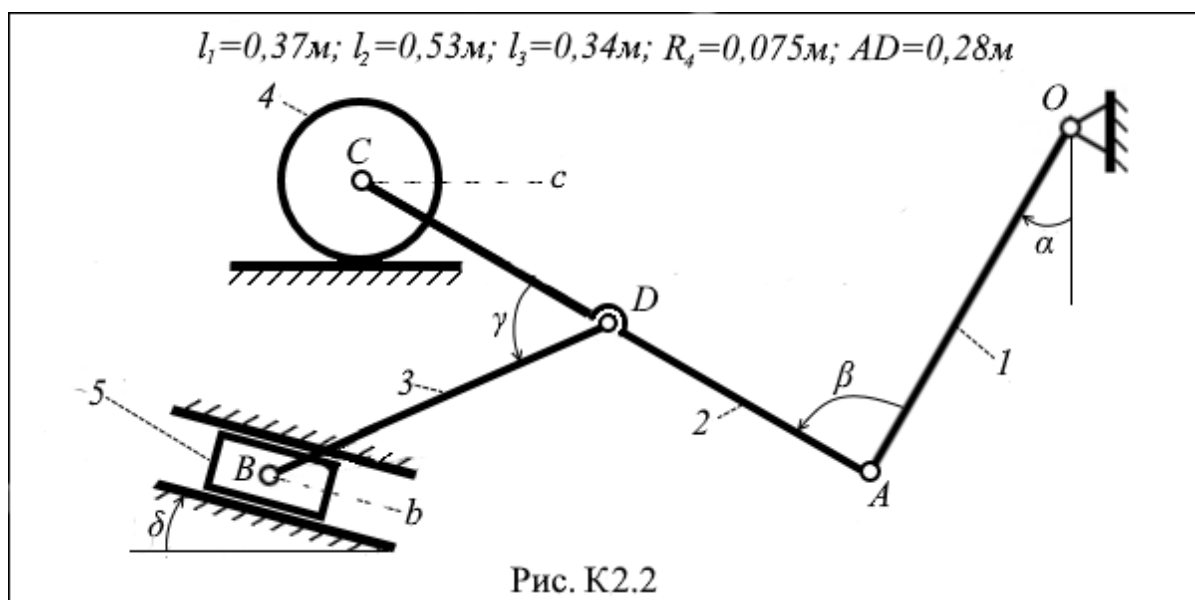
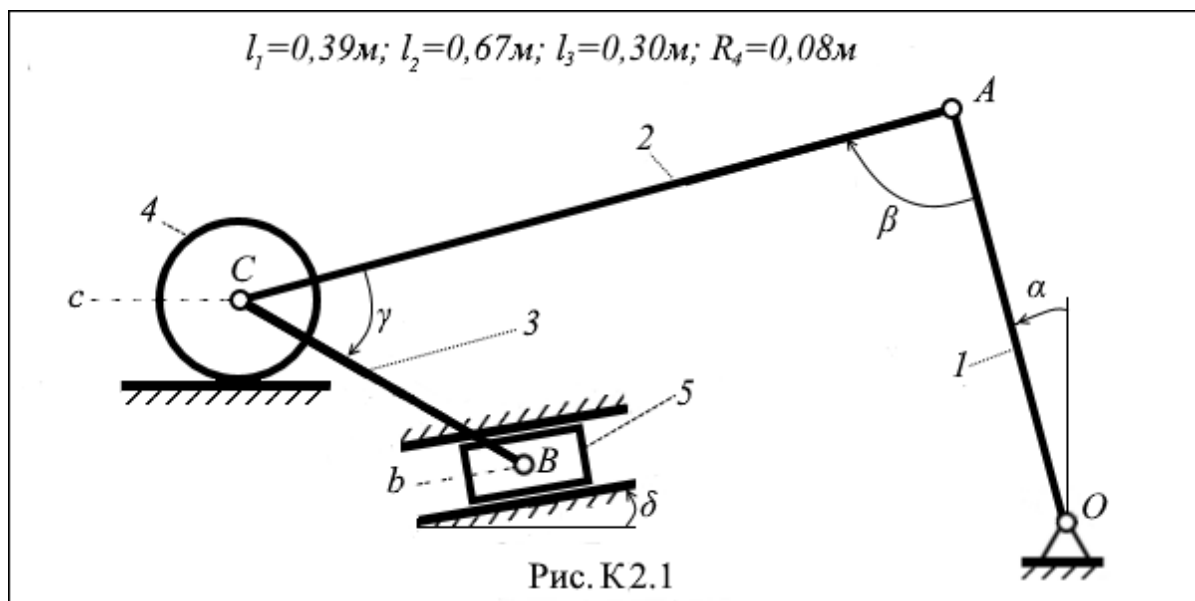
Плоский механизм, расположенный в вертикальной плоскости, состоит из стержней 1, 2, 3, катка 4 и ползуна 5, соединенных между собой и с неподвижной опорой O шарнирами (рис. К2.0÷К2.9).

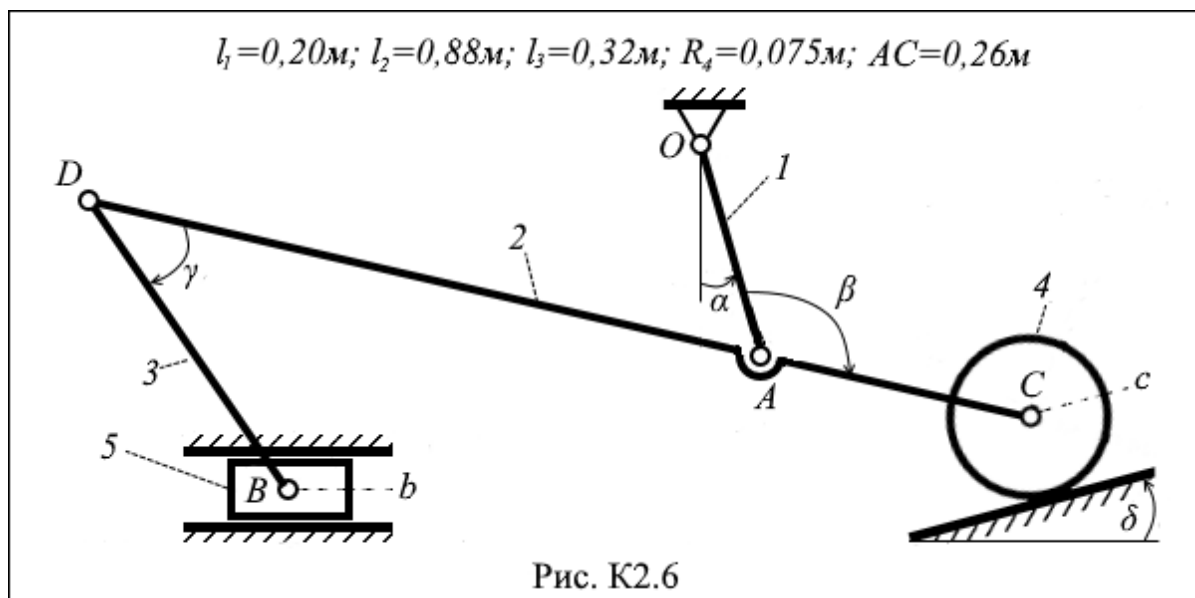
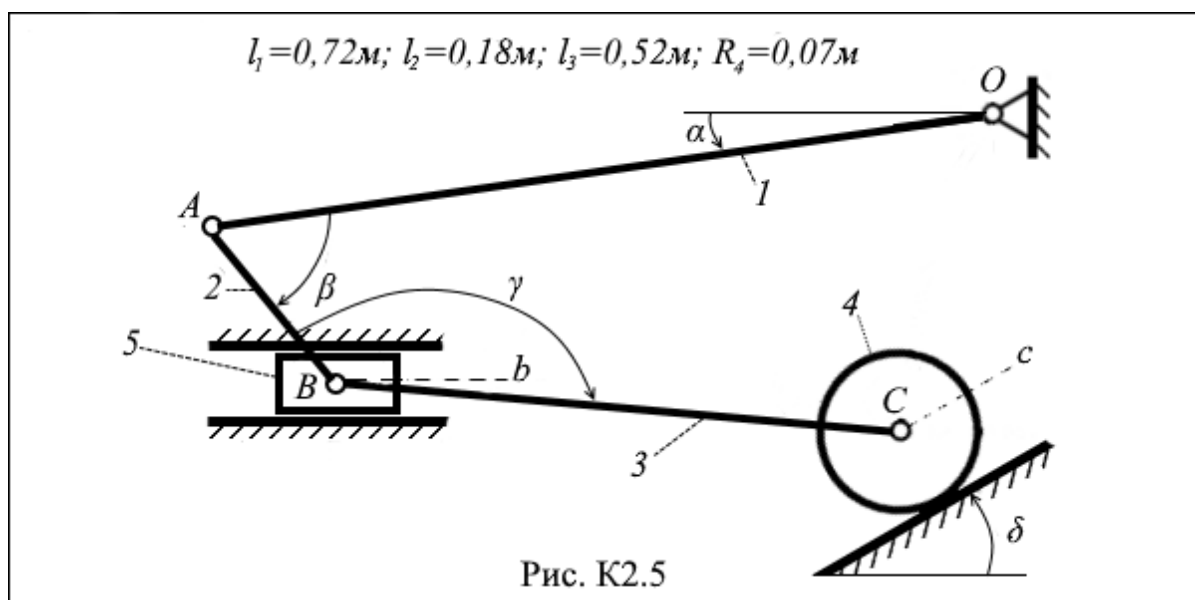
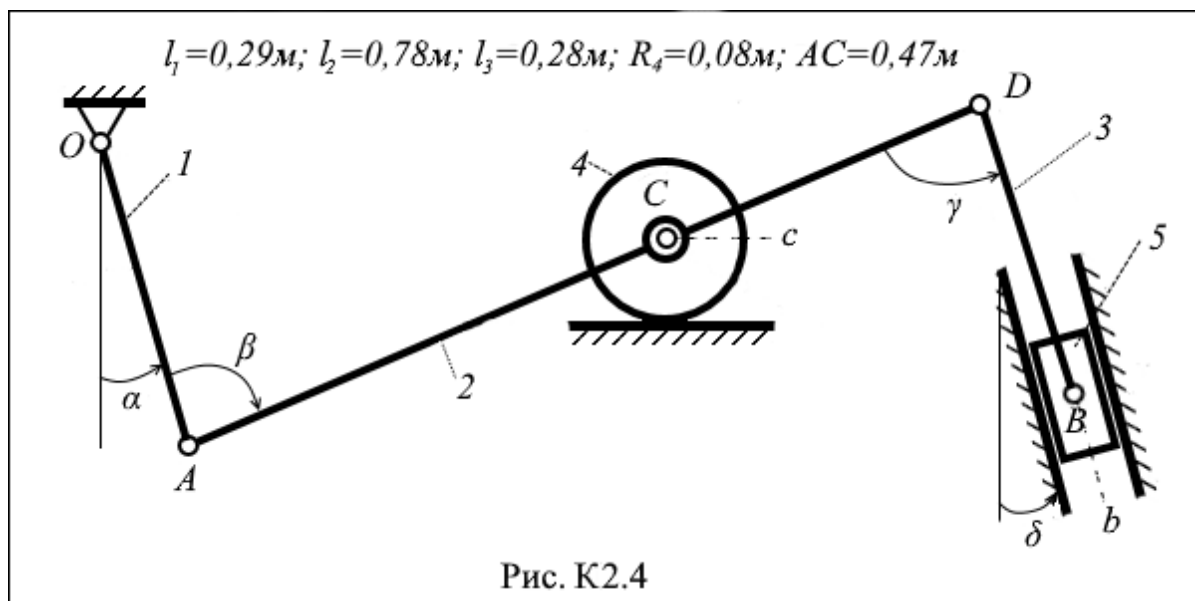
Качение катка 4 происходит без скольжения и отрыва от плоскости. Длины стержней l_1, l_2, l_3 , радиус катка R_4 и другие необходимые для расчета размеры указаны на рисунках.

В некоторый момент времени положение движущегося механизма определяется углами $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Значения этих углов, а также величина угловой скорости ведущего звена или линейная скорость одной из точек механизма указаны в табл. К2.

Для данного положения механизма определить величины, указанные в таблице в столбце «Найти».







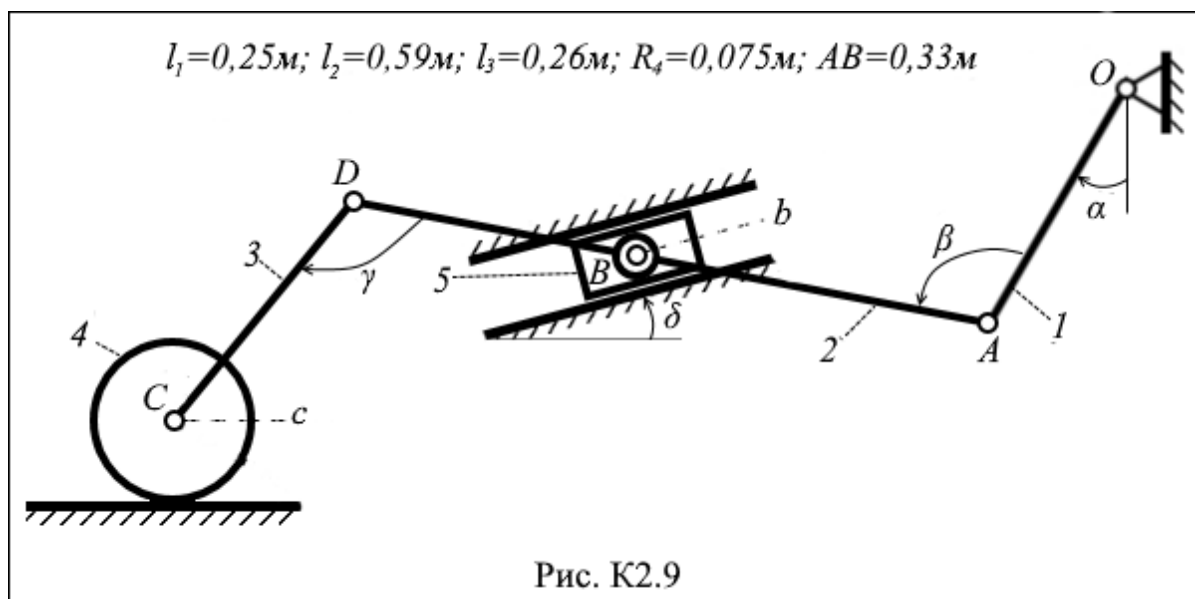
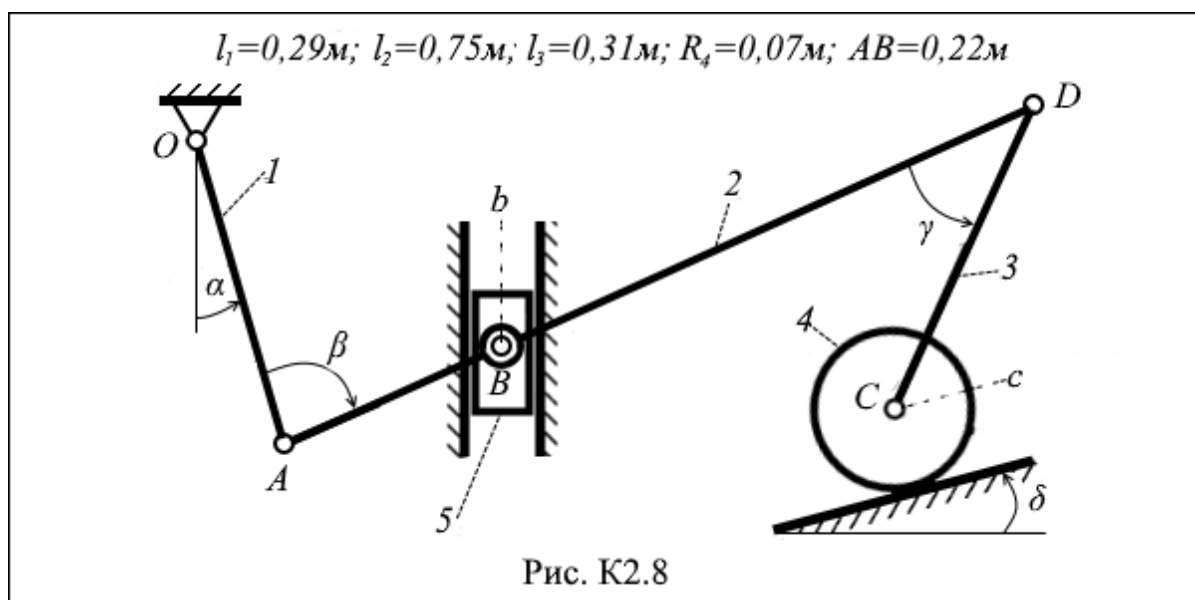
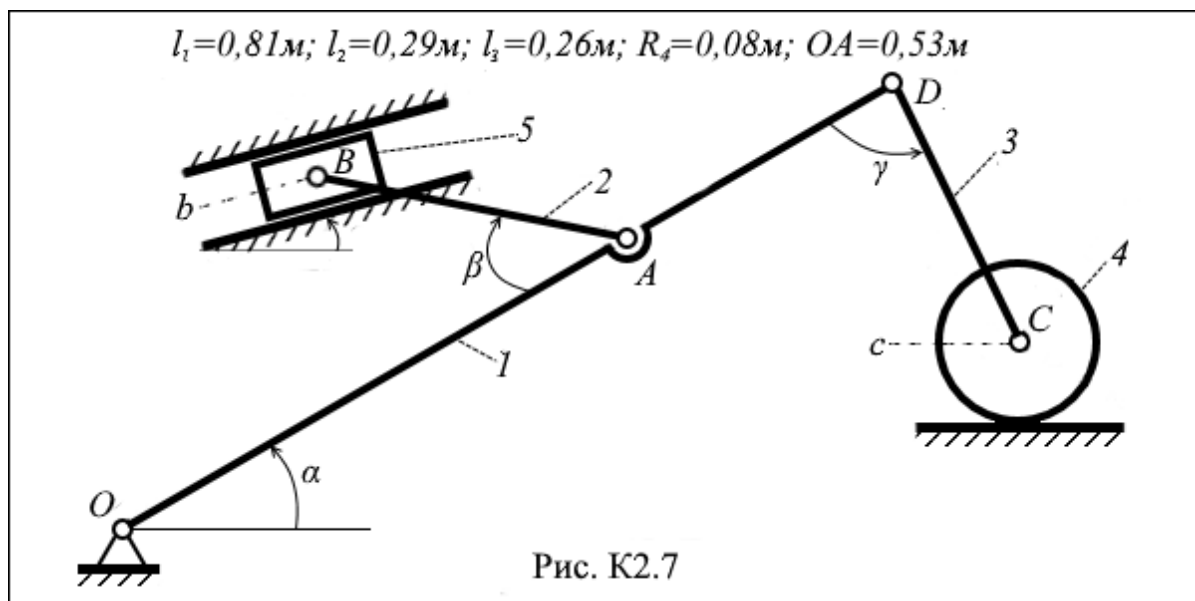


Таблица исходных данных

Номер условия	Углы в градусах				Дано			Найти
	α	β	γ	δ	$\omega_1, \text{с}^{-1}$	$V_B, \text{м/с}$	$V_C, \text{м/с}$	
0	60	135	90	30	2	—	—	$\omega_2, \omega_3, \omega_4, V_A, V_B, V_C$
1	30	90	45	45	—	—1	—	$\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, V_A, V_C$
2	—30	135	90	—30	3	—	—	$\omega_2, \omega_3, \omega_4, V_A, V_B, V_C$
3	90	120	135	45	—	—	—3	$\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, V_A, V_B$
4	30	135	120	30	—5	—	—	$\omega_2, \omega_3, \omega_4, V_A, V_B, V_C$
5	45	90	60	30	—	3	—	$\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, V_A, V_C$
6	60	135	90	—30	6	—	—	$\omega_2, \omega_3, \omega_4, V_A, V_B, V_C$
7	30	—135	120	—30	—	—	2	$\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, V_A, V_B$
8	45	120	90	45	—	2	—	$\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, V_A, V_C$
9	—30	90	135	30	—	—	5	$\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, V_A, V_B$

Рекомендации по построению схемы механизма

При построении схемы механизма углы следует откладывать с помощью транспортира, а длины стержней откладывать в масштабе (например, 1:10). Длины стержней нужно измерять между центрами концевых шарниров (это даст возможность проверки результатов расчетов расстояний и углов в ходе решения путем их измерений на рисунке).

Построение рисунка следует начинать с построения стержня 1, затем рисуется стержень 2, потом стержень 3, затем к ним присоединяются ползун 5 с направляющими и каток 4 с плоскостью, по которой он катится.

Дуговые стрелки на рисунках показывают положительное направление отсчета углов. Если в таблице указано отрицательное значение угла, то его следует откладывать в противоположном направлении, показанном на рисунке.

Положительную угловую скорость тела следует показывать дуговой стрелкой, направленной против хода часовой стрелки, отрицательную – по ходу часовой стрелки. Положительные направления заданных линейных скоростей $\vec{V}_B$ и $\vec{V}_C$ точек B и C показаны пунктирными линиями от точки B к b и от точки C к c соответственно.

Указания. Задача К2 посвящена исследованию движения твердых тел. Составные части механизма – его звенья: стержни 1, 2, 3, каток 4, ползун 5 – это твердые тела, совершающие различные виды движения. Чтобы решить эту задачу нужно предварительно изучить темы: «Поступательное движение твердого тела», «Вращение тела вокруг неподвижной оси», «Плоскопараллельное движение твердого тела».

Дополнительные необходимые для решения построения и расчеты проводятся последовательно, начиная с тела, движение которого задано. При этом, переходя к следующему телу в механизме, следует определить вид его

движения, и, используя соответствующие этому виду движения методы расчета и формулы, приступить к определению кинематических характеристик движения.

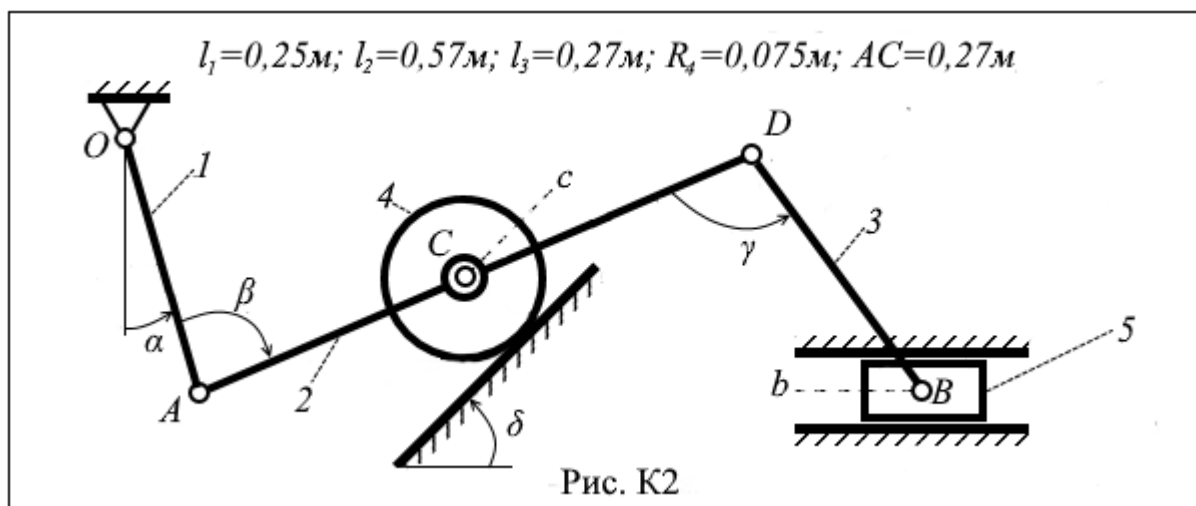
При рассмотрении движения тел совершающих плоскопараллельное движение для определения скоростей точек и угловых скоростей звеньев следует использовать понятие о мгновенном центре скоростей и применить методы и формулы, основанные на этом понятии. Для проверки расчетов линейных скоростей точек можно использовать теорему о проекциях скоростей двух точек тела на прямую, соединяющую эти точки.

Примеры решения задания К2

Пример 1

(по условию задана угловая скорость одного из звеньев механизма)

Плоский механизм, расположенный в вертикальной плоскости (рис. К2) состоит из стержней 1, 2, 3, катка 4 и ползуна 5, соединённых между собой и с неподвижной опорой O шарнирами. Качение катка 4 происходит без скольжения и отрыва от плоскости. Длины стержней l_1, l_2, l_3 , радиус катка R_4 и другие необходимые для расчета размеры указаны на рисунке. В некоторый момент времени положение движущегося механизма определяется углами $\alpha = -30^\circ$, $\beta = 60^\circ$, $\gamma = 120^\circ$, $\delta = 15^\circ$. Задана величина угловой скорости ведущего звена 1 $\omega_1 = 4 \text{ с}^{-1}$. Найти скорости точек V_A, V_B, V_C , а также угловые скорости тел $\omega_2, \omega_3, \omega_4$.



Решение примера 1

Построение схемы механизма в заданном положении. Выбираем масштаб (1:10) и строим схему механизма в соответствии с заданными углами и размерами, показываем заданную угловую скорость ω_1 ведущего звена 1 (рис. К2-1).

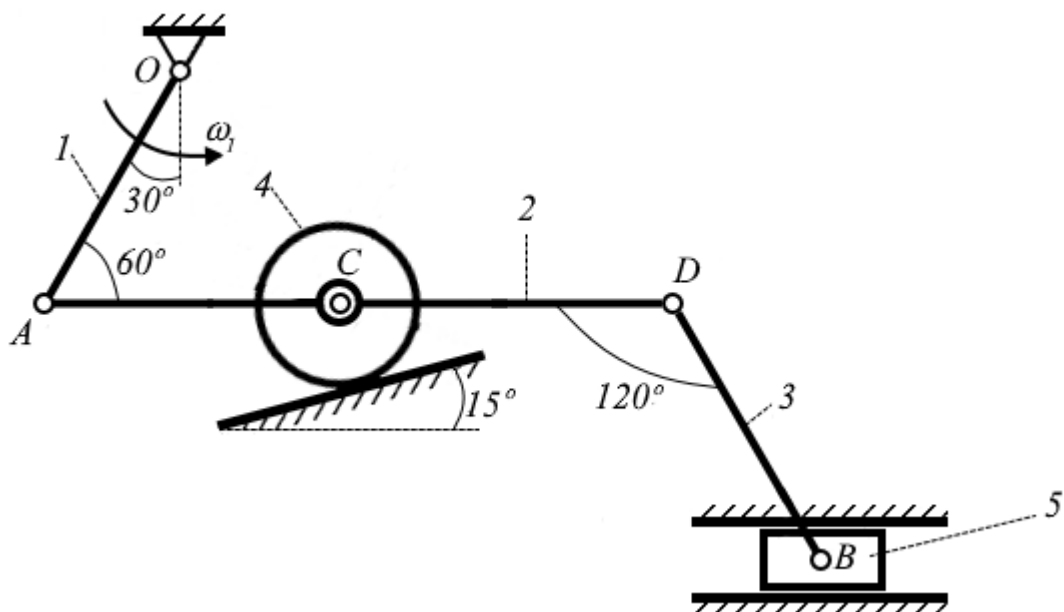


Рис. К2-1

Так как задана угловая скорость тела 1, то решение начинаем с рассмотрения движения этого тела.

Тело 1 – совершает вращение вокруг неподвижной оси.

Проводим на рисунке вектор скорости $\vec{V}_A$ точки A перпендикулярно звену OA (рис. К2-2) и определяем величину этой скорости

$$V_A = \omega_1 \cdot l_1 = 4 \cdot 0,25 = 1,0 \text{ м/с.} \quad (1)$$

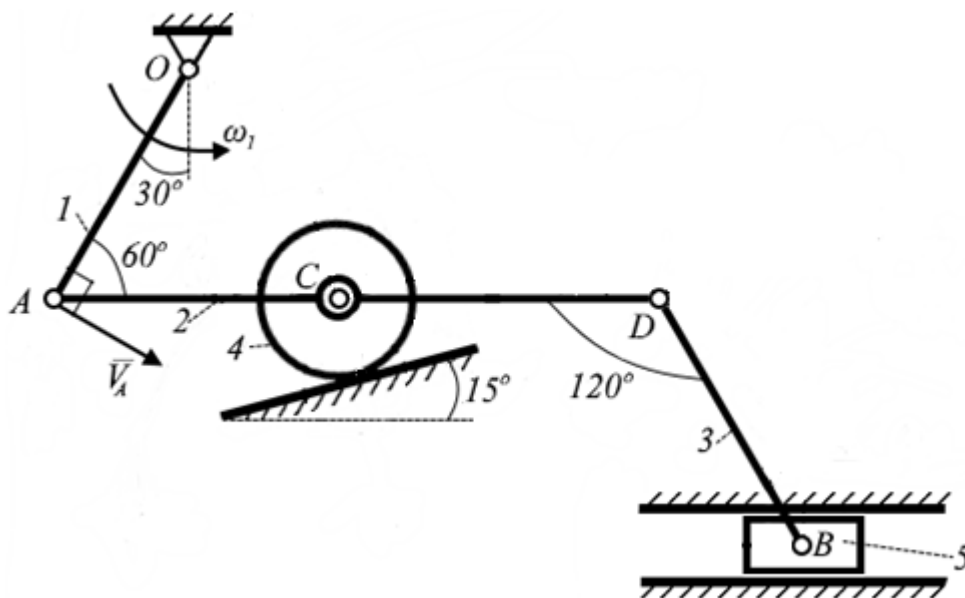


Рис. К2-2

Теперь величина и направление скорости точки A известны. И, так как эта точка принадлежит также и телу 2, переходим к рассмотрению движения этого тела.

Тело 2 – совершает плоскопараллельное движение.

Определение скоростей точек тела, совершающего плоскопараллельное движение, основывается на использовании мгновенного центра скоростей (МЦС) этого тела. Для определения положения МЦС необходимо знать направления хотя бы двух точек тела.

Направление скорости точки А известно. Можно также показать направление скорости точки С, используя следующие рассуждения. Каток 4 катится по наклонной плоскости, при этом его центр (точка С) движется вдоль прямой, параллельной этой плоскости. Поэтому вектор скорости $\vec{V}_C$ направлен вдоль этой прямой (рис. К2-3).

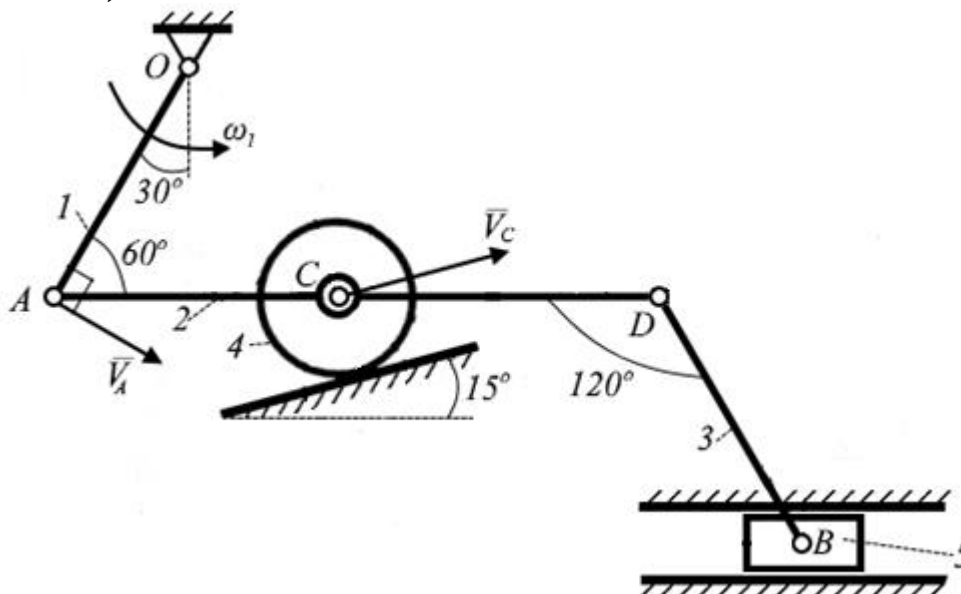


Рис. К2-3

Знание направлений скоростей точек А и С позволяет найти положение мгновенного центра скоростей (МЦС) тела 2 как точку пересечения перпендикуляров к векторам скоростей $\vec{V}_A$ и $\vec{V}_C$ точек А и С. На рисунке К2-4 эта точка обозначена как P_2 . Показываем направление угловой скорости ω_2 звена 2 в соответствии с направлением скорости точки А.

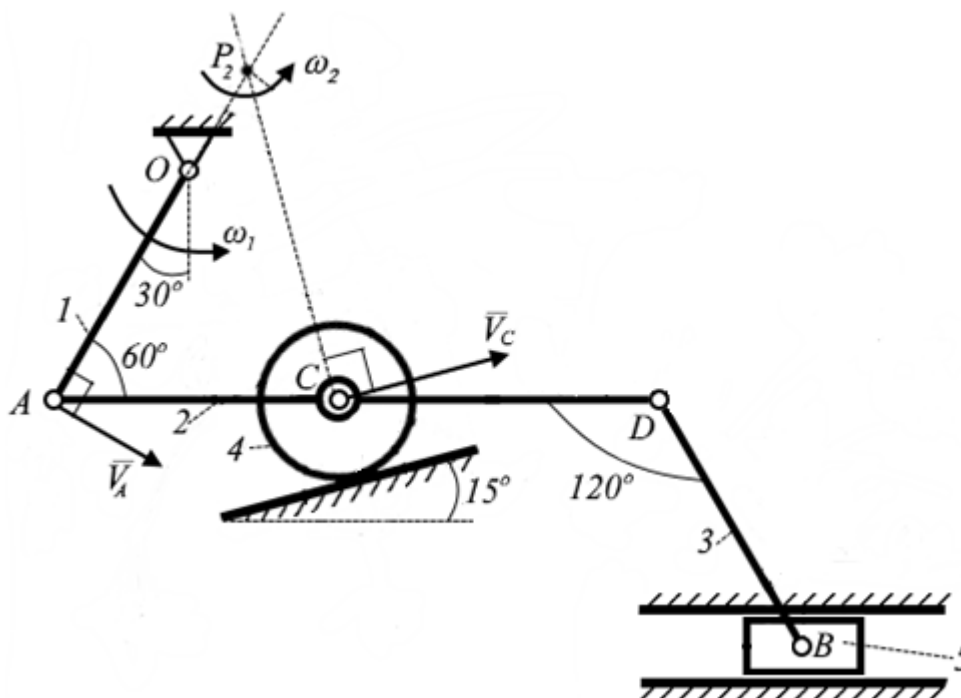


Рис. К2-4

Чтобы найти величину угловой скорости ω_2 тела 2, необходимо определить расстояние AP_2 . Для этого рассмотрим треугольник ΔP_2AC (рис. К2-4), в котором известна сторона AC и угол $\angle P_2AC$. Вычислим остальные углы:

$$\angle BDP_3 = 180^\circ - 15^\circ - 90^\circ = 75^\circ,$$

$$\angle AP_2C = 180^\circ - 60^\circ - 75^\circ = 45^\circ.$$

Определим стороны этого треугольника, используя теорему синусов:

$$\frac{AC}{\sin 45^\circ} = \frac{AP_2}{\sin 75^\circ} = \frac{CP_2}{\sin 60^\circ}. \quad (2)$$

Выражение (2) позволяет вычислить длины сторон треугольника

$$AP_2 = \frac{AC}{\sin 45^\circ} \cdot \sin 75^\circ = 0,37 \text{ м}; \quad (3)$$

$$CP_2 = \frac{AC}{\sin 45^\circ} \cdot \sin 60^\circ = 0,33 \text{ м}. \quad (4)$$

Угловую скорость тела 2 найдем следующим образом

$$\omega_2 = \frac{V_A}{AP_2} = \frac{1,0}{0,37} = 2,71 \text{ с}^{-1}. \quad (5)$$

Теперь можно вычислить модуль скорости V_C как скорость точки при вращении тела 2 вокруг МЦС (точки P_2)

$$V_C = \omega_2 \cdot CP_2 = 2,71 \cdot 0,33 = 0,89 \text{ м/с} \quad (6)$$

Точка C принадлежит также катку 4 и по её скорости в дальнейшем будет определена угловая скорость катка 4.

Для того, чтобы перейти к рассмотрению движения тела 3, определим сначала величину и выясним направление вектора скорости точки D , которая принадлежит одновременно телам 2 и 3.

Соединим МЦС тела 2 (точка P_2) с точкой D , и перпендикулярно этому отрезку P_2D проведем вектор скорости $\vec{V}_D$ точки D (рис. К2-5).

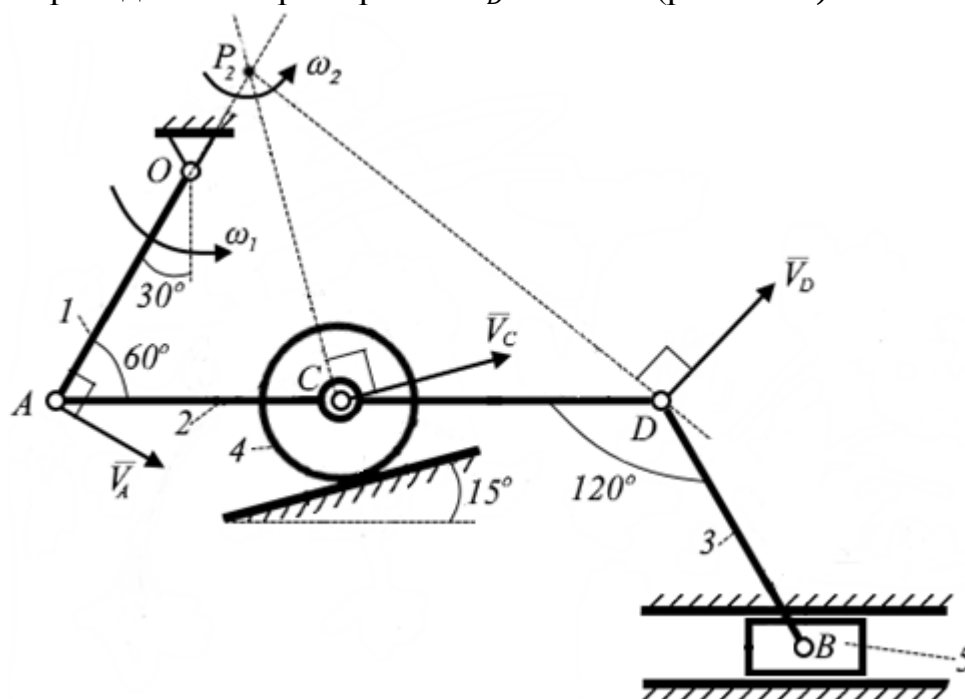


Рис. К2-5

Найдем расстояние DP_2 из $\triangle AP_2D$ (рис. К2-5), используя теорему косинусов:

$$DP_2^2 = AP_2^2 + AD^2 - 2 \cdot AP_2 \cdot AD \cdot \cos 60^\circ;$$

$$DP_2 = \sqrt{0,37^2 + 0,57^2 - 2 \cdot 0,37 \cdot 0,57 \cdot 0,5} = 0,50 \text{ м.} \quad (7)$$

Модуль скорости V_D точки D находим как скорость точки тела 2 при его вращении вокруг МЦС P_2 :

$$V_D = \omega_2 \cdot DP_2 = 2,71 \cdot 0,5 = 1,35 \text{ м.} \quad (8)$$

Тело 3 – совершает плоскопараллельное движение.

Для тела 3, которое так же, как и тело 2, совершает плоскопараллельное движение, необходимо найти положение МЦС. Направление скорости точки D тела 3 уже показано. Выясним направление скорости еще одной точки этого тела, точки B . Точка B принадлежит телу 3 и ползуну 5. Последний совершает поступательное движение вдоль прямолинейных направляющих, следовательно, точка B движется прямолинейно. Направляем вектор скорости $\vec{V}_B$ точки B и, зная для тела 3 направления скоростей двух точек D и B , находим МЦС – точку P_3 , как точку пересечения перпендикуляров к векторам скоростей $\vec{V}_D$ и $\vec{V}_B$ (рис. К2-6). Теперь можно показать направление угловой скорости ω_3 тела 3, считая, что тело 3 в данный момент времени вращается вокруг своего МЦС (точки P_3).

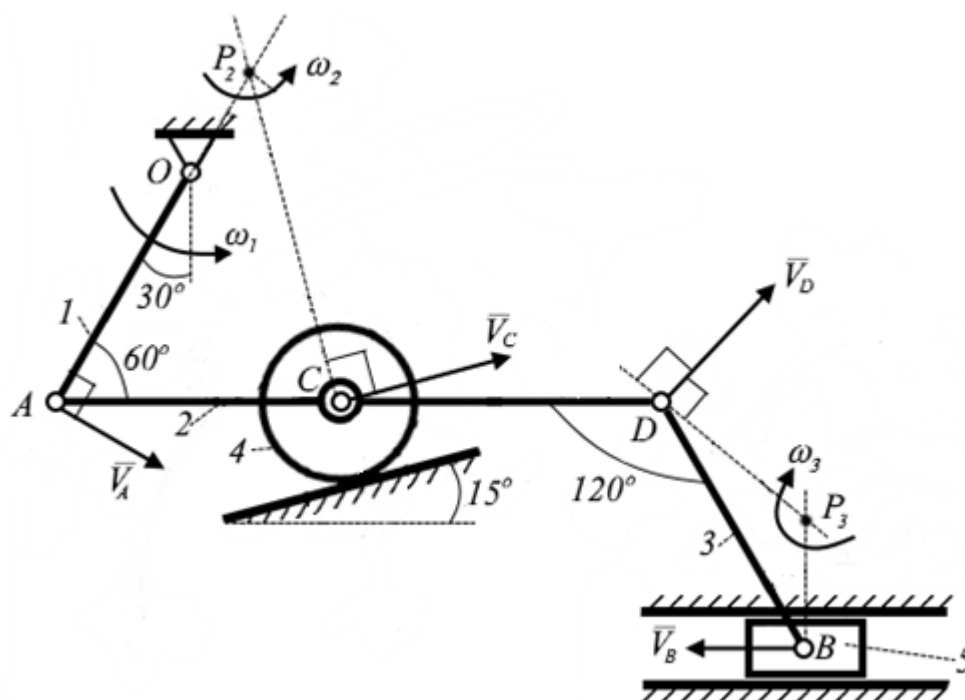


Рис. К2-6

Угловую скорость ω_3 тела 3 можно найти по формуле

$$\omega_3 = \frac{V_D}{DP_3}. \quad (9)$$

Чтобы найти расстояние DP_3 , нужно знать углы в треугольнике ΔDP_3B (рис. К2-6), поэтому, предварительно определим $\angle P_2DA$ из одноименного треугольника, используя теорему косинусов:

$$AP_2^2 = DP_2^2 + AD^2 - 2 \cdot DP_2 \cdot AD \cos \angle P_2DA;$$

откуда

$$\cos \angle P_2DA = \frac{DP_2^2 + AD^2 - AP_2^2}{2 \cdot DP_2 \cdot AD} = \frac{0,50^2 + 0,57^2 - 0,37^2}{2 \cdot 0,50 \cdot 0,57} = 0,77;$$

$$\angle P_2DA = \arccos 0,770 = 39,65^\circ. \quad (10)$$

Далее, рассмотрим ΔDP_3B (рис. К2-6), и определим его углы:

$$\angle DBP_3 = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ,$$

$$\angle BDP_3 = 180^\circ - 39,65^\circ - 120^\circ = 20,35^\circ,$$

$$\angle DP_3B = 180^\circ - 30^\circ - 20,35^\circ = 129,65^\circ.$$

Теперь для нахождения неизвестных сторон треугольника ΔDP_3B запишем теорему синусов:

$$\frac{DB}{\sin 129,65^\circ} = \frac{DP_3}{\sin 30^\circ} = \frac{BP_3}{\sin 20,35^\circ}. \quad (11)$$

Это позволяет найти стороны DP_3 и BP_3 :

$$DP_3 = \frac{DB}{\sin 129,65^\circ} \cdot \sin 30^\circ = \frac{0,27}{0,77} \cdot 0,5 = 0,17 \text{ м}; \quad (12)$$

$$BP_3 = \frac{DB}{\sin 129,652^\circ} \cdot \sin 20,35^\circ = \frac{0,27}{0,77} \cdot 0,35 = 0,12 \text{ м.} \quad (13)$$

Подставляя найденное значение DP_3 в формулу (9), получим

$$\omega_3 = \frac{V_D}{DP_3} = \frac{1,358}{0,175} = 7,76 \text{ с}^{-1}. \quad (14)$$

Модуль скорости V_B найдем как скорость точки B при вращении тела 3 вокруг его МЦС (точки P_3)

$$V_B = \omega_3 \cdot BP_3 = 7,76 \cdot 0,12 = 0,93 \text{ м/с.} \quad (15)$$

Тело 4 – совершает плоскопараллельное движение.

Для катка 4, катящегося без скольжения по неподвижной плоскости, МЦС – это точка P_4 касания катка с плоскостью. Скорость точки C катка уже найдена при рассмотрении движения тела 2. Показываем направление угловой скорости ω_4 катка 4 в соответствии с направлением вектора скорости $\vec{V}_C$ (рис. К2-7).

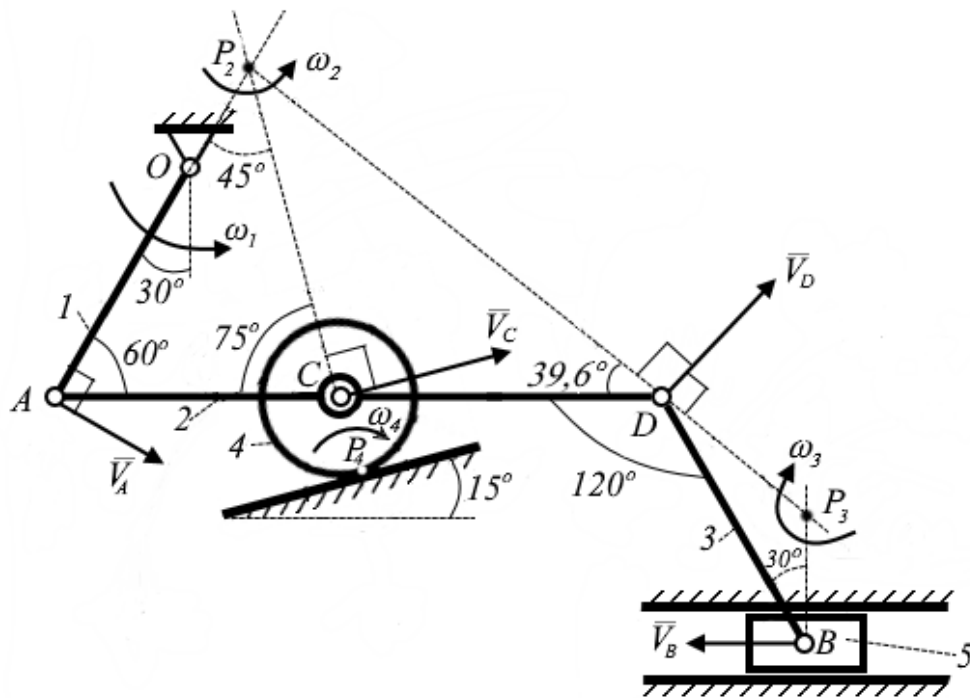


Рис. К2-7

Вычислим величину угловой скорости ω_4

$$\omega_4 = \frac{V_C}{CP_4} = \frac{V_C}{R_4} = \frac{0,89}{0,075} = 11,86 \text{ с}^{-1}. \quad (16)$$

Примечание 1

При желании, можно проверить результаты расчетов линейных скоростей точек механизма с помощью теоремы о проекциях скоростей двух точек тела на прямую, соединяющую эти точки.

Проверка

Для точек A и D принадлежащих телу 2 формула выражающая теорему запишется в виде

$$\text{проекция}_{AD} \vec{V}_A = \text{проекция}_{AD} \vec{V}_D$$

Вычисляя проекции скоростей, получаем

$$V_A \cdot \cos 30^\circ = V_D \cos 50,35^\circ.$$

$$1,0 \cdot 0,866 = 1,35 \cdot 0,638;$$

$$0,866 = 0,866.$$

Получили тождество.

Аналогично, для скоростей точек B и D , принадлежащих телу 3, получим следующие выражения:

$$\text{проекция}_{BD} \vec{V}_B = \text{проекция}_{BD} \vec{V}_D;$$

$$V_B \cdot \cos 60^\circ = V_D \cos 69.65^\circ;$$

$$0,946 \cdot 0,5 = 1,35 \cdot 0,347;$$

$$0,473 = 0,473.$$

Таким образом, уравнения, выражающие теорему о проекциях скоростей двух точек тела, превращаются в тождества. Это подтверждает правильность решения.

Ответы представим в таблице

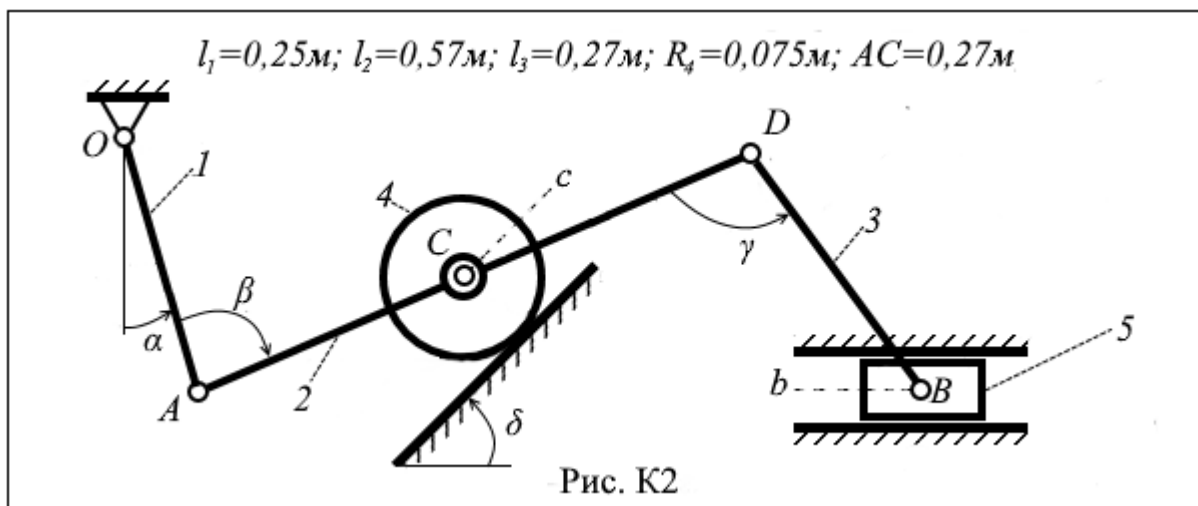
$\omega_2,$ с ⁻¹	$\omega_3,$ с ⁻¹	$\omega_4,$ с ⁻¹	V_A м/с	V_B м/с	V_C м/с
2,71	7,76	11,86	1,0	0,93	0,89

Пример 2

(по условию задана скорость одной из точек механизма)

Плоский механизм, расположенный в вертикальной плоскости (рис. К2) состоит из стержней 1, 2, 3, катка 4 и ползуна 5, соединённых между собой и с неподвижной опорой O шарнирами. Качение катка 4 происходит без скольжения и отрыва от плоскости. Длины стержней l_1, l_2, l_3 , радиус катка R_4 и другие необходимые для расчета размеры указаны на рисунке. В некоторый момент времени положение движущегося механизма определяется углами $\alpha = -30^\circ$, $\beta = 60^\circ$, $\gamma = 120^\circ$, $\delta = 15^\circ$. Задана величина скорости ползуна B $V_B = 2$ м/с.

Найти скорости точек V_A, V_C , а также угловые скорости тел $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$.

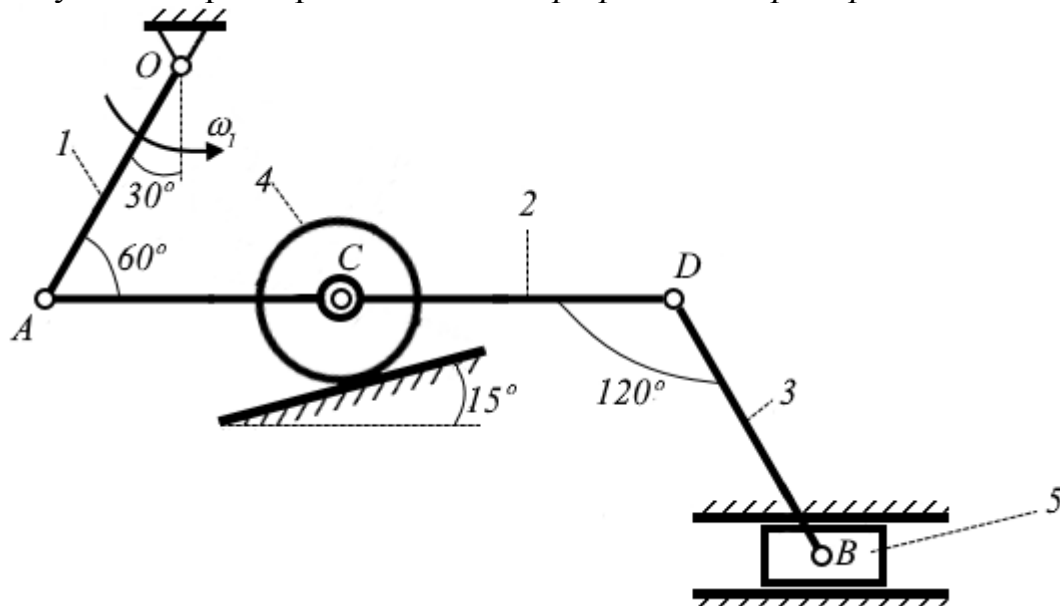


Примечание 2

Анализ условий заданий Примеров 1 и 2 показывает, что они отличаются только ведущими звеньями: в Примере 1 это звено 1, а в примере 2 это звено 5, и, соответственно, искомыми величинами.

Решение примера 2

Построение схемы механизма в заданном положении в соответствии с заданными углами и размерами пояснено при решении Примера 1.



Показываем заданную линейную скорость $\bar{V}_B$ в направлении от точки B к b , так как в условии задания величина V_B положительна (рис. К2-8).

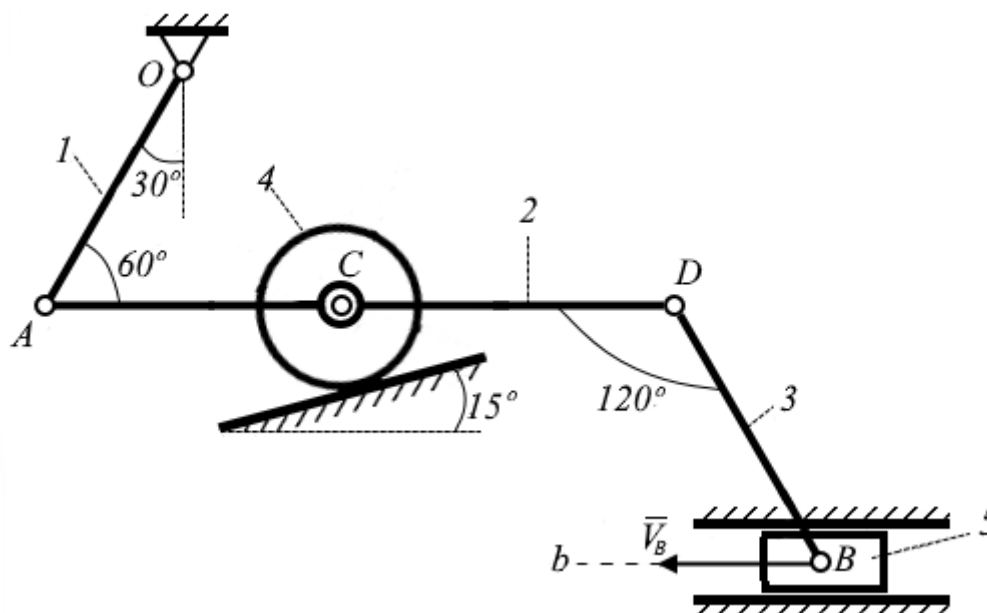


Рис. К2-8

Точка В принадлежит телам 3 и 5, поэтому решение начнем с рассмотрения движения тела 3.

Тело 3 – совершает плоскопараллельное движение.

Известна скорость $\vec{V}_B$ точки В, относящейся как к ползуну 5, так и телу 3. Чтобы определить параметры движения тела 3, необходимо найти положение его МЦС, а для этого нужно определить направление скорости еще одной точки этого тела. Такой точкой может быть точка D.

Направление вектора скорости точки D тела 3 неизвестно, поэтому попытаемся определить это направление, рассматривая точку D как принадлежащую телу 2.

Тело 2 – совершает плоскопараллельное движение.

Рассмотрим движение точки А этого тела, которая принадлежит одновременно телам 2 и 1. Тело 1 вращается вокруг неподвижной оси О, поэтому направление вектора $\vec{V}_A$ скорости точки А перпендикулярно прямой, соединяющей точку А с осью вращения тела 1 (точка О).

Точка С, принадлежащая одновременно телам 2 и 4, движется по прямой, параллельной наклонной плоскости, поэтому вектор скорости $\vec{V}_C$ направлен вдоль этой прямой.

По известным направлениям скоростей точек А и С тела 2 определяется положение мгновенного центра скоростей тела 2 (точка P_2) как точка пересечения перпендикуляров к этим направлениям векторов скоростей $\vec{V}_A$ и $\vec{V}_C$ (рис. К2-9).

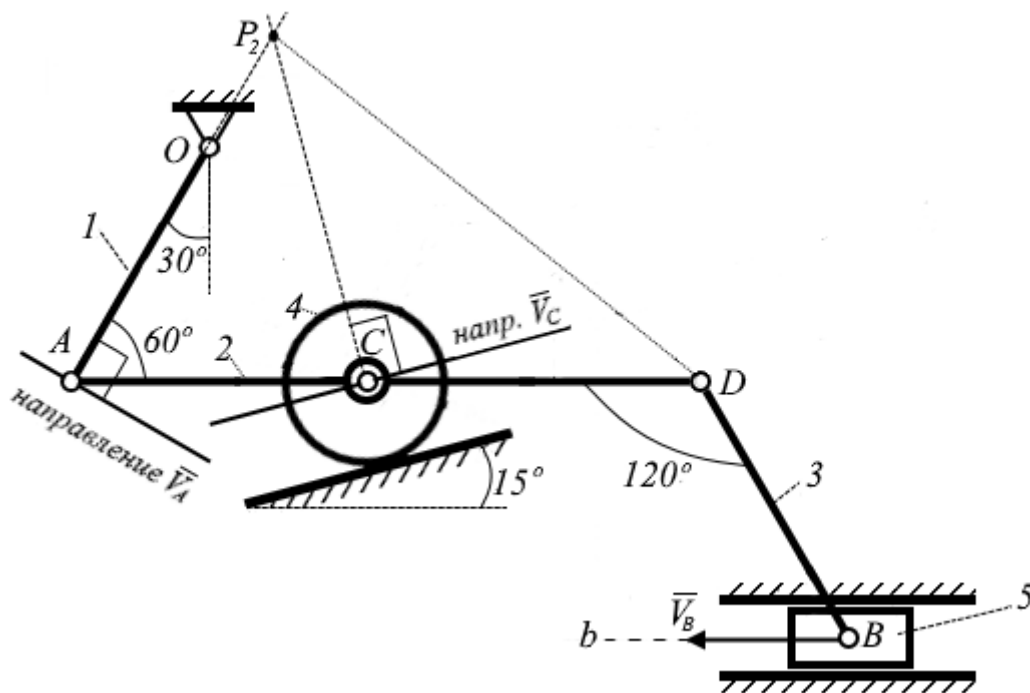


Рис. К2-9

Для нахождения направления вектора скорости точки D , соединим МЦС тела 2 точку P_2 с точкой D , и проведем из точки D прямую, перпендикулярную к прямой P_2D . Вдоль этой прямой следует направить скорость точки D (рис. К2-10).

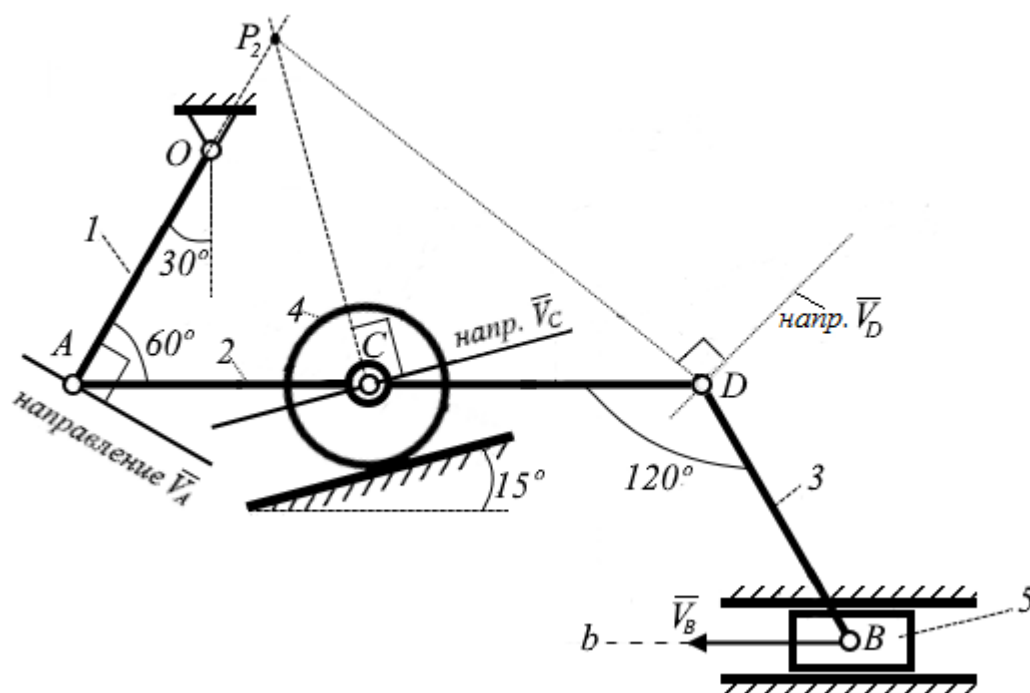


Рис. К2-10

Чтобы определить, в какую сторону вдоль этой прямой направлен вектор $\vec{V}_D$, будем считать точку D принадлежащей телу 3 и применим для этого тела теорему о проекциях скоростей точек D и B , на соединяющую их прямую BD :

$$\text{проекция}_{BD} \vec{V}_B = \text{проекция}_{BD} \vec{V}_D.$$

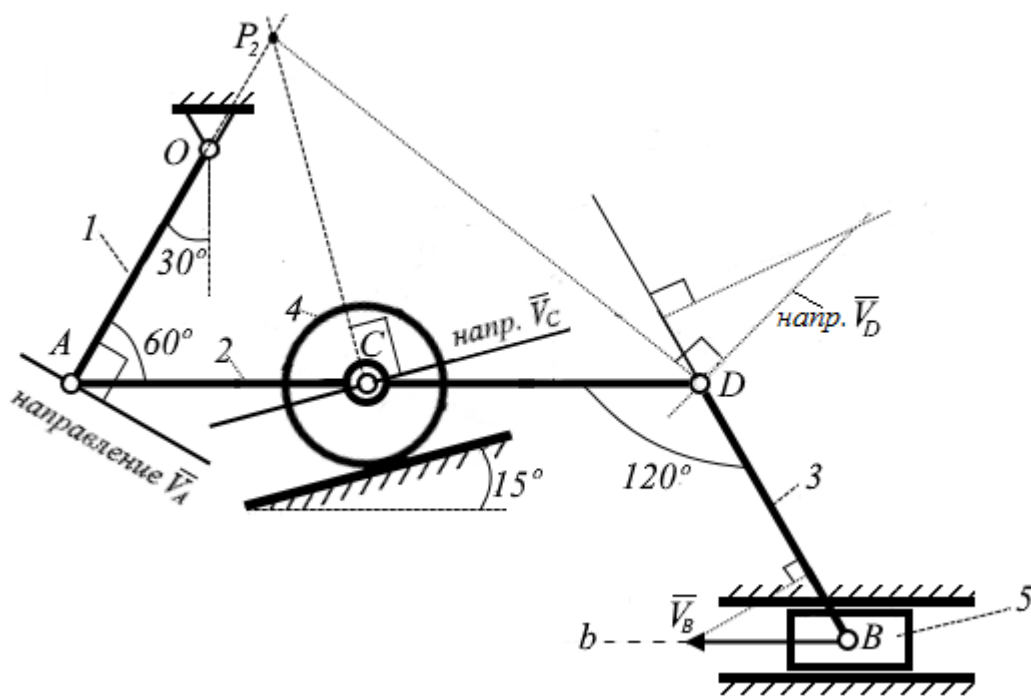


Рис. К2-11

Из рис. К2-11 показывает, что проекция $\vec{V}_B$ на прямую BD имеет направление от точки B к точке D , следовательно, и вектор скорости $\vec{V}_D$ должен иметь такое направление, чтобы его проекция на прямую BD имела такое же направление. Таким образом, направление вектора скорости $\vec{V}_D$ точки D определено (рис. К2-12), и можно вернуться к рассмотрению движения тела 3.

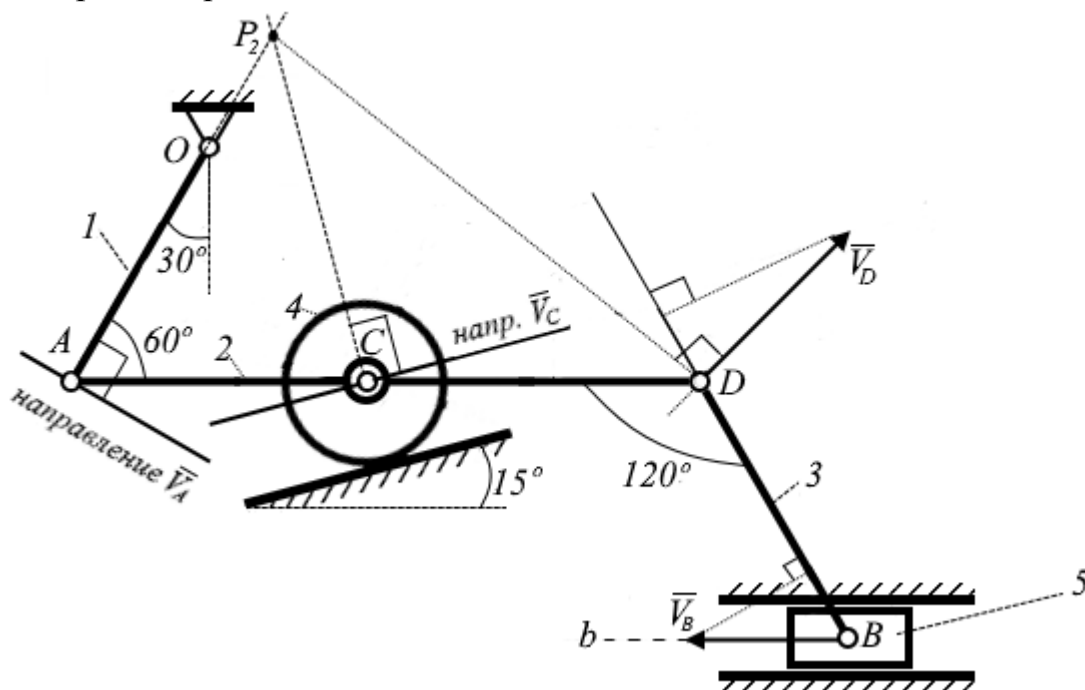


Рис. К2-12

Зная направления скоростей точек D и B , найдем МЦС тела 3 - точку P_3 , как точку пересечения перпендикуляров к векторам скоростей $\vec{V}_D$ и $\vec{V}_B$, и покажем на рис. К2-13 угловую скорость ω_3 , считая, что тело 3 в данный момент времени вращается вокруг точки P_3 .

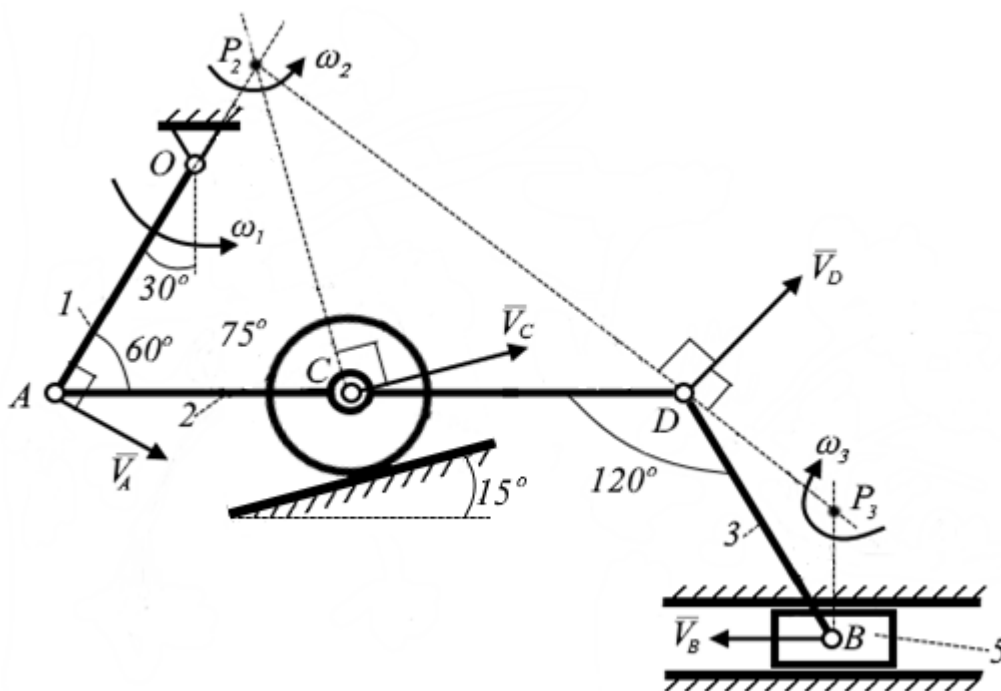


Рис. К2-13

Определим величину угловой скорости тела 3

$$\omega_3 = \frac{V_B}{BP_3} = \frac{2}{0,12} = 16,39 \text{ с}^{-1},$$

где расстояние BP_3 найдено ранее по формуле (13).

Вычислим величину скорости точки D

$$V_D = \omega_3 \cdot DP_3 = 16,39 \cdot 0,17 = 2,78 \text{ м/с},$$

где расстояние DP_3 уже найдено ранее по формуле (12).

Перейдем к рассмотрению тела 2.

Тело 2 – совершает плоскопараллельное движение.

Тело 2 в данный момент времени вращается вокруг своего МЦС – точки P_2 , поэтому угловую скорость тела 2 находим в виде

$$\omega_2 = \frac{V_D}{DP_2} = \frac{2,78}{0,50} = 5,56 \text{ с}^{-1},$$

где расстояние DP_2 вычислено ранее по формуле (7), а величины скоростей точек C и A определяются следующим образом

$$V_C = \omega_2 \cdot CP_2 = 5,56 \cdot 0,33 = 1,83 \text{ м/с},$$

$$V_A = \omega_2 \cdot AP_2 = 5,56 \cdot 0,37 = 2,06 \text{ м/с},$$

в которых расстояния CP_2 и AP_2 вычислены ранее, соответственно, в формулах (4) и (3).

Тело 4 – совершает плоскопараллельное движение.

Для катка 4, катящегося без скольжения по неподвижной плоскости МЦС – это точка P_4 – точка касания катка с плоскостью. Скорость точки C уже найдена

при расчете параметров движения тела 2. Покажем направление угловой скорости ω_4 катка 4 в соответствии с направлением вектора скорости $\vec{V}_C$ точки C (рис. К2-14).

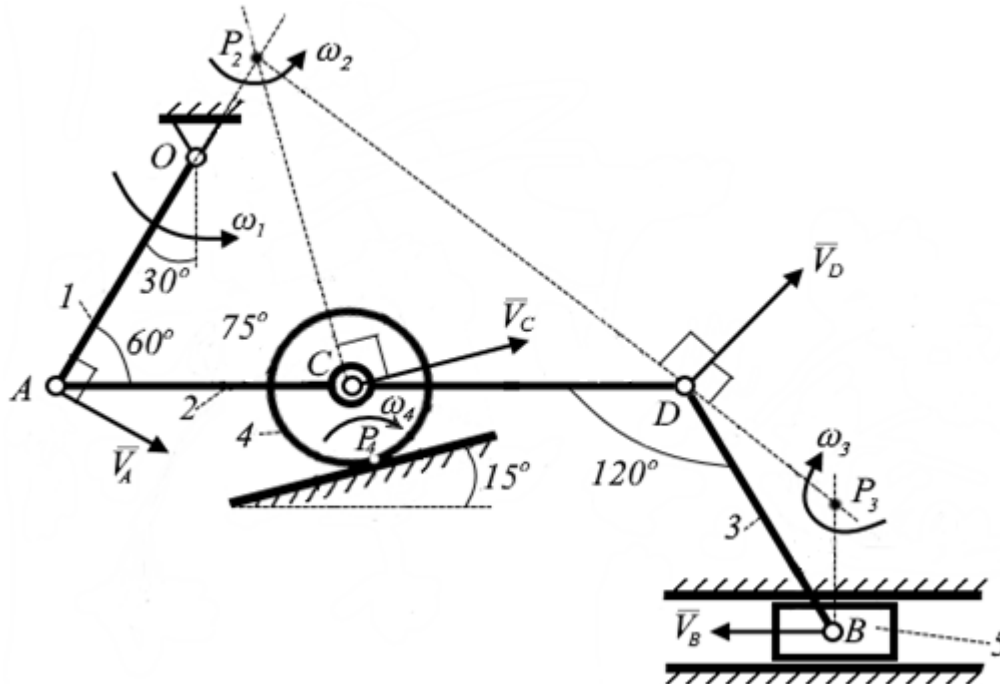


Рис. К2-14

Найдем угловую скорость ω_4 катка 4

$$\omega_4 = \frac{V_C}{CP_4} = \frac{V_C}{R_4} = \frac{1,83}{0,075} = 24,40 \text{ c}^{-1}.$$

Тело 1 – совершает вращение вокруг неподвижной оси.

Тело 1 вращается вокруг неподвижной оси O , поэтому угловую скорость звена 1 найдем в виде

$$\omega_1 = \frac{V_A}{l_1} = \frac{2,06}{0,25} = 8,24 \text{ c}^{-1}.$$

Ответы представим в таблице

$\omega_1,$ c^{-1}	$\omega_2,$ c^{-1}	$\omega_3,$ c^{-1}	$\omega_4,$ c^{-1}	V_A м/с	V_C м/с
8,24	5,56	16,39	24,4	2,06	1,83

ДИНАМИКА

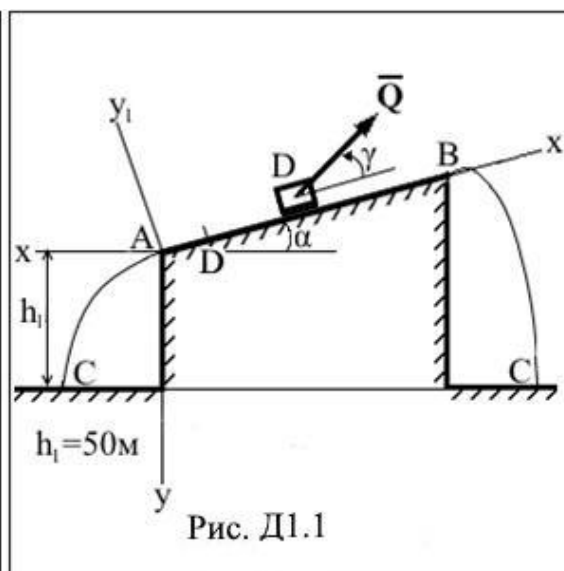
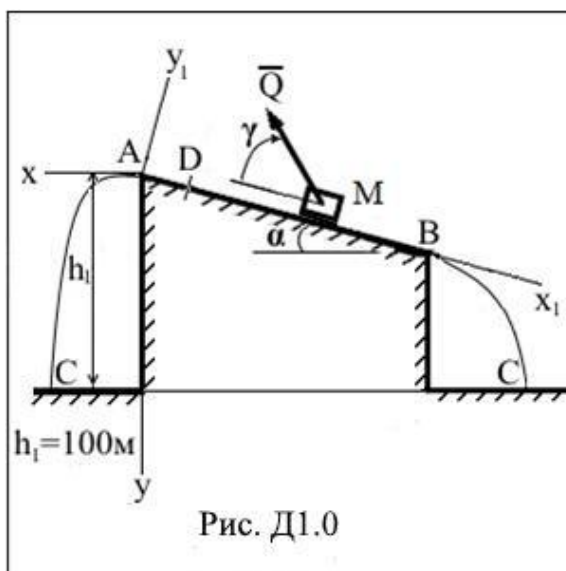
Задача Д1. Интегрирование дифференциальных уравнений движения точки, находящейся под действием постоянных сил

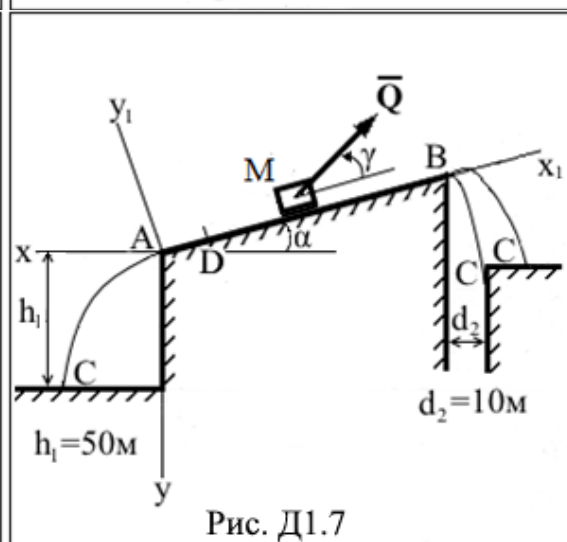
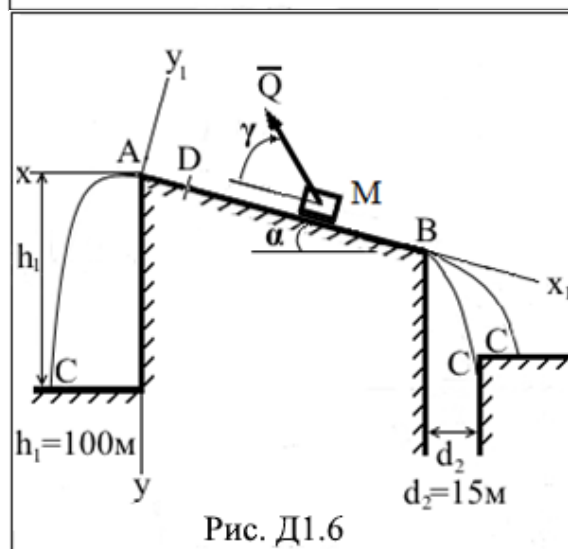
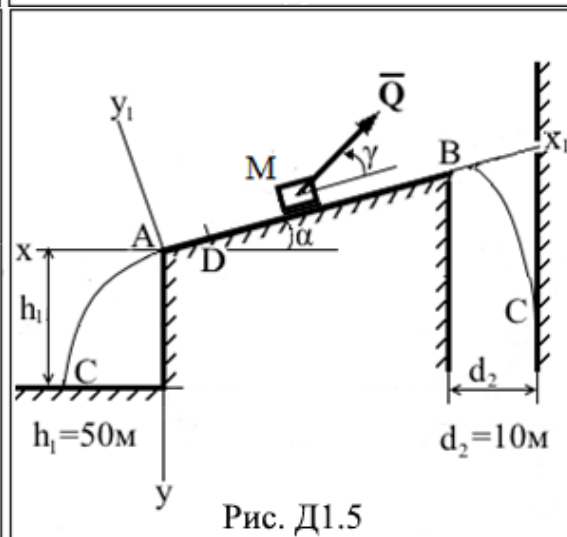
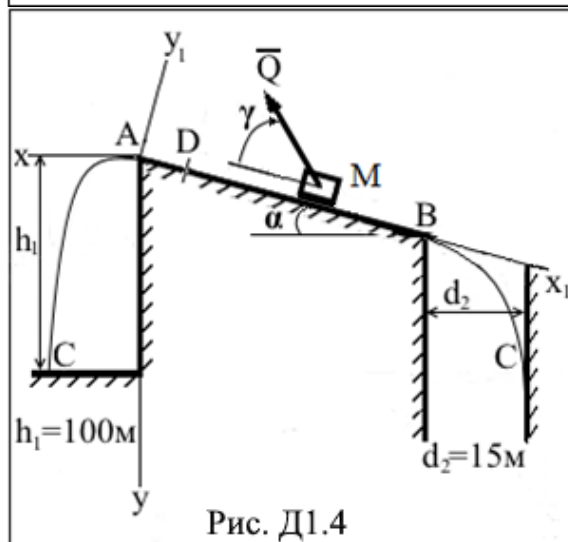
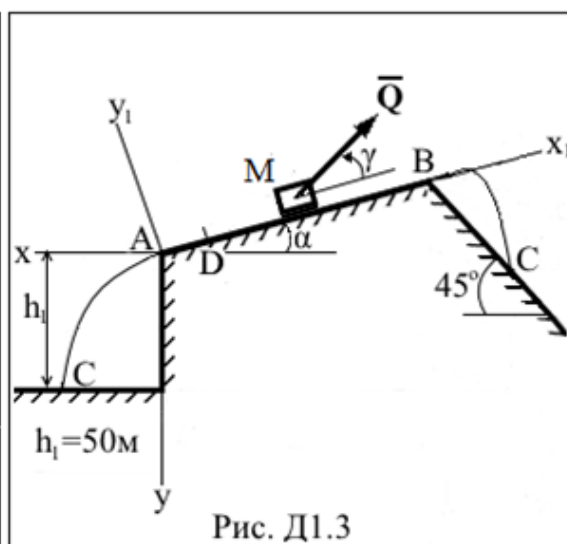
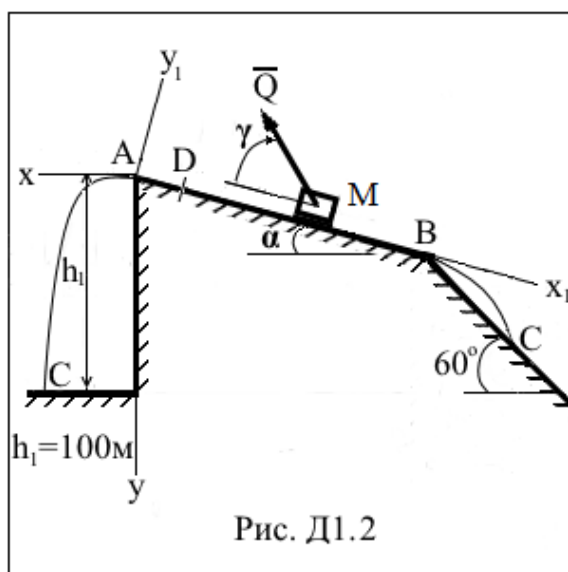
Груз M массой m начинает движение из точки D с начальной скоростью V_0 . Его движение происходит по наклонной плоскости длины l , составляющей угол α с горизонтом вдоль линии AB наибольшего ската (рис. Д1.0 ÷ Д1.9). Положение точки D задается величиной $AD = s_0$, вектор начальной скорости $\vec{V}_0$ направлен параллельно прямой AB к точке B . При движении по плоскости на груз действует постоянная сила Q , направление которой задается углом γ ; коэффициент трения скольжения между грузом и наклонной плоскостью равен f . Через τ с груз покидает плоскость или в точке A , или в точке B и, двигаясь далее в вертикальной плоскости под действием только силы тяжести, через T секунд после отделения от плоскости попадает в точку C . Все возможные варианты траекторий движения груза в точку C показаны на рисунках.

Считая груз материальной точкой найти:

- точку (A или B) отрыва груза от плоскости;
- время τ движения груза по наклонной плоскости;
- скорость груза V_B (или V_A) в момент отрыва;
- координаты x_C, y_C точки C приземления груза;
- время T движения груза в воздухе;
- скорость V_C груза в точке падения.

Необходимые данные приведены на рисунках и в табл. Д1.





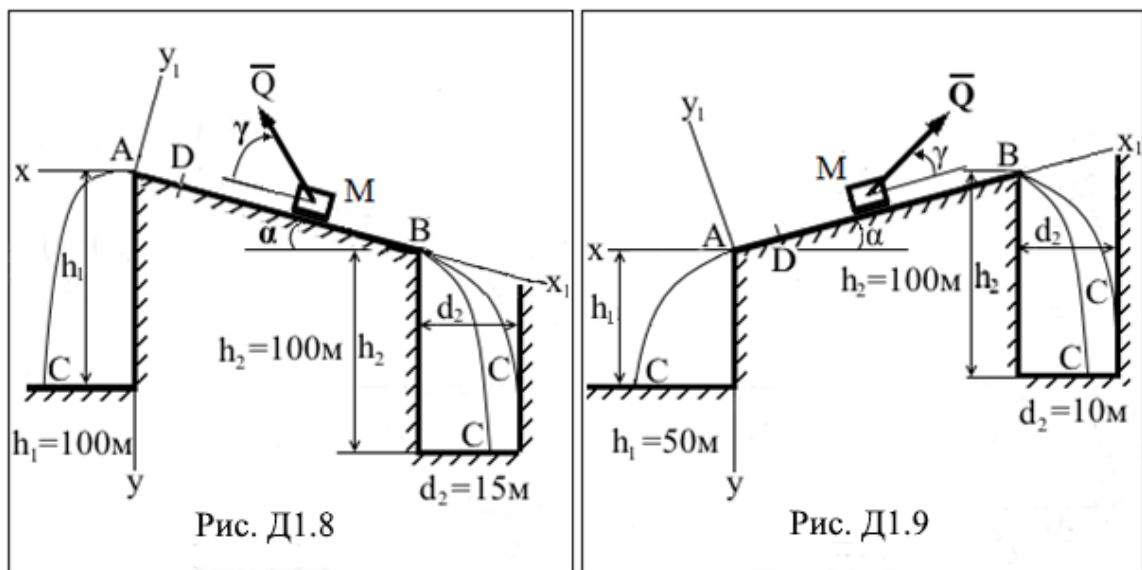


Таблица Д1

Исходные данные

Номер условия	l , м	α , °	γ , °	m , кг	s_0 , м	V_0 , м/с	Q , Н
0	60	30	15	10	10	10	20
1	50	45	30	20	15	15	30
2	70	15	45	30	20	30	10
3	60	45	60	15	30	20	60
4	90	30	75	50	15	15	15
5	80	15	30	20	30	25	20
6	40	30	45	30	10	10	30
7	90	45	15	40	30	12	25
8	60	30	60	25	20	15	15
9	100	15	30	10	30	20	20

Указания. Задача Д1на интегрирование дифференциальных уравнений движения точки (решение одной из основных задач динамики точки).

Решение задачи разбивается на две части. Сначала надо рассмотреть движение груза D на участке AB , составить и проинтегрировать дифференциальное уравнение движения точки на участке AB , учтя начальные условия. При этом необходимо определить в какой точке A или B груз оторвется от прямой AB и определить скорость отрыва. Затем следует рассмотреть криволинейное движение груза в зависимости от точки отрыва на участке BC или AC , для чего составить и проинтегрировать дифференциальные уравнения движения точки в вертикальной плоскости. Полученные уравнения движения и уравнения скоростей используются для определения неизвестных характеристик криволинейного движения груза.

Пример выполнения задания Д1

(в примере рассматривается только выполнение пункта 1 задания)

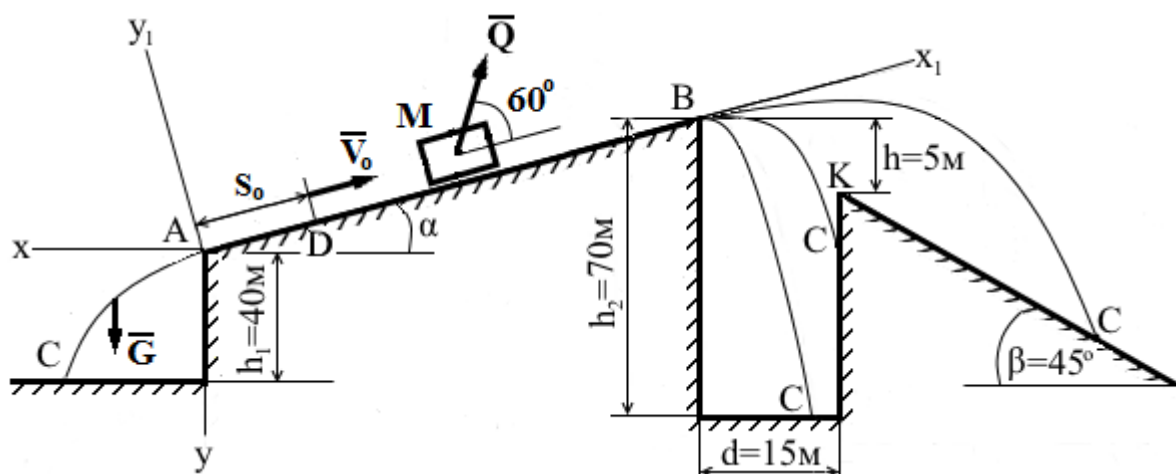


Рис. Д1

Груз M массой $m = 20$ кг начинает движение из точки D с начальной скоростью $V_0 = 20$ м/с. Его движение происходит по наклонной плоскости длины ℓ , составляющей угол $\alpha = 30^\circ$ с горизонтом, вдоль линии AB наибольшего ската. Положение точки D задается величиной $AD = S_0 = 10$ м, вектор V_0 направлен параллельно прямой AB к точке B . При движении по плоскости на груз действует постоянная сила $Q = 100$ Н, направление которой задается углом $\gamma = 60^\circ$, коэффициент трения скольжения между грузом и наклонной плоскостью равен $f = 0,1$. Через τ сек груз покидает плоскость или в точке A , или в точке B и, двигаясь далее в вертикальной плоскости под действием одной только силы тяжести через T секунд после отделения от плоскости попадает в точку C . Возможные варианты траекторий попадания груза в точку C показаны на рисунке.

Считая груз материальной точкой найти:

- точку (A или B) отрыва от плоскости,
- время движения груза по наклонной плоскости,
- скорость груза в момент отрыва,
- координаты точки C приземления груза,
- время T полета груза в воздухе,
- скорость груза в точке падения.

Решить задачу для двух значений начальной скорости:

$$V_0 = 25 \text{ м/с и } V_0 = 20 \text{ м/с.}$$

Решение 1

(начальная скорость $V_0 = 25$ м/с)

1–1. Изучение движения на участке AB .

Рассмотрим движение груза на участке AB , считая груз материальной точкой. Для описания прямолинейного движения груза достаточно одной координатной

оси x_1 , которую направим в сторону направления начальной скорости V_0 (рис. Д1-1).

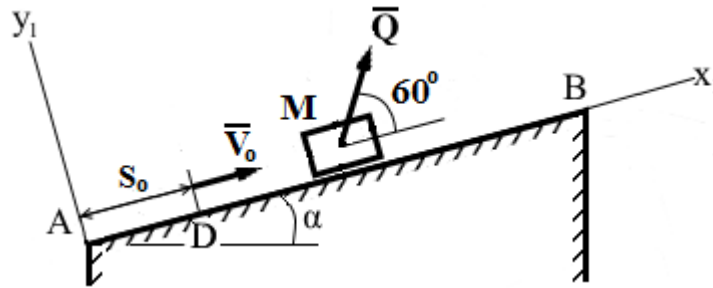


Рис. Д1-1

Изобразим груз в произвольном положении и покажем действующие на него силы: силу тяжести груза G , нормальную реакцию N , заданную силу Q и силу трения скольжения $F_{тр}$ (рис. Д1-2).

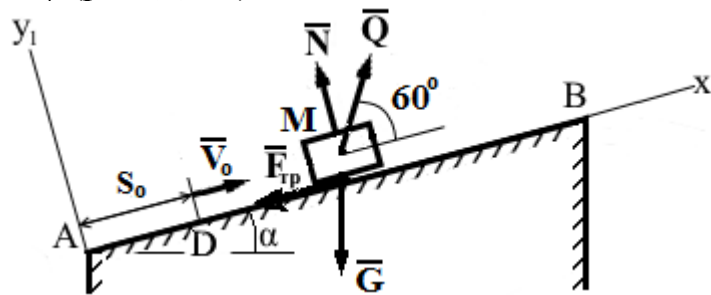


Рис. Д1-2

Составим дифференциальное уравнение движения груза вдоль оси $0x_1$.

$$m\ddot{x}_1 = \sum F_{kx_1} \quad m\ddot{x}_1 = -mg \sin \alpha + Q \cos \gamma - F_{тр}; \quad (1.1)$$

Распишем входящие в уравнение силы: силу тяжести $G = mg$ и силу трения скольжения, которая в общем случае вычисляется по формуле

$$F_{тр} = fN. \quad (1.2)$$

Для определения нормальной реакции N проведем следующие рассуждения. Движение тела происходит вдоль оси $0x_1$, а в направлении перпендикулярном этой оси никакого движения нет. Поэтому, если на рисунке провести ось Ay_1 , то можно записать $m\ddot{y}_1 = \sum F_{ky_1} = 0$, и тогда получим

$$\sum F_{ky_1} = 0 \quad N - mg \cos \alpha + Q \sin \gamma = 0. \quad (1.3)$$

Величину нормальной реакции N найдем из уравнения (1.3)

$$N = mg \cos \alpha - Q \sin \gamma. \quad (1.4)$$

Таким образом, подставляя (1.2) и (1.4) в уравнение (1.1), находим

$$m\ddot{x}_1 = -mg \sin \alpha - f(mg \cos \alpha - Q \sin \gamma) + Q \cos \gamma. \quad (1.5)$$

После сокращения на массу и подстановки числовых значений, получим

$$\ddot{x}_1 = -9,8 \cdot 0,5 - 0,1(9,8 \cdot 0,866 - \frac{100}{20} \cdot 0,866) + \frac{100}{20} \cdot 0,5,$$

или

$$\ddot{x}_1 = -2,816. \quad (1.6)$$

Полученное уравнение представляет собой дифференциальное уравнение второго порядка. Представив левую часть уравнения (1.6) в виде $\ddot{x} = \frac{dV_x}{dt}$, получаем дифференциальное уравнение первого порядка

$$\frac{dV_{x_1}}{dt} = -2,816$$

Для разделения переменных умножаем обе его части уравнения на dt

$$dV_{x_1} = -2,816 \cdot dt.$$

Вычисляем от обеих частей уравнения неопределенные интегралы

$$\int dV_{x_1} = \int (-2,816) dt,$$

получаем первый интеграл от дифференциального уравнения движения тела или выражение скорости, в котором присутствует неизвестная величина C_1 (постоянная интегрирования).

$$V_{x_1} = -2,816t + C_1. \quad (1.7)$$

Для того чтобы проинтегрировать уравнений второй раз представим алгебраическое уравнение скорости в виде дифференциального уравнения первого порядка

$$\frac{dx_1}{dt} = -2,816t + C_1.$$

Так же, как и ранее, умножаем обе части уравнения на dt

$$dx_1 = (-2,816t + C_1) \cdot dt = -2,816t \cdot dt + C_1 \cdot dt$$

и вычисляем от обеих частей уравнения неопределенные интегралы

$$\int dx_1 = \int (-2,816t) \cdot dt + \int C_1 \cdot dt,$$

в результате чего получаем второй интеграл от дифференциального уравнения движения тела или уравнение движения тела, в котором присутствуют две постоянных интегрирования C_1 и C_2 .

$$x_1 = -2,816 \frac{t^2}{2} + C_1 t + C_2. \quad (1.8)$$

Найти постоянные интегрирования можно с помощью начальных условий, в качестве которых в механике используются значения координаты и скорости движущегося объекта в начальный момент времени. Для данной задачи начальные условия имеют вид

$$t = 0, \quad x_1 = x_{10} = 10 \text{ м}, \quad V_{x_1} = V_0 = 25 \text{ м/с}. \quad (1.9)$$

Подставляя их сначала в первый

$$25 = -2,816 \cdot 0 + C_1,$$

а затем во второй интегралы

$$10 = -2,816 \frac{0^2}{2} + C_1 \cdot 0 + C_2,$$

находим

$$C_1 = V_0 = 25, \quad C_2 = x_{10} = 10.$$

Подставляем найденные значения постоянных интегрирования в уравнения (1.7) и (1.8) получаем уравнение скорости и уравнение движения материальной точки в данной задаче

$$V_{x_1} = -2,816t + 25, \quad (1.10)$$

$$x_1 = -1,408t^2 + 25t + 10. \quad (1.11)$$

Для определения точки, в которой груз покидает плоскость, проведем следующие рассуждения. Дифференциальное уравнение движения груза составлено в предположении, что груз покидает плоскость в точке B . В момент достижения грузом этой точки время движения груза принимает значение τ , а координата x_1 становится равной 100 м ($\ell = 100$ м).

Подставляя эти значения в уравнение движения материальной точки (1.11), получаем

$$-1,408\tau^2 + 25\tau + 10 = 100,$$

или

$$1,408\tau^2 - 25\tau + 90 = 0.$$

Находим корни этого квадратного уравнения

$$\tau_{1,2} = \frac{25 \pm \sqrt{25^2 - 4 \cdot 1,408 \cdot 90}}{2 \cdot 1,408} = \frac{25 \pm \sqrt{118,12}}{2,816} = \frac{25 \pm 10,868}{2,816}.$$

Оба корня уравнения являются положительными и действительными

$$\tau_1 = 5,018 \text{ с и } \tau_2 = 12,738 \text{ с}.$$

Первое время $\tau_1 = 5,018$ с соответствует достижению грузом точки B при движении по наклонной плоскости вверх (от A к B). Наличие второго времени $\tau_2 = 12,738$ с объясняется следующим образом. Составленная математическая модель движения груза по наклонной плоскости в виде уравнения (1.11) не учитывает ограниченности длины этой плоскости (она предполагается бесконечной). Согласно этой модели груз движется вверх до его полной остановки, а затем под действием скатывающей силы начинает двигаться вниз, и, спустя $\tau_2 = 12,738$ с после начала движения попадает в точку B двигаясь (по наклонной плоскости бесконечной длины) уже сверху вниз.

Для вычисления величины скорости V_B при отрыве груза от наклонной плоскости выбираем момент времени $\tau_1 = 5,018$ с.

$$V_B = -2,816 \cdot 5,018 + 25 = 10,869 \text{ м/с}.$$

1–2. Изучение движения на участке ВС.

Перейдем к рассмотрению движения груза после отрыва от наклонной плоскости на участке BC . Для описания криволинейного движения на этом участке необходимы две оси координат. Можно использовать приведенную на рисунке Д.1–1 систему координат xAy , но лучше начало системы координат совместить с начальным (для этого участка движения) положением груза – точкой B . Движение происходит под действием только силы тяжести G (рис. Д1–3).

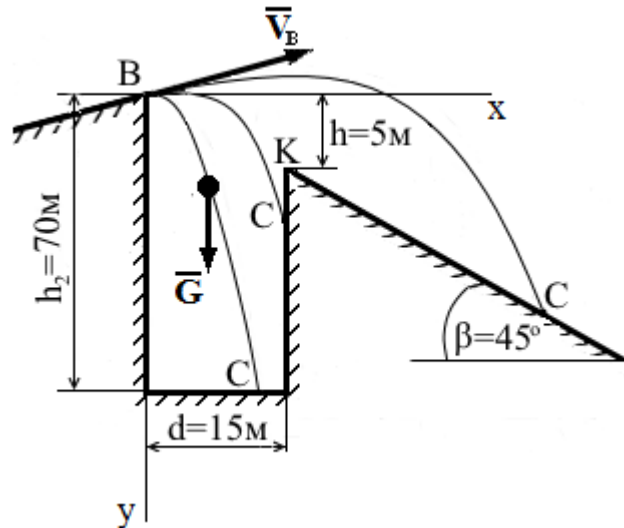


Рис. Д1–3

Составим дифференциальные уравнения движения груза на этом участке:

$$m\ddot{x} = 0;$$

$$m\ddot{y} = mg.$$

Интегрируя дифференциальные уравнения дважды, получаем:

$$V_x = C_3; \quad V_y = gt + C_4;$$

$$x = C_3t + C_5; \quad y = 0,5gt^2 + C_4t + C_6.$$

Запишем начальные условия движения груза в системе координат xBy , время будем отсчитывать от нуля:

$$t = 0; \quad x_B = 0; \quad V_{Bx} = V_B \cos 30^\circ = 9,412;$$

$$y_B = 0; \quad V_{By} = -V_B \sin 30^\circ = -5,435. \quad (1.12)$$

Используя начальные условия (1.12) найдем постоянные интегрирования:

$$C_3 = 9,412; \quad C_4 = -5,435;$$

$$C_5 = 0; \quad C_6 = 0.$$

Таким образом, постоянные интегрирования найдены, и, подставляя их значения в общее решение, получаем законы изменения проекций вектора скорости на оси координат и уравнения движения груза вдоль осей координат после отрыва:

$$V_x = 9,412; \quad (1.13)$$

$$x = 9,412t; \quad (1.14)$$

$$V_y = 9,8t - 5,435; \quad (1.15)$$

$$y = 4,9t^2 - 5,435t. \quad (1.16)$$

Как видно из рисунка Д1–3 существует три варианта полета груза и его соприкосновения с горизонтальной, вертикальной и наклонной плоскостями. Для того, чтобы выбрать один из этих вариантов, определим момент времени T_K , когда координата x примет значение равное ширине рва $d = 15$ м, т. е. $x_{t=T_K} = d$.

Подставляя данное условие в уравнение (1.14),

$$9,412T_K = 15,$$

находим

$$T_K = 1,594 \text{ с.}$$

Выяснить, по какой из трех траекторий происходит движение груза, можно путем вычисления для момента времени T_K координаты y :

- если координата меньше $y_K < 5$ м, то груз пролетает выше точки K и падает на наклонную плоскость,
- если $y_K = 5$ м – груз попадает точно в точку K ,
- если $y_K > 5$ м, то груз находится ниже точки K и возможно его попадание на вертикальную или горизонтальную поверхности рва (или в его угол):
- если $5 \text{ м} < y_K < 70 \text{ м}$ – приземление на вертикальную поверхность рва и найденное время T_K есть время полета груза,
- если $y_K = 70 \text{ м}$ – приземление в углу рва, время T_K также есть время полета груза,
- если $y_K > 70 \text{ м}$ – приземление на горизонтальную поверхность рва, для нахождения времени полета груза T следует решить уравнение (1.16) при $y = h_2 = 70 \text{ м}$).

Подставляя значение времени $T_K = 1,594 \text{ с}$ в уравнение (1.16), получаем

$$y_{t=T_K} = 4,9 \cdot 1,594^2 - 5,435 \cdot 1,594 = 3,782 \text{ м.}$$

Это означает, что груз пролетает над точкой K и приземляется на наклонную плоскость.

Найдем время T прошедшее от момента отделения груза от наклонной плоскости AB до момента его соприкосновения с наклонной поверхностью земли, а также координаты точки приземления x_C и y_C .

Анализ рисунка Д.1–3 показывает, что в момент касания грузом наклонной плоскости в точке C , выполняется условие

$$\frac{y_C - y_K}{x_C - x_K} = \operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} 45^\circ;$$

при этом координаты точки K заданы по условию задания, а координаты точки C находятся путем подстановки времени T в уравнения (1.14) и (1.16)

$$\frac{4,9T^2 - 5,435T - 5}{9,412T - 15} = \operatorname{tg} 45^\circ = 1.$$

В результате, получаем квадратное уравнение

$$4,9T^2 - 14,847T + 10 = 0,$$

корни которого равны

$$T_1 = 1,011 \text{ с}, T_2 = 2,019 \text{ с.}$$

Первый корень $T_1 = 1,011 \text{ с}$ соответствует моменту времени, когда груз летит над рвом и пересекает воображаемое продолжение наклонной плоскости.

Второй корень $T_2 = 2,019 \text{ с}$ соответствует времени приземления на наклонную плоскость. Следовательно, в качестве искомого параметра – время полета груза – принимаем $T = 2,019 \text{ с}$.

Координаты точки приземления C можно вычислить, подставляя время $T = 2,019 \text{ с}$ в уравнения (1.14) и (1.16):

$$x_C = 9,412 T = 19,003 \text{ м};$$

$$y_C = 4,9T^2 - 5,435 T = 9,000 \text{ м}.$$

Найдем скорость груза в момент приземления V_C через проекции на оси координат (1.13) и (1.15):

$$V_{Cx} = 9,412 \text{ м/с}, \quad V_y = 9,8 \cdot 2,019 - 5,435 = 14,351 \text{ м/с}.$$

Тогда модуль скорости определится выражением

$$V_C = \sqrt{V_{Cx}^2 + V_{Cy}^2} = 17,162 \text{ м/с}.$$

Ответ: при начальной скорости груза $V_0 = 25 \text{ м/с}$ получены следующие результаты:

- время движения по наклонной плоскости AB $\tau = 5,018 \text{ с};$
- точка отрыва от наклонной плоскости AB – точка $B;$
- скорость в момент отрыва в точке B $V_B = 10,869 \text{ м/с};$
- время полета $T = 2,019 \text{ с};$
- координаты точки приземления $x_C = 19,006 \text{ м}; y_C = 9,000 \text{ м};$
- скорость касания с поверхностью земли $V_C = 17,162 \text{ м/с}.$

Решение 2

(начальная скорость $V_0 = 20 \text{ м/с}$)

Рассмотрение движения груза на участке AB полностью повторяет рассмотренный выше случай для начальной скорости $V_0 = 25 \text{ м/с}$ (страницы 5-7 до записи начальных условий в формуле 1.9) для определения постоянных интегрирования при решении дифференциального уравнения движения груза.

Ниже эта часть решения полностью повторяется (выделено шрифтом серого цвета), она воспроизводится с целью создания целостной картины порядка выполняемых действий по решению отдельной самостоятельной задачи.

2–1. Изучение движения на участке AB .

Рассмотрим движение груза на участке AB , считая груз материальной точкой. Для описания прямолинейного движения груза достаточно одной координатной оси x_1 , которую направим в сторону направления начальной скорости V_0 (рис. Д1–4).

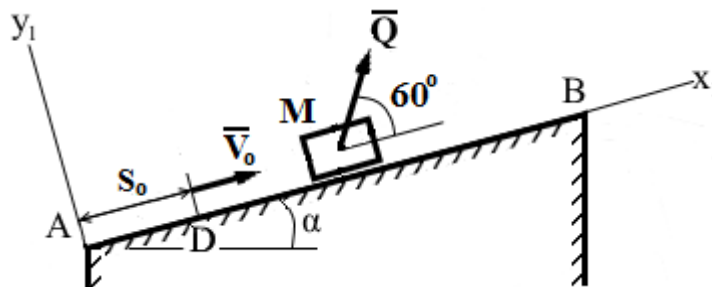


Рис. Д1–4

Изображаем груз в произвольном положении и показываем действующие на него силы: силу тяжести груза G , нормальную реакцию N , заданную силу Q и силу трения скольжения F_{mp} (рис. Д1–5).

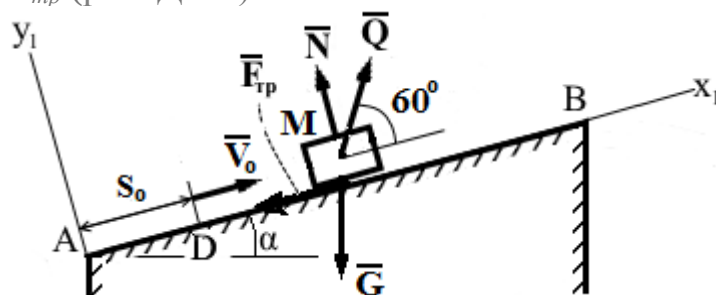


Рис. Д1–5

Составим дифференциальное уравнение движения груза вдоль оси $0x_1$.

$$m\ddot{x}_1 = \sum F_{kx_1}; m\ddot{x}_1 = -mg \sin \alpha + Q \cos \gamma - F_{mp}; \quad (1.1)$$

Распишем входящие в уравнение силы: силу тяжести $G = mg$ и силу трения, которая в общем случае вычисляется по формуле

$$F_{mp} = f \cdot N. \quad (1.2)$$

Для определения нормальной реакции N проведем следующие рассуждения. Движение тела происходит вдоль оси $0x_1$, а в направлении перпендикулярном этой оси никакого движения нет. Поэтому, если на рисунке провести ось Ay_1 , то можно записать $m\ddot{y}_1 = \sum F_{ky_1} = 0$, и тогда получим

$$\sum F_{ky_1} = 0 \quad N - mg \cos \alpha + Q \sin \gamma = 0. \quad (1.3)$$

Величину нормальной реакции N найдем из уравнения (1.3)

$$N = mg \cos \alpha - Q \sin \gamma. \quad (1.4)$$

Таким образом, подставляя (1.2) и (1.4) в уравнение (1.1), находим

$$m\ddot{x}_1 = -mg \sin \alpha - f(mg \cos \alpha - Q \sin \gamma) + Q \cos \gamma. \quad (1.5)$$

После сокращения на массу и подстановки числовых значений, получим

$$\ddot{x}_1 = -9,8 \cdot 0,5 - 0,1(9,8 \cdot 0,866 - \frac{100}{20} \cdot 0,866) + \frac{100}{20} \cdot 0,5,$$

или

$$\ddot{x}_1 = -2,816. \quad (1.6)$$

Полученное уравнение представляет собой дифференциальное уравнение второго порядка. Представив левую часть уравнения в виде $\ddot{x} = \frac{dV_x}{dt}$, получаем дифференциальное уравнение первого порядка

$$\frac{dV_{x_1}}{dt} = -2,816$$

Для разделения переменных умножаем обе его части уравнения на dt

$$dV_{x_1} = -2,816 \cdot dt.$$

Вычисляем от обеих частей уравнения неопределенные интегралы

$$\int dV_{x_1} = \int -2,816 dt,$$

получаем первый интеграл от дифференциального уравнения движения тела или выражение скорости, в котором присутствует неизвестная величина C_1 (постоянная интегрирования).

$$V_{x_1} = -2,816t + C_1. \quad (1.7)$$

Для того чтобы проинтегрировать уравнений второй раз представим алгебраическое уравнение скорости в виде дифференциального уравнения первого порядка

$$\frac{dx_1}{dt} = -2,816t + C_1.$$

Так же, как и ранее, умножаем обе части уравнения на dt

$$dx_1 = (-2,816t + C_1) \cdot dt = -2,816t \cdot dt + C_1 \cdot dt$$

и вычисляем от обеих частей уравнения неопределенные интегралы

$$\int dx_1 = \int -2,816t \cdot dt + \int C_1 \cdot dt,$$

в результате чего получаем второй интеграл от дифференциального уравнения движения тела или уравнение движения тела, в котором присутствуют две постоянных интегрирования C_1 и C_2 .

$$x_1 = -2,816 \frac{t^2}{2} + C_1 t + C_2. \quad (1.8)$$

Найти постоянные интегрирования можно с помощью начальных условий, в качестве которых в механике используются значения координаты и скорости движущегося объекта в начальный момент времени.

Для данной задачи начальные условия имеют вид

$$t = 0, \quad x_1 = x_{10} = 10 \text{ м}, \quad V_{x_1} = V_0 = 20 \text{ м/с}.$$

Подставляя их сначала в первый

$$20 = -2,816 \cdot 0 + C_1,$$

а затем во второй интегралы

$$10 = -2,816 \frac{0^2}{2} + C_1 \cdot 0 + C_2,$$

находим

$$C_1 = V_0 = 20, \quad C_2 = x_{10} = 10.$$

Подставляем найденные значения постоянных интегрирования в уравнения (1.7) и (1.8) получаем уравнение скорости и уравнение движения материальной точки в данной задаче

$$V_{x_1} = -2,816t + 20, \quad (1.17)$$

$$x_1 = -1,408t^2 + 20t + 10. \quad (1.18)$$

Для определения точки, в которой груз покидает плоскость, проведем следующие рассуждения. Дифференциальное уравнение движения груза составлено в предположении, что груз покидает плоскость в точке B . В момент

достижения грузом этой точки время движения груза равно τ , а координата x_1 равна $\ell = 100$ м.

Подставляя эти значения в уравнение движения материальной точки (1.18), получаем

$$-1,408\tau^2 + 20\tau + 10 = 100,$$

или

$$1,408\tau^2 - 20\tau + 90 = 0.$$

Находим корни этого квадратного уравнения

$$\tau_{1,2} = \frac{20 \pm \sqrt{20^2 - 4 \cdot 1,408 \cdot 90}}{2 \cdot 1,408} = \frac{20 \pm \sqrt{400 - 506,88}}{2,816} = \frac{20 \pm \sqrt{-106,88}}{2,816}$$

Так как дискриминант является отрицательным, то квадратное уравнение не имеет действительных корней. Это означает, что груз не достигает точки B , а двигаясь из точки D по наклонной плоскости вверх, в некоторый момент времени останавливается (точку остановки обозначим буквой E), а затем скользит вниз и покидает наклонную плоскость в точке A .

Определим момент времени τ_1 , в который происходит остановка груза, для чего используем условие равенства нулю скорости груза в момент его остановки

$$V_E = -2,816\tau_1 + 20 = 0,$$

откуда находим

$$\tau_1 = 7,102 \text{ с.}$$

Вычислим координату точки остановки E

$$x_{1E} = -1,408\tau_1^2 + 20\tau_1 + 10 = -1,408 \cdot 7,102^2 + 20 \cdot 7,102 + 10 = 81,023 \text{ м.}$$

Таким образом, в момент остановки при $t = \tau_1 = 7,102$ с координата и скорость груза равны

$$x_{1E} = 81,023 \text{ м, } V_E = 0.$$

Эти условия являются начальными для движения груза по наклонной плоскости вниз.

В подтверждение того, что в момент времени τ_1 начинается движение вниз, приведем следующие соображения. Хотя скорость груза в этот момент времени равна нулю, это вовсе не означает, что и ускорение равно нулю, ведь для того, чтобы в следующий момент времени появилась скорость, в данный момент должно быть направленное вниз ускорение. А наличие такого ускорения обуславливается действием направленной вниз вдоль наклонной плоскости результирующей силы, что подтверждается следующими расчетами.

Величина нормальной реакции

$$N = mg \cos \alpha - Q \sin \gamma = 20 \cdot 9,8 \cdot 0,866 - 100 \cdot 0,866 = 83,136 \text{ Н.}$$

Максимальное значение силы трения

$$F_{mp} = f \cdot N = 0,1 \cdot 83,136 = 8,3136 \text{ Н.}$$

Скатывающая сила

$$F_{ск} = mg \sin \alpha - Q \cos \gamma = 20 \cdot 9,8 \cdot 0,5 - 100 \cdot 0,5 = 98 - 50 = 48 \text{ Н.}$$

Сравнение величин скатывающей силы и препятствующей движению вниз силы трения скольжения, показывает, что результирующая сила действительно направлена вниз.

Для изучения движения груза от точки E до точки A покажем действующие на этом участке силы (рис. Д1–6).

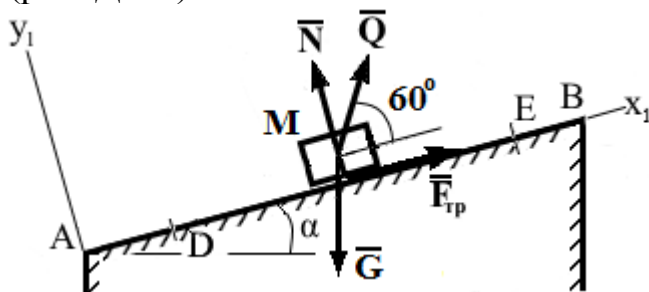


Рис. Д1–6

Дифференциальное уравнение груза на участке EA имеет вид:

$$m\ddot{x}_1 = -mg \sin \alpha + Q \cos \gamma + F_{тр},$$

или

$$m\ddot{x}_1 = -mg \sin \alpha + Q \cos \gamma + f(mg \cos \alpha - Q \sin \gamma). \quad (1.19)$$

Здесь учтено, что поскольку груз движется вниз, то сила трения скольжения направлена вдоль наклонной плоскости вверх. Данное уравнение отличается от уравнения (1.1) знаком проекции силы трения скольжения $\bar{F}_{тр}$. После сокращения на массу и подстановки числовых значений, получим

$$\ddot{x}_1 = -9,8 \cdot 0,5 + 0,1(9,8 \cdot 0,866 - \frac{100}{20} \cdot 0,866) + \frac{100}{20} \cdot 0,5,$$

или

$$\ddot{x}_1 = -1,984$$

Интегрируя дважды, получаем

$$V_{x_1} = -1,984t + C_1; \quad (1.20)$$

$$x_1 = -0,992t^2 + C_1t + C_2. \quad (1.21)$$

Для определения постоянных интегрирования воспользуемся начальными условиями, т. е. значениями кинематических характеристик, при которых груз начал свое движение из точки E вниз (отсчет времени начинаем заново).

$$t = 0 \quad x_{1E} = 81,023 \text{ м}, \quad V_E = 0.$$

Подставляя начальные условия в уравнения (1.19) и (1.20), находим:

$$C_1 = 0, \quad C_2 = 81,023.$$

Уравнение скорости и закон движения груза на участке EA с учетом найденных значений C_1 и C_2 принимают вид

$$V_{x_1} = -1,984t, \quad (1.22)$$

$$x_1 = -0,992t^2 + 81,023. \quad (1.23)$$

Найдем время движения груза τ_2 по наклонной плоскости вниз. Когда груз достигает точки A , то

$$x_{1A} = 0.$$

Получаем уравнение

$$-0,992\tau_2^2 + 81,023 = 0,$$

откуда

$$\tau_2 = 9,038 \text{ с.}$$

Из уравнения (1.23) найдем величину скорости груза в точке A при его отрыве от наклонной плоскости

$$V_{Ax_1} = -1,984\tau_2 = -17,931 \text{ м/с.}$$

Направление вектора скорости V_A показано на рисунке Д1–7.

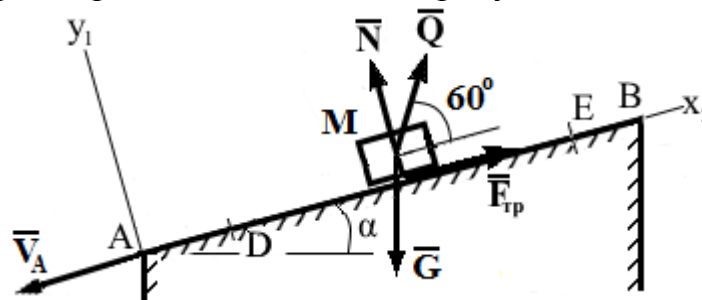


Рис. Д1–7

Время движения груза по наклонной плоскости найдем как сумму времени τ_1 движения от точки D до точки остановки E и времени τ_2 движения груза после остановки от точки E вниз до отрыва в точке A

$$\tau = \tau_1 + \tau_2 = 7,102 + 9,038 = 16,140 \text{ с.}$$

2–1. Изучение движения на участке AC .

Рассмотрим движение груза после отрыва его от наклонной плоскости (участок AC). Движение происходит под действием только силы тяжести G , используем систему координат xAy (рис. Д1–8).

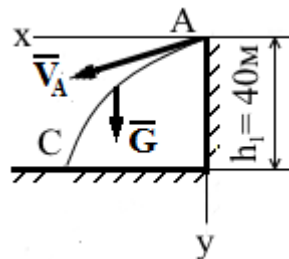


Рис. Д1–8

Составим дифференциальные уравнения движения груза на этом участке:

$$m\ddot{x} = 0;$$

$$m\ddot{y} = mg.$$

Интегрируя дифференциальные уравнения дважды, получаем:

$$V_x = C_3; \quad V_y = gt + C_4;$$

$$x = C_3 t + C_5; \quad y = 0,5gt^2 + C_4 t + C_6;$$

Запишем начальные условия движения груза в системе координат xAy , время будем опять отсчитывать от нуля:

$$t = 0; \quad x_A = 0; \quad V_{Ax} = V_A \cos 30^\circ = 15,528;$$

$$y_A = 0; \quad V_{Ay} = V_A \sin 30^\circ = 8,966.$$

Используя начальные условия, найдем постоянные интегрирования:

$$C_3 = 15,528; \quad C_4 = 8,966;$$

$$C_5 = 0; \quad C_6 = 0.$$

Таким образом, постоянные интегрирования найдены, и подставляя их значения в общее решение, получаем законы изменения проекций вектора скорости на оси координат и уравнения движения груза вдоль осей координат после отрыва:

$$V_x = 15,528; \quad (1.24)$$

$$x = 15,528t; \quad (1.25)$$

$$V_y = 9,8t + 8,966; \quad (1.26)$$

$$y = 4,9t^2 + 8,966t. \quad (1.27)$$

Найдем время T , спустя которое после отделения от наклонной плоскости груз упадет на горизонтальную плоскость, и координаты точки падения x_C и y_C .

В момент приземления груза в точку C на наклонной плоскости координата $y = y_C = h_1$. Подставляя это значение в уравнение (1.27), получим квадратное относительно T уравнение

$$4,9T^2 + 8,966T - 40 = 0.$$

Корни этого квадратного уравнения имеют значения

$$T_1 = 2,085 \text{ с}, \quad T_2 = -3,915 \text{ с}.$$

Время не может быть отрицательным, следовательно

$$T = 2,085 \text{ с}.$$

Координаты точки приземления C могут быть вычислены подстановкой в уравнения (1.25) и (1.27) найденного времени T :

$$x_C = 15,528 \cdot 2,085 = 32,376 \text{ м};$$

$$y_C = 4,9 \cdot (2,085)^2 + 8,966 \cdot 2,085 = 40 \text{ м}.$$

Подстановкой в уравнения (1.24) и (1.26) времени T определим проекции скорости груза в момент его падения на горизонтальную поверхность:

$$V_x = 15,528 \text{ м/с};$$

$$V_y = 9,8 \cdot 2,085 + 8,966 = 29,400 \text{ м/с},$$

что позволяет вычислить модуль скорости груза в точке C

$$V_C = \sqrt{V_{Cx}^2 + V_{Cy}^2} = 33,248 \text{ м/с}.$$

Ответ:

- точкой отрыва груза от плоскости является
- время движения груза до точки отрыва
- величина скорости груза в момент отрыва

точка A ,
 $\tau = 16,140 \text{ с}$,
 $V_{Ax_1} = 17,931 \text{ м/с}$,

- координаты точки C приземления груза
- время полета груза в воздухе
- скорость груза в точке падения

$$x_C = 32,376 \text{ м}; y_C = 40 \text{ м},$$

$$T = 2,085 \text{ с},$$

$$V_C = 33,248 \text{ м/с}.$$

Библиографический список

1. Бутенин Н.В. Курс теоретической механики : в 2 т: учеб. пособие / Н.В. Бутенин, Я.А. Лунц, Д.Р. Меркин. – 11-е изд., стер. – СПб. : Лань, 2009. – Т. 2. Динамика. – 544 с.
2. Бутенин Н.В. Курс теоретической механики : в 2 т : учеб. пособие / Н.В. Бутенин, Я.Л. Лунц, Д.Р. Меркин. – 2008. – Т. 1. Статика и кинематика. – 240 с.
3. Королев Ю.В. Теоретическая механика : учеб. пособие / Ю.В. Королев. – Иркутск : Изд-во ИрГТУ, 2006. – 207 с.
4. Мещерский И.В. Задачи по теоретической механике : учеб. пособие / И.В. Мещерский ; под ред. В.А. Пальмова, Д.Р. Меркина. – 51-е изд., стер. – СПб. : Лань, 2012. – 447 с.
5. Никитин Н.Н. Курс теоретической механики : учебник / Н.Н. Никитин. – 8-е изд., стер. – СПб. : Лань, 2011. – 720 с.
6. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике : учеб. пособие / А.А. Яблонский [и др.]. – 17-е изд., стер. – М. : КНОРУС, 2010. – 378 с.
7. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики : учебник / С.М. Тарг. – 19-е изд., стер. – М. : Высш. шк., 2009. – 416 с.
8. Теоретическая механика : метод. указания и контр. задания для студентов-заочников / под ред. С.М. Тарга. – 4-е изд. – М. : Высш. шк., 1988. – 64 с.
9. Бать М.И. Теоретическая механика в примерах и задачах : учеб. пособие / М.И. Бать, Г.Ю. Джанелидзе, А.С. Кельзон. – 2013. – Т. 1. Статика и кинематика. – 672 с.
10. Бать М.И. Теоретическая механика в примерах и задачах: учеб. пособие / М.И. Бать, Г.Ю. Джанелидзе, А.С. Кельзон. – 2013. – Т. 2 Динамика. – 663 с.
11. Королёв Ю.В. Теоретическая механика. Учимся решать задачи. : учеб. пособие в 5 ч. / Ю.В. Королёв. – Иркутск : Изд-во ИРНИТУ, 2015. – Ч. 1. Статика. – 108 с.
12. Королёв Ю.В. Теоретическая механика. Учимся решать задачи. : учеб. пособие в 5 ч. / Ю.В. Королёв. – Иркутск : Изд-во ИРНИТУ, 2015. – Ч. 2. Кинематика. – 107 с.
13. Королёв Ю.В. Теоретическая механика. Учимся решать задачи. : учеб. пособие в 5 ч. / Ю.В. Королёв. – Иркутск : Изд-во ИРНИТУ, 2016. – Ч. 3. Динамика материальной точки. – 136 с.

14. Королёв Ю.В. Теоретическая механика. Учимся решать задачи. : учеб.пособие в 5 ч. / Ю.В. Королёв. – Иркутск : Изд-во ИРНИТУ, 2017. – Ч. 4. Динамика механической системы. Общие теоремы динамики. – 166 с.

15. Королёв Ю.В. Теоретическая механика. Учимся решать задачи. : учеб.пособие в 5 ч. / Ю.В. Королёв. – Иркутск : Изд-во ИРНИТУ, 2018. – Ч. 5. Элементы аналитической механики. – 164 с.

16. Яблонский А.А. Курс теоретической механики. Статика. Кинематика. Динамика : учебник / А.А. Яблонский, В.М. Никифорова. – 15-е изд., стер. – М. : КНОРУС, 2010. – 603 с.

Приложение А

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

ИРКУТСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Заочно-вечерний институт

Кафедра механики и сопротивления материалов

Допускаю к защите

Подпись

И.О. Фамилия

Контрольная работа
по дисциплине

Теоретическая механика

Вариант № _____

Выполнил студент

шифр группы

подпись

И.О. Фамилия

Работа защищена, преподаватель

подпись

И.О. Фамилия

Иркутск 20__ г.