

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
КУБАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
КАФЕДРА ПРОИЗВОДСТВА СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ
И СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ



СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

ОСНОВЫ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Задания к контрольным работам
для студентов заочной формы обучения
всех строительных специальностей

Краснодар
2019

Таблица выбора варианта для решения ргр в соответствии с шифром зачетной книжки:

Шифр зач. кн.	Вариант работы	Шифр зач. кн.	Вариант работы	Шифр зач. кн.	Вариант работы	Шифр зач. кн.	Вариант работы	Шифр зач. кн.	Вариант работы
000	0101	050	0221	100	0411	150	0601	200	0721
001	0102	051	0222	101	0412	151	0602	201	0722
002	0103	052	0223	102	0413	152	0603	202	0723
003	0104	053	0224	103	0414	153	0604	203	0724
004	0105	054	0225	104	0415	154	0605	204	0725
005	0106	055	0226	105	0416	155	0606	205	0726
006	0107	056	0227	106	0417	156	0607	206	0727
007	0108	057	0228	107	0418	157	0608	207	0728
008	0109	058	0229	108	0419	158	0609	208	0729
009	0110	059	0230	109	0420	159	0610	209	0730
010	0111	060	0301	110	0421	160	0611	210	0801
011	0112	061	0302	111	0422	161	0612	211	0802
012	0113	062	0303	112	0423	162	0613	212	0803
013	0114	063	0304	113	0424	163	0614	213	0804
014	0115	064	0305	114	0425	164	0615	214	0805
015	0116	065	0306	115	0426	165	0616	215	0806
016	0117	066	0307	116	0427	166	0617	216	0807
017	0118	067	0308	117	0428	167	0618	217	0808
018	0119	068	0309	118	0429	168	0619	218	0809
019	0120	069	0310	119	0430	169	0620	219	0810
020	0121	070	0311	120	0501	170	0621	220	0811
021	0122	071	0312	121	0502	171	0622	221	0812
022	0123	072	0313	122	0503	172	0623	222	0813
023	0124	073	0314	123	0504	173	0624	223	0814
024	0125	074	0315	124	0505	174	0625	224	0815
025	0126	075	0316	125	0506	175	0626	225	0816
026	0127	076	0317	126	0507	176	0627	226	0817
027	0128	077	0318	127	0508	177	0628	227	0818
028	0129	078	0319	128	0509	178	0629	228	0819
029	0130	079	0320	129	0510	179	0630	229	0820
030	0201	080	0321	130	0511	180	0701	230	0821
031	0202	081	0322	131	0512	181	0702	231	0822
032	0203	082	0323	132	0513	182	0703	232	0823
033	0204	083	0324	133	0514	183	0704	233	0824
034	0205	084	0325	134	0515	184	0705	234	0825
035	0206	085	0326	135	0516	185	0706	235	0826
036	0207	086	0327	136	0517	186	0707	236	0827
037	0208	087	0328	137	0518	187	0708	237	0828
038	0209	088	0329	138	0519	188	0709	238	0829
039	0210	089	0330	139	0520	189	0710	239	0830
040	0211	090	0401	140	0521	190	0711	240	0901
041	0212	091	0402	141	0522	191	0712	241	0902
042	0213	092	0403	142	0523	192	0713	242	0903
043	0214	093	0404	143	0524	193	0714	243	0904
044	0215	094	0405	144	0525	194	0715	244	0905
045	0216	095	0406	145	0526	195	0716	245	0906
046	0217	096	0407	146	0527	196	0717	246	0907
047	0218	097	0408	147	0528	197	0718	247	0908
048	0219	098	0409	148	0529	198	0719	248	0909
049	0220	099	0410	149	0530	199	0720	249	0910

Продолжение таблицы выбора варианта:

Шифр зач. кн.	Вариант работы	Шифр зач. кн.	Вариант работы	Шифр зач. кн.	Вариант работы	Шифр зач. кн.	Вариант работы	Шифр зач. кн.	Вариант работы
250	0911	300	1101	350	1221	400	0211	450	0401
251	0912	301	1102	351	1222	401	0212	451	0402
252	0913	302	1103	352	1223	402	0213	452	0403
253	0914	303	1104	353	1224	403	0214	453	0404
254	0915	304	1105	354	1225	404	0215	454	0405
255	0916	305	1106	355	1226	405	0216	455	0406
256	0917	306	1107	356	1227	406	0217	456	0407
257	0918	307	1108	357	1228	407	0218	457	0408
258	0919	308	1109	358	1229	408	0219	458	0409
259	0920	309	1110	359	1230	409	0220	459	0410
260	0921	310	1111	360	0101	410	0221	460	0411
261	0922	311	1112	361	0102	411	0222	461	0412
262	0923	312	1113	362	0103	412	0223	462	0413
263	0924	313	1114	363	0104	413	0224	463	0414
264	0925	314	1115	364	0105	414	0225	464	0415
265	0926	315	1116	365	0106	415	0226	465	0416
266	0927	316	1117	366	0107	416	0227	466	0417
267	0928	317	1118	367	0108	417	0228	467	0418
268	0929	318	1119	368	0109	418	0229	468	0419
269	0930	319	1120	369	0110	419	0230	469	0420
270	1001	320	1121	370	0111	420	0301	470	0421
271	1002	321	1122	371	0112	421	0302	471	0422
272	1003	322	1123	372	0113	422	0303	472	0423
273	1004	323	1124	373	0114	423	0304	473	0424
274	1005	324	1125	374	0115	424	0305	474	0425
275	1006	325	1126	375	0116	425	0306	475	0426
276	1007	326	1127	376	0117	426	0307	476	0427
277	1008	327	1128	377	0118	427	0308	477	0428
278	1009	328	1129	378	0119	428	0309	478	0429
279	1010	329	1130	379	0120	429	0310	479	0430
280	1011	330	1201	380	0121	430	0311	480	0501
281	1012	331	1202	381	0122	431	0312	481	0502
282	1013	332	1203	382	0123	432	0313	482	0503
283	1014	333	1204	383	0124	433	0314	483	0504
284	1015	334	1205	384	0125	434	0315	484	0505
285	1016	335	1206	385	0126	435	0316	485	0506
286	1017	336	1207	386	0127	436	0317	486	0507
287	1018	337	1208	387	0128	437	0318	487	0508
288	1019	338	1209	388	0129	438	0319	488	0509
289	1020	339	1210	389	0130	439	0320	489	0510
290	1021	340	1211	390	0201	440	0321	490	0511
291	1022	341	1212	391	0202	441	0322	491	0512
292	1023	342	1213	392	0203	442	0323	492	0513
293	1024	343	1214	393	0204	443	0324	493	0514
294	1025	344	1215	394	0205	444	0325	494	0515
295	1026	345	1216	395	0206	445	0326	495	0516
296	1027	346	1217	396	0207	446	0327	496	0517
297	1028	347	1218	397	0208	447	0328	497	0518
298	1029	348	1219	398	0209	448	0329	498	0519
299	1030	349	1220	399	0210	449	0330	499	0520

Продолжение таблицы выбора варианта:

Шифр зач. кн.	Вариант работы	Шифр зач. кн.	Вариант работы	Шифр зач. кн.	Вариант работы	Шифр зач. кн.	Вариант работы	Шифр зач. кн.	Вариант работы
500	0521	550	0711	600	0901	650	1021	700	1211
501	0522	551	0712	601	0902	651	1022	701	1212
502	0523	552	0713	602	0903	652	1023	702	1213
503	0524	553	0714	603	0904	653	1024	703	1214
504	0525	554	0715	604	0905	654	1025	704	1215
505	0526	555	0716	605	0906	655	1026	705	1216
506	0527	556	0717	606	0907	656	1027	706	1217
507	0528	557	0718	607	0908	657	1028	707	1218
508	0529	558	0719	608	0909	658	1029	708	1219
509	0530	559	0720	609	0910	659	1030	709	1220
510	0601	560	0721	610	0911	660	1101	710	1221
511	0602	561	0722	611	0912	661	1102	711	1222
512	0603	562	0723	612	0913	662	1103	712	1223
513	0604	563	0724	613	0914	663	1104	713	1224
514	0605	564	0725	614	0915	664	1105	714	1225
515	0606	565	0726	615	0916	665	1106	715	1226
516	0607	566	0727	616	0917	666	1107	716	1227
517	0608	567	0728	617	0918	667	1108	717	1228
518	0609	568	0729	618	0919	668	1109	718	1229
519	0610	569	0730	619	0920	669	1110	719	1230
520	0611	570	0801	620	0921	670	1111	720	0101
521	0612	571	0802	621	0922	671	1112	721	0102
522	0613	572	0803	622	0923	672	1113	722	0103
523	0614	573	0804	623	0924	673	1114	723	0104
524	0615	574	0805	624	0925	674	1115	724	0105
525	0616	575	0806	625	0926	675	1116	725	0106
526	0617	576	0807	626	0927	676	1117	726	0107
527	0618	577	0808	627	0928	677	1118	727	0108
528	0619	578	0809	628	0929	678	1119	728	0109
529	0620	579	0810	629	0930	679	1120	729	0110
530	0621	580	0811	630	1001	680	1121	730	0111
531	0622	581	0812	631	1002	681	1122	731	0112
532	0623	582	0813	632	1003	682	1123	732	0113
533	0624	583	0814	633	1004	683	1124	733	0114
534	0625	584	0815	634	1005	684	1125	734	0115
535	0626	585	0816	635	1006	685	1126	735	0116
536	0627	586	0817	636	1007	686	1127	736	0117
537	0628	587	0818	637	1008	687	1128	737	0118
538	0629	588	0819	638	1009	688	1129	738	0119
539	0630	589	0820	639	1010	689	1130	739	0120
540	0701	590	0821	640	1011	690	1201	740	0121
541	0702	591	0822	641	1012	691	1202	741	0122
542	0703	592	0823	642	1013	692	1203	742	0123
543	0704	593	0824	643	1014	693	1204	743	0124
544	0705	594	0825	644	1015	694	1205	744	0125
545	0706	595	0826	645	1016	695	1206	745	0126
546	0707	596	0827	646	1017	696	1207	746	0127
547	0708	597	0828	647	1018	697	1208	747	0128
548	0709	598	0829	648	1019	698	1209	748	0129
549	0710	599	0830	649	1020	699	1210	749	0130

Продолжение таблицы выбора варианта:

Шифр зач. кн.	Вариант работы	Шифр зач. кн.	Вариант работы	Шифр зач. кн.	Вариант работы	Шифр зач. кн.	Вариант работы	Шифр зач. кн.	Вариант работы
750	0201	800	0321	850	0511	900	0701	950	0821
751	0202	801	0322	851	0512	901	0702	951	0822
752	0203	802	0323	852	0513	902	0703	952	0823
753	0204	803	0324	853	0514	903	0704	953	0824
754	0205	804	0325	854	0515	904	0705	954	0825
755	0206	805	0326	855	0516	905	0706	955	0826
756	0207	806	0327	856	0517	906	0707	956	0827
757	0208	807	0328	857	0518	907	0708	957	0828
758	0209	808	0329	858	0519	908	0709	958	0829
759	0210	809	0330	859	0520	909	0710	959	0830
760	0211	810	0401	860	0521	910	0711	960	0901
761	0212	811	0402	861	0522	911	0712	961	0902
762	0213	812	0403	862	0523	912	0713	962	0903
763	0214	813	0404	863	0524	913	0714	963	0904
764	0215	814	0405	864	0525	914	0715	964	0905
765	0216	815	0406	865	0526	915	0716	965	0906
766	0217	816	0407	866	0527	916	0717	966	0907
767	0218	817	0408	867	0528	917	0718	967	0908
768	0219	818	0409	868	0529	918	0719	968	0909
769	0220	819	0410	869	0530	919	0720	969	0910
770	0221	820	0411	870	0601	920	0721	970	0911
771	0222	821	0412	871	0602	921	0722	971	0912
772	0223	822	0413	872	0603	922	0723	972	0913
773	0224	823	0414	873	0604	923	0724	973	0914
774	0225	824	0415	874	0605	924	0725	974	0915
775	0226	825	0416	875	0606	925	0726	975	0916
776	0227	826	0417	876	0607	926	0727	976	0917
777	0228	827	0418	877	0608	927	0728	977	0918
778	0229	828	0419	878	0609	928	0729	978	0919
779	0230	829	0420	879	0610	929	0730	979	0920
780	0301	830	0421	880	0611	930	0801	980	0921
781	0302	831	0422	881	0612	931	0802	981	0922
782	0303	832	0423	882	0613	932	0803	982	0923
783	0304	833	0424	883	0614	933	0804	983	0924
784	0305	834	0425	884	0615	934	0805	984	0925
785	0306	835	0426	885	0616	935	0806	985	0926
786	0307	836	0427	886	0617	936	0807	986	0927
787	0308	837	0428	887	0618	937	0808	987	0928
788	0309	838	0429	888	0619	938	0809	988	0929
789	0310	839	0430	889	0620	939	0810	989	0930
790	0311	840	0501	890	0621	940	0811	990	1001
791	0312	841	0502	891	0622	941	0812	991	1002
792	0313	842	0503	892	0623	942	0813	992	1003
793	0314	843	0504	893	0624	943	0814	993	1004
794	0315	844	0505	894	0625	944	0815	994	1005
795	0316	845	0506	895	0626	945	0816	995	1006
796	0317	846	0507	896	0627	946	0817	996	1007
797	0318	847	0508	897	0628	947	0818	997	1008
798	0319	848	0509	898	0629	948	0819	998	1009
799	0320	849	0510	899	0630	949	0820	999	1010

ЗАДАЧА №1

«ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ В ТОЧКЕ ТЕЛА»

Напряженное состояние в точке тела задано девятью компонентами:

$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy} = \tau_{yx}, \tau_{yz} = \tau_{zy}, \tau_{zx} = \tau_{xz}$ (рис. 1). Требуется:

- 1) определить главные напряжения и проверить правильность их нахождения;
- 2) определить положение одной из главных площадок (вычислить направляющие косинусы нормали к этой площадке);
- 3) определить положения двух других главных площадок (вычислить направляющие косинусы нормалей к этим площадкам);
- 4) показать на рисунке нормали к главным площадкам.

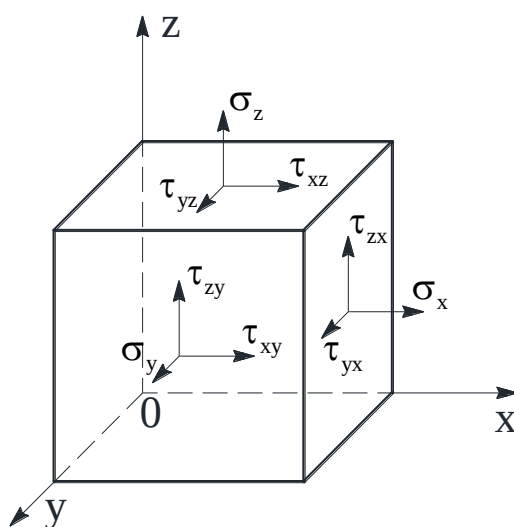


Рисунок 1

Главные напряжения в задаче на исследование напряженного состояния в точке тела находят, решая кубическое уравнение:

$$\sigma^3 - J_1 \cdot \sigma^2 + J_2 \cdot \sigma - J_3 = 0, \quad (1)$$

где коэффициенты являются инвариантами преобразования координат:

$$J_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3,$$

$$J_2 = \sigma_x \cdot \sigma_y + \sigma_y \cdot \sigma_z + \sigma_z \cdot \sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2 = \sigma_1 \cdot \sigma_2 + \sigma_2 \cdot \sigma_3 + \sigma_3 \cdot \sigma_1, \quad (2)$$

$$J_3 = \sigma_x \cdot \sigma_y \cdot \sigma_z + 2 \cdot \tau_{xy} \cdot \tau_{yz} \cdot \tau_{zx} - \sigma_x \cdot \tau_{yz}^2 - \sigma_y \cdot \tau_{zx}^2 - \sigma_z \cdot \tau_{xy}^2 = \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_3.$$

где $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ - главные напряжения, являющиеся решениями уравнения (1).

Положение главных площадок, т.е. значения направляющих косинусов нормалей к главным площадкам l, m, n , находим решая систему однородных уравнений:

$$(\sigma_x - \sigma) \cdot \frac{l}{n} + \tau_{xy} \cdot \frac{m}{n} = -\tau_{xz}, \quad \tau_{yx} \cdot \frac{l}{n} + (\sigma_y - \sigma) \cdot \frac{m}{n} = -\tau_{yz}, \quad \tau_{zx} \cdot \frac{l}{n} + \tau_{zy} \cdot \frac{m}{n} + (\sigma_z - \sigma) = 0, \quad (3)$$

$$\text{с учетом выражения: } l^2 + m^2 + n^2 = 1, \quad (4)$$

Вариант задачи выдается четырехзначным шифром. Первая пара цифр соответствует номеру строки данных для нормальных напряжений, вторая пара – строки данных для касательных напряжений (табл. 1).

Таблица 1. «Числовые значения напряжений для расчета задачи №1»

Номер строки	Нормальные напряжения, Мпа			Касательные напряжения, Мпа		
	σ_x	σ_y	σ_z	τ_{xy}	τ_{yz}	τ_{zx}
1	80	60	160	100	60	80
2	100	120	80	50	100	50
3	90	90	120	60	60	100
4	-90	-90	-120	80	60	100
5	100	100	100	60	80	100
6	160	80	60	100	-90	-60
7	100	80	120	120	60	-50
8	100	150	50	100	50	-100
9	150	70	80	-90	-80	60
10	-140	-60	-100	60	100	90
11	150	90	60	100	-60	-50
12	130	100	70	90	100	90
13	-70	-130	-100	120	60	90
14	80	110	60	70	-40	80
15	120	90	70	100	120	100
16	-70	-100	-50	110	100	90
17	100	50	120	90	-70	60
18	90	70	100	-80	100	-80
19	120	110	90	60	70	80
20	70	70	80	90	100	110
21	140	120	120	-110	-100	90
22	110	80	140	50	60	50
23	-90	-100	-70	70	90	80
24	60	90	70	-50	-100	120
25	100	130	100	80	100	90
26	150	150	140	100	50	-80
27	120	100	90	110	90	70
28	90	120	80	70	100	-90
29	130	70	110	120	110	100
30	-100	-80	-60	100	60	110

ЗАДАЧА №2

«ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ»

Дана прямоугольная полоса-балка (рис. 2) длиной l , высотой h и толщиной, равной 1. Начало координат 0 принято в середине торцевого сечения. Главными осями поперечного сечения являются оси Oy и Oz : продольная ось Ox проходит по середине полосы-балки. Выражения для функции напряжений φ выбрать из табл. 2, а числовые значения – из табл. 3. Объемными силами пренебречь.

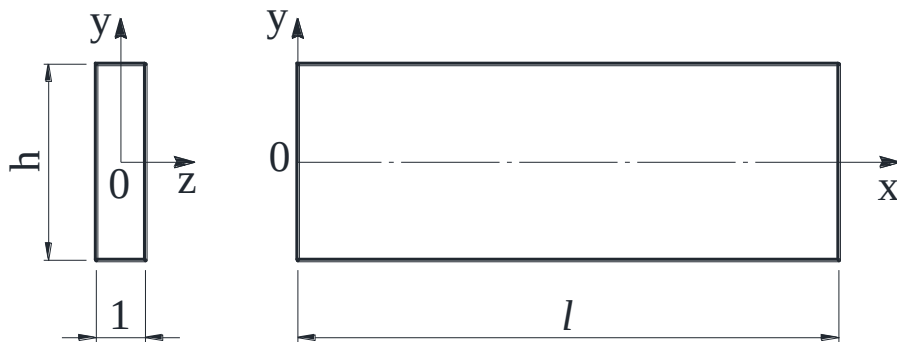


Рисунок 2

Требуется:

1) проверить, можно ли предложенные функции $\varphi(x, y)$ принять для решения плоской задачи теории упругости. В этих целях используют бигармоническое уравнение:

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0; \quad (1)$$

2) найти выражения для напряжений σ_x , σ_y , и τ_{xy} решаемой задачи, пользуясь следующими формулами для напряжений:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}; \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}; \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}; \quad (2)$$

3) построить эпюры напряжений σ_x , σ_y , и τ_{xy} для одного сечения: либо перпендикулярного оси Ox , либо перпендикулярного оси Oy (значения x и y заданы в табл. 3);

4) определить внешние силы (нормальные и касательные), приложенные ко всем четырем граням полосы-балки, дать их изображение на рисунке полосы-балки и привести соответствующие эпюры. В этих целях используют условия на поверхности тела (условия на контуре тела или статические граничные условия)

$$\begin{aligned} \rho_{xu} &= \sigma_x \cos(x, u) + \tau_{xy} \cos(y, u), \\ \rho_{yu} &= \tau_{yx} \cos(x, u) + \sigma_y \cos(y, u), \end{aligned} \quad (3)$$

где ρ_{xu} , ρ_{yu} – проекции на оси Ox и Oy внешних сил, действующих на гранях полосы-балки; u – нормаль к грани; $\cos(x, u)$, $\cos(y, u)$ – направляющие косинусы нормали u .

Вариант задачи выдается четырехзначным шифром. Первая пара цифр соответствует номеру строки из табл. 2 выражений для функций напряжений, вторая пара – строки данных числовых значений (табл. 3).

Таблица 2. «Выражения для функций напряжений задачи №2»

Номер строки	Функция напряжений $\varphi(x,y)$
1	$\varphi = a(x^4 - y^4) + bx^3y + xy^3$
2	$\varphi = ax(x^2 + y^2) + bx^2y + xy$
3	$\varphi = ay(x^2 + y^2) + bxy^2 + xy$
4	$\varphi = axy^3 + b\left(x^2y^2 - \frac{x^4}{3}\right)$
5	$\varphi = ax^3 + bx^2y + xy^2 + xy$
6	$\varphi = a(x^4 - y^4) + by^2 + by^2\left(x^2 - \frac{y^2}{3}\right)$
7	$\varphi = a(y^4 - x^4) + bxy^3 + x^2y$
8	$\varphi = \frac{a}{12}(x^4 - y^4) + \frac{1}{3}xy(bx^2 + y^2)$
9	$\varphi = \frac{1}{3}x^3y + \frac{1}{2}bx^2y^2 - \frac{1}{6}by^4$
10	$\varphi = \frac{1}{3}axy^3 + \frac{1}{2}bx^2y^2 - \frac{1}{6}bx^4$
11	$\varphi = ax^4 - 3ax^2y^2 + bxy^3$
12	$\varphi = ax^3y - 3bx^2y^2 + by^4$
13	$\varphi = ax^4 - 3(a+b)x^2y^2 + by^4$
14	$\varphi = axy^3 + x^3 + y^3 - bxy$
15	$\varphi = ax^3y + b\left(x^2y^2 - \frac{1}{3}y^4\right)$

Таблица 3. «Числовые значения для расчета задачи №2»

Номер строки	a	b	<i>l</i>	h	x	y
	m					
1	1	1	5	1	1	0,2
2	2	1	6	1	2	0,3
3	2	1	5	2	2	0,4
4	1	2	6	1	2	0,3
5	1	2	5	2	2	0,5
6	2	2	4	2	1	0,5
7	2	1	4	2	1	0,5
8	2	1	6	1	3	0,3
9	1	2	5	1	2	0,2
10	2	1	5	2	2	0,4
11	1	1	4	3	1	0,7
12	3	2	5	2	3	0,2
13	2	3	5	3	3	0,6
14	2	3	7	3	4	0,5
15	3	2	6	1	3	0,2
16	1	1	8	2	4	0,3
17	1	2	4	3	2	0,8
18	2	3	4	2	1	0,2
19	2	1	7	1	5	0,2
20	3	1	7	1	4	0,3
21	3	2	6	3	3	0,5
22	1	2	5	2	2	0,4
23	3	3	4	2	1	0,2
24	2	2	5	1	2	0,3
25	1	2	8	3	3	0,5
26	2	1	7	3	4	0,7
27	2	3	6	2	2	0,4
28	3	2	5	2	3	0,3
29	3	1	5	1	2	0,2
30	1	3	4	1	2	0,5

ЗАДАЧА №3

«ИЗГИБ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПЛАСТИНОК»

Прямоугольная пластинка (рис. 3) изгибается под действием поперечной нагрузки. Задано уравнение упругой поверхности пластинки ω . Требуется:

- 1) установить, каким граничным условиям удовлетворяет предложенное уравнение упругой поверхности $\omega(x, y)$;
- 2) определить постоянный коэффициент C , используя дифференциальное уравнение изогнутой срединной поверхности пластинки в прямоугольных координатах;
- 3) составить выражения моментов и поперечных сил по известным формулам для этих моментов и поперечных сил в прямоугольных координатах;
- 4) построить эпюры моментов и поперечных сил в сечениях $x(M_x, Q_x)$ или $y(M_y, Q_y)$ прямоугольных пластинок, указанных в табл. 4 и на рис. 3. Числовые данные взять из табл. 5.

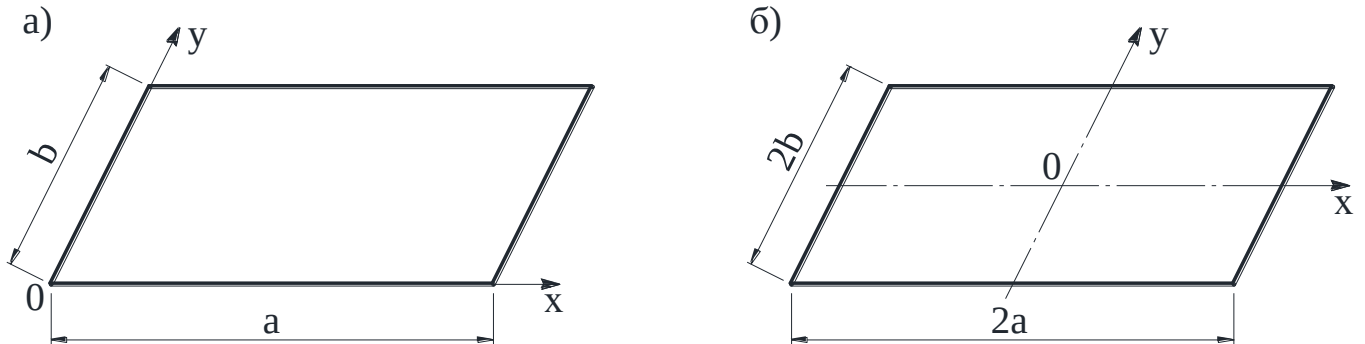


Рисунок 3

Формулы для расчета пластинок в прямоугольных координатах:

- дифференциальное уравнение изогнутой срединной поверхности пластинки:

$$D \left(\frac{\partial^4 \omega}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^2 \cdot \partial y^2} + \frac{\partial^4 \omega}{\partial y^4} \right) = q(xy). \quad (1)$$

- изгибающие моменты:

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right), \quad M_y = -D \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \right). \quad (2)$$

- поперечные силы:

$$Q_x = -D \left(\frac{\partial^3 \omega}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \omega}{\partial x \cdot \partial y^2} \right), \quad Q_y = -D \left(\frac{\partial^3 \omega}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 \omega}{\partial y \cdot \partial x^2} \right). \quad (3)$$

- крутящий момент:

$$M_{xy} = -D(1-\mu) \cdot \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \cdot \partial y}. \quad (4)$$

Вариант задачи выдается четырехзначным шифром. Первая пара цифр соответствует номеру строки из табл. 4 уравнений прямоугольных пластинок, вторая пара – строки данных числовых значений (табл. 5).

Таблица 4. «Уравнения прямоугольных пластинок задачи №3»

Номер строки	Очертания пластинок по рис. 3. Уравнения поперечной нагрузки $q(x,y)$ и упругой поверхности пластинки $\omega(x, y)$. Жесткость пластинки $D=\text{const}$, $C=\text{const}$, $q_0=\text{const}$
1	Схема а, $q=\text{const}$; $\omega = C(x-a)^2(y-b)^2$
2	Схема а, $q=\text{const}$; $\omega = Cxy(x-a)(y-b)$
3	Схема а, $q=q_0\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b}$; $\omega = C\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b}$
4	Схема а, $q=q_0\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{2\pi y}{b}$; $\omega = C\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{2\pi y}{b}$
5	Схема а, $q=q_0\sin\frac{\pi y}{b}\sin\frac{2\pi x}{a}$; $\omega = C\sin\frac{\pi y}{b}\sin\frac{2\pi x}{a}$
6	Схема б, $q=q_0\sin\frac{\pi x}{a}\cos\frac{\pi y}{2b}$; $\omega = C\sin\frac{\pi x}{a}\cos\frac{\pi y}{2b}$
7	Схема б, $q=q_0\cos\frac{\pi x}{2a}\sin\frac{\pi y}{b}$; $\omega = C\cos\frac{\pi x}{2a}\sin\frac{\pi y}{b}$
8	Схема б, $q=q_0\sin\frac{2\pi x}{a}\cos\frac{\pi y}{2b}$; $\omega = C\sin\frac{2\pi x}{a}\cos\frac{\pi y}{2b}$
9	Схема б, $q=q_0\cos\frac{\pi x}{2a}\sin\frac{2\pi y}{b}$; $\omega = C\cos\frac{\pi x}{2a}\sin\frac{2\pi y}{b}$
10	Схема б, $q=\text{const}$; $\omega = C(x^2 - a^2)(y-b)^2$
11	Схема б, $q=\text{const}$; $\omega = C(x-a)^2(y^2 - b^2)$
12	Схема б, $q=\text{const}$; $\omega = C(x^2 - a^2)(y^2 - b^2)$
13	Схема б, $q=q_0\cos\frac{\pi x}{2a}\cos\frac{\pi y}{2b}$; $\omega = C\cos\frac{\pi x}{2a}\cos\frac{\pi y}{2b}$
14	Схема б, $q=q_0\cos\frac{3\pi x}{2a}\cos\frac{3\pi y}{2b}$; $\omega = C\cos\frac{3\pi x}{2a}\cos\frac{3\pi y}{2b}$
15	Схема б, $q=q_0\cos\frac{3\pi x}{2a}\cos\frac{\pi y}{2b}$; $\omega = C\cos\frac{3\pi x}{2a}\cos\frac{\pi y}{2b}$
16	Схема б, $q=q_0\cos\frac{\pi x}{2a}\cos\frac{3\pi y}{2b}$; $\omega = C\cos\frac{\pi x}{2a}\cos\frac{3\pi y}{2b}$

Таблица 5. «Числовые значения для расчета задачи №3»

Номер строки	a	b	толщина h	x	y	μ
	m					
1	4	3	0,1	3	2	0,35
2	3	3	0,1	2	2	0,3
3	3	3	0,1	1	1	0,25
4	4	4	0,2	2	3	0,25
5	5	3	0,1	3	1	0,3
6	3	5	0,1	1	3	0,3
7	3	3	0,2	2	2	0,35
8	5	5	0,2	2	2	0,35
9	5	4	0,2	3	1	0,3
10	4	5	0,2	2	3	0,3
11	5	4	0,1	1	2	0,25
12	6	5	0,1	2	3	0,25
13	3	6	0,2	3	3	0,3
14	3	5	0,2	1	2	0,35
15	5	5	0,1	3	1	0,3
16	5	3	0,2	2	2	0,35
17	4	4	0,1	2	2	0,25
18	4	3	0,2	1	1	0,3
19	4	5	0,1	2	3	0,3
20	3	5	0,3	1	2	0,3
21	4	5	0,3	3	1	0,35
22	5	6	0,1	2	4	0,35
23	6	4	0,2	4	2	0,3
24	5	3	0,3	2	1	0,25
25	4	6	0,1	1	3	0,25
26	3	3	0,3	1	1	0,3
27	3	5	0,2	2	3	0,3
28	5	6	0,2	3	4	0,35
29	6	5	0,2	4	1	0,3
30	6	4	0,3	2	2	0,25

Примечание: μ - коэффициент Пуассона.

ЗАДАЧА №4

«ИЗГИБ КРУГЛЫХ ПЛАСТИНОК»

Круглая пластинка, сплошная или кольцевая (с вырезом в центре), опёртая по наружному контуру, находится под действием внешней нагрузки (рис. 4). Требуется:

1) для уравнений 1-7: проверить граничные условия, определить постоянный коэффициент C , используя дифференциальное уравнение изогнутой срединной поверхности пластинки в полярных координатах. Для уравнений 8-12: найти уравнение изогнутой срединной поверхности пластинки $\omega(r)$, воспользовавшись общим решением основного дифференциального уравнения изгиба пластинки. Произвольные постоянные C_1, C_2, C_3 и C_4 определяют из условий на контуре пластинки.

2) составить выражения для изгибающих моментов M_r , и M_θ и для поперечной силы Q_r .

3) построить эпюры M_r , и M_θ для диаметрального сечения пластинки. Числовые данные взять из табл. 7.

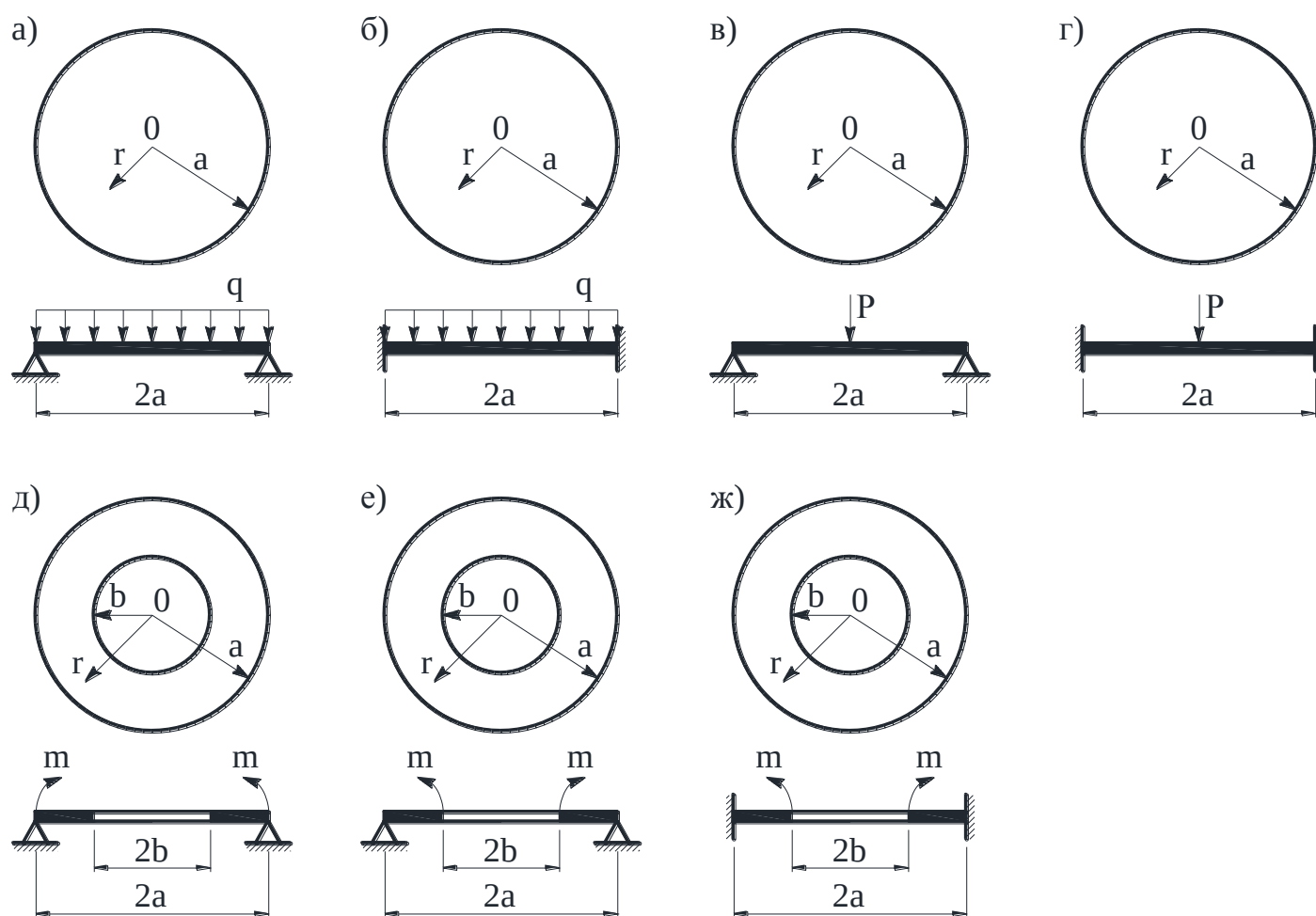


Рисунок 4

Формулы для расчета пластинок в полярных координатах:

- дифференциальное уравнение изогнутой срединной поверхности пластинки (осесимметричная задача):

$$D \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} \right) \left(\frac{d^2 \omega}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{d\omega}{dr} \right) = q(r),$$
$$\text{или } D \left(\frac{d^4 \omega}{dr^4} + \frac{2}{r} \cdot \frac{d^3 \omega}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \cdot \frac{d^2 \omega}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \cdot \frac{d\omega}{dr} \right) = q(r). \quad (1)$$

- изгибающие моменты:

$$M_r = -D \left(\frac{d^2 \omega}{dr^2} + \frac{\mu}{r} \cdot \frac{d\omega}{dr} \right), \quad M_\theta = -D \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{d\omega}{dr} + \mu \frac{d^2 \omega}{dr^2} \right). \quad (2)$$

- поперечная сила:

$$Q_r = -D \frac{d}{dr} \left(\frac{d^2 \omega}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{d\omega}{dr} \right), \quad \text{или } Q_r = -D \left(\frac{d^3 \omega}{dr^3} + \frac{1}{r} \cdot \frac{d^2 \omega}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \cdot \frac{d\omega}{dr} \right). \quad (3)$$

Вариант работы выдается четырехзначным шифром. Первая пара цифр соответствует номеру строки из табл. 6 уравнений круглых пластинок, вторая пара – строки данных числовых значений (табл. 7).

Таблица 6. «Уравнения круглых пластинок задачи №4»

Номер строки	Очертания пластинок по рис. 4. Поперечная нагрузка и уравнение упругой поверхности пластинки $\omega(r)$ $C=\text{const}$. Жесткость пластинки $D=\text{const}$
1	Пластинка свободно оперта по контуру (рис.4, а). Нагрузка интенсивности $q=\text{const}$ распределена по всей площади пластинки : $\omega = C(a^2 - r^2) \cdot \left(\frac{5 + \mu}{1 + \mu} a^2 - r^2 \right)$
2	Пластинка защемлена по контуру (рис.4, б). Нагрузка интенсивности $q=\text{const}$ распределена по всей площади пластинки : $\omega = C(a^2 - r^2)^2$
3*	Пластинка свободно оперта по контуру и нагружена сосредоточенной силой P (рис.4, в) : $\omega = C \left[\frac{3 + \mu}{1 + \mu} (a^2 - r^2) + 2r^2 \ln \frac{r}{a} \right]$
4*	Пластинка защемлена по контуру и нагружена сосредоточенной силой P (рис.4, г) : $\omega = C \left(r^2 \ln \frac{r}{a} + \frac{a^2 - r^2}{2} \right)$
5**	Пластинка в виде круглого кольца, свободно опертая по контуру, нагружена моментами m , равномерно распределенными по наружному контуру (рис.4, д) : $\omega = C \left[\frac{a^2 - r^2}{a^2} - \frac{2(1 + \mu)}{1 - \mu} \cdot \frac{b^2}{a^2} \cdot \ln \frac{r}{a} \right]$
6**	Пластинка в виде круглого кольца, свободно опертая по наружному контуру, нагружена моментами m , равномерно распределенными по внутреннему контуру (рис.4, е) : $\omega = C \left[\frac{a^2 - r^2}{a^2} - \frac{2(1 + \mu)}{1 - \mu} \cdot \ln \frac{r}{a} \right]$
7**	Пластинка в виде круглого кольца, защемленная по наружному контуру, нагружена моментами m , равномерно распределенными по внутреннему контуру (рис.4, ж) : $\omega = C \left(2 \ln \frac{r}{a} + \frac{a^2 - r^2}{a^2} \right)$

Примечания:

* постоянное C в уравнениях 3 и 4 может быть найдено из равенства $Q_r = Q'_r$, где Q_r - выражение поперечной силы, см. формулу (3), а Q'_r - значение поперечной силы, полученное из рассмотрения условий равновесия части пластинки, ограниченной окружностью радиуса r : $Q'_r = -(P / 2\pi r)$

** постоянное C в уравнениях 5-7 может быть найдено из равенств: для 5-го уравнения $(M_r)_{r=a} = m$, а для 6-7 уравнений $(M_r)_{r=b} = m$.

Продолжение таблицы 6. «Уравнения круглых пластинок задачи №4»

Номер строки	Очертания пластинок по рис. 4. Поперечная нагрузка и общее решение основного дифференциального уравнения изгиба пластинки $\omega(r)$. Жесткость пластинки $D=\text{const}$
8	Пластинка свободно оперта по контуру (рис. 4, а). Нагрузка интенсивности q распределена по всей площади пластинки : $\omega = C_3 + C_4 r^2 + \frac{q r^4}{64D}$
9	Пластинка защемлена по контуру (рис. 4, б). Нагрузка интенсивности q распределена по всей площади пластинки : $\omega = C_3 + C_4 r^2 + \frac{q r^4}{64D}$
10	Пластинка в виде круглого кольца, свободно опертая по контуру, нагружена моментами m , равномерно распределенными по наружному контуру (рис. 4, д) : $\omega = C_1 \ln r + C_2 r^2 \ln r + C_3 + C_4 r^2$
11	Пластинка в виде круглого кольца, свободно опертая по наружному контуру, нагружена моментами m , равномерно распределенными по внутреннему контуру (рис. 4, е) : $\omega = C_1 \ln r + C_2 r^2 \ln r + C_3 + C_4 r^2$
12	Пластинка в виде круглого кольца, защемленная по наружному контуру, нагружена моментами m , равномерно распределенными по внутреннему контуру (рис. 4, ж) : $\omega = C_1 \ln r + C_2 r^2 \ln r + C_3 + C_4 r^2$

Примечания: постоянные C_1 , C_2 , C_3 и C_4 определяются исходя из условий на контурах пластинок:

- 8 уравнение: при $r=a$: $\omega = 0$, $M_r = 0$
- 9 уравнение: при $r=a$: $\omega = 0$, $d\omega / dr = 0$
- 10 уравнение: при $r=b$: $Q_r = M_r = 0$; при $r=a$: $\omega = 0$, $M_r = m$
- 11 уравнение: при $r=b$: $Q_r = 0$, $M_r = m$; при $r=a$: $\omega = 0$, $M_r = 0$
- 12 уравнение: при $r=b$: $Q_r = 0$, $M_r = m$; при $r=a$: $\omega = 0$, $d\omega / dr = 0$

Таблица 7. «Числовые значения для расчета задачи №4»

Номер строки	a	b	толщина h	μ
	m			
1	6	4	0,1	0,35
2	5	3	0,1	0,3
3	4	2	0,2	0,25
4	5	3	0,2	0,25
5	5	3	0,2	0,3
6	6	4	0,1	0,3
7	6	3	0,1	0,35
8	5	3	0,2	0,35
9	5	3	0,1	0,3
10	6	3	0,2	0,3
11	7	4	0,2	0,25
12	7	3	0,1	0,25
13	5	3	0,1	0,3
14	6	4	0,2	0,35
15	4	2	0,2	0,3
16	5	3	0,1	0,35
17	7	4	0,2	0,25
18	6	3	0,1	0,3
19	5	3	0,2	0,3
20	4	2	0,1	0,3
21	7	4	0,3	0,35
22	7	3	0,3	0,35
23	5	3	0,1	0,3
24	5	3	0,2	0,25
25	6	4	0,3	0,25
26	4	2	0,1	0,3
27	4	2	0,3	0,3
28	7	4	0,2	0,35
29	6	3	0,1	0,3
30	5	3	0,2	0,25

Примечание: μ - коэффициент Пуассона.