

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Тихоокеанский государственный университет»

**ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ
КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ
ПО СОПРОТИВЛЕНИЮ МАТЕРИАЛОВ**

Хабаровск
Издательство ТОГУ
2009

УДК 539.3.(076)

Примеры решения задач контрольных работ по сопротивлению материалов / сост. В. В. Иовенко. – Хабаровск : Изд-во ТОГУ, 2009. – 28 с.

Издание составлено на кафедре «Механика деформируемого твердого тела». Содержит примеры выполнения задач контрольных работ по сопротивлению материалов для студентов заочного факультета, заочного факультета ускоренного обучения и центра дистанционных технологий, является приложением к ранее изданным методическим указаниям и заданиям к контрольным работам.

Печатается в соответствии с решениями кафедры «Механика деформируемого твердого тела» и методического совета заочного факультета.

Главный редактор *Л. А. Суевалова*
Редактор *Т. Ф. Шейкина*
Компьютерная верстка *В. В. Иовенко*

Подписано в печать . Формат 60x84 ¹/₁₆.
Бумага писчая. Гарнитура «Таймс». Печать цифровая. Усл. печ. л. 1,63.

Тираж 200 экз. Заказ .

Издательство Тихоокеанского государственного университета.
680035, Хабаровск, ул. Тихоокеанская, 136.

Отдел оперативной полиграфии
издательства Тихоокеанского государственного университета.
680035, Хабаровск, ул. Тихоокеанская, 136.

ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Данное указание составлено в соответствии с программой курса сопротивления материалов и является приложением к методическим указаниям и контрольным заданиям к изучению курса «Сопротивление материалов» для студентов заочной формы обучения (/ сост. Ю. М. Дойхен, А. А. Лукашевич, Л. Б. Потапова. – Хабаровск: Изд-во Тихоокеан. гос. ун-та, 2006. – 47 с.), включающим в себя примеры решения задач, аналогичных предложенным в контрольной работе.

При решении задач необходимо использовать приведенные методические указания. В начале каждой задачи показывается, как с помощью номера зачетной книжки выбирается номер схемы и исходные данные задачи на основе таблиц и рисунков, указанных методических указаний.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 1

Абсолютно жесткий брус опирается на шарнирно неподвижную опору и прикреплен к двум стержням при помощи шарниров (рис. 1.1).

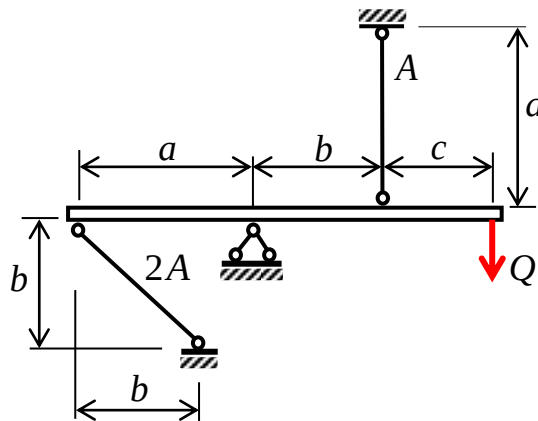


Рис. 1.1

Требуется:

- 1) найти усилия и напряжения в стержнях, выразив их через силу Q ;
- 2) найти допускаемую нагрузку $Q_{\text{дон}}$, приравняв большее из напряжений в двух стержнях допускаемому напряжению $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$;
- 3) найти предельную грузоподъемность при $\sigma_m = 240 \text{ МПа}$;
- 4) определить перемещение точки приложения силы Q .

Решение

Пусть последние три цифры номера зачетной книжки – 425. Ставим им в соответствие первые три буквы русского алфавита. Получаем $a = 4$, $b = 2$, $v = 5$. Данные берем из табл. 1 методических указаний. Таким образом, имеем: схема № 5 (рис.1 мет. указ.), $A = 12 \text{ см}^2$, $a = 2,4 \text{ м}$, $b = 2,2 \text{ м}$, $c = 1,5 \text{ м}$.

Данная система статически неопределима один раз, поскольку четыре неизвестных (N_1, N_2, H_k, R_k) не могут быть определены из трех независимых уравнений равновесия. Поэтому, кроме статической стороны задачи (рис. 1. 2, а), необходимо рассмотреть геометрическую (рис. 1.2, б) и физическую стороны задачи.

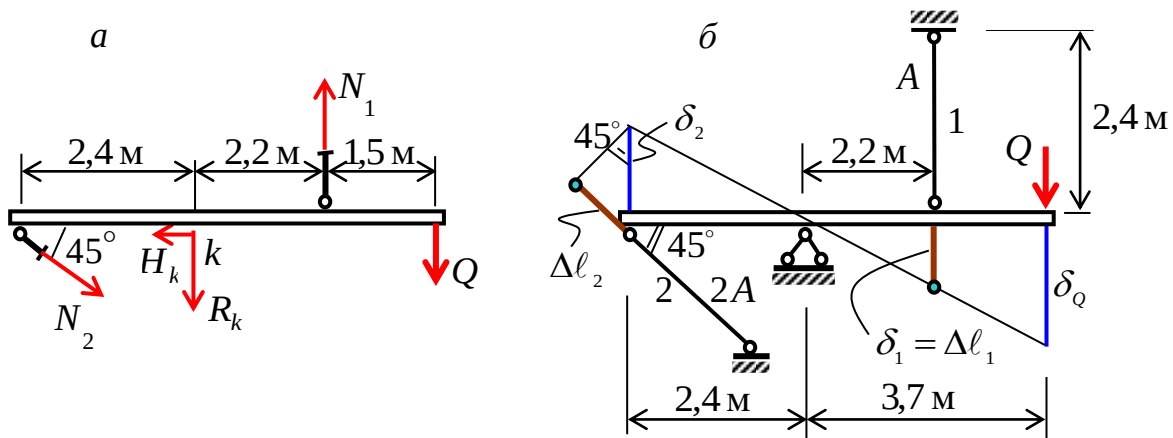


Рис. 1.2

Рассмотрение статической стороны задачи (см. рис. 1.2, а) дает следующее уравнение равновесия:

$$\sum M_k = 0, \quad N_1 \cdot 2,2 + N_2 \cdot \sin 45^\circ \cdot 2,4 - Q \cdot 3,7 = 0, \quad \sin 45^\circ = 0,707.$$

Под действием силы Q жесткий брус повернется относительно шарнирно неподвижной опоры по часовой стрелке. Вследствие малости, перемещения характерных точек жесткого бруса по дугам окружностей можно заменить перемещениями по касательным к дугам окружностей. В нашем случае перемещение δ_1 концевое сечения первого стержня совпадает с его продольной деформацией $\Delta \ell_1$. Второй стержень, чтобы совместить начальное положение его концевое сечения с конечным, надо растянуть на $\Delta \ell_2$ и повернуть вдоль касательной по часовой стрелке (касательная будет перпендикулярна продольной оси второго стержня). При этом $\Delta \ell_2 = \delta_2 \cdot \sin 45^\circ$. Из рис. 1.2, б следует:

$$\frac{\delta_1}{\delta_2} = \frac{2,2}{2,4}, \quad \text{или} \quad \frac{\Delta \ell_1 \cdot \sin 45^\circ}{\Delta \ell_2} = \frac{2,2}{2,4}, \quad \text{отсюда} \quad \Delta \ell_1 = \Delta \ell_2 \cdot 1,296.$$

Здесь δ_1, δ_2 – перемещения точек прикрепления стержней 1 и 2 к жесткому брусу; $\Delta\ell_1, \Delta\ell_2$ – продольные деформации стержней 1 и 2.

При составлении уравнения равновесия следует помнить о соответствии статической стороны задачи геометрической, т. е. растягивающим деформациям должны соответствовать растягивающие усилия и наоборот.

Выразить деформации стержней $\Delta\ell_1$ и $\Delta\ell_2$ через усилия N_1 и N_2 можно используя физическую сторону задачи (по закону Гука – $\Delta\ell_i = \frac{N_i \cdot \ell_i}{E \cdot A_i}$):

$$\frac{N_1 \cdot \ell_1}{E \cdot A_1} = \frac{N_2 \cdot \ell_2}{E \cdot A_2} \cdot 1,296; \quad \text{с учетом } \ell_1 = 2,4 \text{ м}, \quad \ell_2 = 2,2 \cdot \sqrt{2} = 3,11 \text{ м}, \quad A_1 = A, \\ A_2 = 2 \cdot A \text{ имеем } N_1 = 0,84 \cdot N_2.$$

Решая совместно систему полученных уравнений, определим значения N_1 и N_2 в долях от Q :

$$\begin{cases} N_1 \cdot 2,2 + N_2 \cdot 1,697 = 3,7 \cdot Q, \\ N_1 = N_2 \cdot 0,84 \end{cases}, \quad \begin{cases} N_1 = 0,877 \cdot Q \\ N_2 = 1,044 \cdot Q \end{cases}.$$

Напряжения в поперечных сечениях стержней 1 и 2 будут равны:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = 0,877 \cdot \frac{Q}{A}, \quad \sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = \frac{1,044 \cdot Q}{2A} = 0,522 \cdot \frac{Q}{A}.$$

Допускаемую нагрузку находим из условия прочности по нормальным напряжениям, приравняв большее из напряжений в двух стержнях допускаемому напряжению:

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma], \quad 0,877 \cdot \frac{Q}{A} \leq [\sigma], \quad 0,877 \cdot \frac{Q}{12 \cdot 10^{-4}} \leq 160 \cdot 10^6, \quad Q_{\text{дон}} \leq 218,9 \text{ кН}.$$

Предельную грузоподъемность системы Q_m^k найдем, подставив в уравнение равновесия (рис. 1.3) предельные значения усилий в стержнях:

$$\sum M_k = 0, \quad \sigma_m \cdot A \cdot 2,2 + \sigma_m \cdot 2A \cdot \sin \alpha \cdot 2,4 - Q_m^k \cdot 3,7 = 0, \quad Q_m^k = 435,4 \text{ кН}.$$

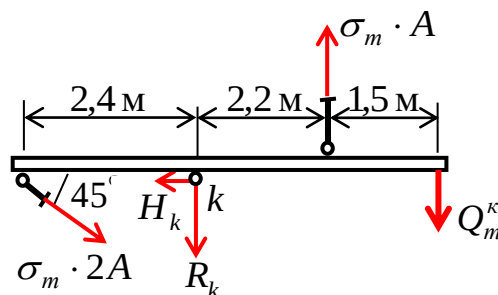


Рис. 1.3

Перемещение точки приложения силы Q согласно рис. 1.2, б будет равно:

$$\delta_Q = \frac{3,7}{2,2} \cdot \delta_1 = \frac{3,7}{2,2} \cdot \Delta\ell_1 = \frac{3,7}{2,2} \cdot \frac{N_1 \cdot \ell_1}{E \cdot A} = \frac{3,7 \cdot 0,877 \cdot 218,9 \cdot 10^3 \cdot 2,4}{2,2 \cdot 200 \cdot 10^9 \cdot 12 \cdot 10^{-4}} = 0,003 \text{ м}.$$

Задача 2

К стальному валу приложены четыре сосредоточенных момента (рис.2. 1).

Требуется:

- 1) построить эпюру крутящих моментов;
- 2) при заданном значении $[\tau]$ определить диаметр вала из расчета на прочность и округлить его до ближайшей большей величины из нормального ряда чисел: 30, 35, 40, 45, 50, 60, 70, 80, 90, 100, 110, 125, 140, 160, 180, 200 мм;
- 3) найти наибольший относительный угол закручивания и проверить жесткость вала при $[\theta] = 0,05$ рад/м .

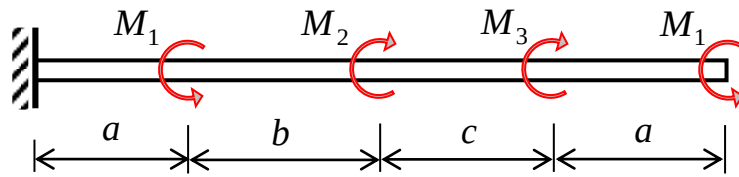


Рис. 2.1

Решение

Пусть последние три цифры номера зачетной книжки – 297. Ставим им в соответствие первые три буквы русского алфавита. Получаем $a = 2$, $b = 9$, $c = 7$. Данные берем из табл. 2 методических указаний. Таким образом, имеем: схема № 7 (рис. 2.1), $a = 1,2$ м, $b = 1,9$ м, $c = 1,7$ м, $M_1 = 1,2$ кН·м, $M_2 = 1,9$ кН·м, $M_3 = 1,7$ кН·м, $[\tau] = 40$ МПа. Для стали принимаем модуль сдвига равным $G = 80$ ГПа .

Крутящие моменты, возникающие в поперечных сечениях вала, определяются по внешним скручивающим моментам с помощью метода сечений (рис. 2.2):

участок № 1 ($0 \leq z_1 \leq 1,2$ м) $M_1^{kp} = -1,2$ кН·м;

участок № 2 ($0 \leq z_2 \leq 1,7$ м) $M_2^{kp} = -1,2 + 1,7 = 0,5$ кН·м;

участок № 3 ($0 \leq z_3 \leq 1,9$ м) $M_3^{kp} = -1,2 + 1,7 + 1,9 = 2,4$ кН·м;

участок № 4 ($0 \leq z_4 \leq 1,2$ м) $M_4^{kp} = -1,2 + 1,7 + 1,9 - 1,2 = 1,2$ кН·м.

Для удобства построения эпюр M_{kp} принимаем следующее правило знаков: крутящий момент считается положительным, если при взгляде в торец отсеченной части вала действующий на него момент направлен по ходу часовой стрелки.

Диаметр вала находим из условия прочности по касательным напряжениям:

$$\tau_{\max} \leq [\tau], \quad \frac{M_{\max}^{kp}}{I_{\rho}} \cdot \rho_{\max} \leq [\tau] \quad \text{или} \quad \frac{M_{\max}^{kp}}{W_{\rho}} \leq [\tau], \quad \text{где} \quad W_{\rho} = \frac{I_{\rho}}{\rho_{\max}} = \frac{\pi d^3}{16}, \quad \text{или}$$

$$\frac{2,4 \cdot 10^3}{\pi d^3} \cdot 16 \leq 40 \cdot 10^6, \quad d \geq 0,067 \text{ м.}$$

Здесь I_ρ – полярный момент инерции для круглого сечения, W_ρ – полярный момент сопротивления.

Принимаем $d = 70$ мм.

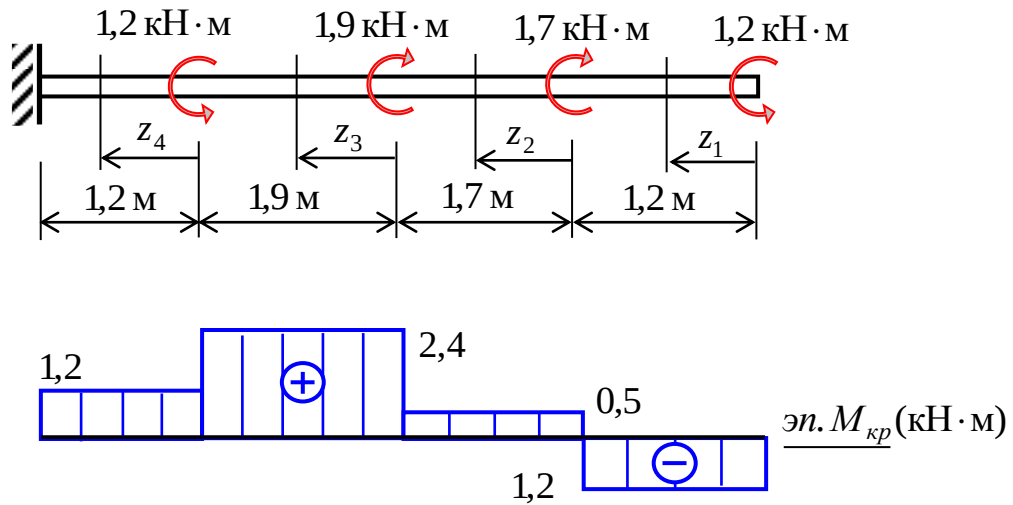


Рис. 2.2

Жесткость поперечного сечения вала при кручении будет равна (полярный момент инерции для круглого сечения $I_\rho = \frac{\pi \cdot d^4}{32}$, см. табл. П1 прил.)

$$GI_\rho = 80 \cdot 10^9 \cdot \frac{\pi \cdot (0,07)^4}{32} = 188,57 \text{ кН} \cdot \text{м}^2.$$

Наибольший относительный угол закручивания определяем по формуле

$$\theta_{\max} = \left(\frac{\varphi}{\ell} \right)_{\max} = \frac{M_{\max}^{\text{кр}}}{GI_\rho} = \frac{2,4 \cdot 10^3}{188,57 \cdot 10^3} \approx 0,013 \frac{\text{рад}}{\text{м}}.$$

В нашем случае имеем $\theta_{\max} < [\theta]$, где $[\theta] = 0,05$. Таким образом, условие жесткости ($\theta_{\max} \leq [\theta]$) выполняется.

Задача 3

Для заданного поперечного сечения (рис. 3.1), состоящего из двух стандартных профилей (швеллера и равнобокого уголка), требуется:

- 1) определить положение центра тяжести;
- 2) найти осевые и центробежный моменты инерции относительно центральных осей;
- 3) определить направление главных центральных осей (u и v);
- 4) найти моменты инерции относительно главных центральных осей;
- 5) вычертить сечение и указать на нем все размеры в числах и все оси.



Рис. 3.1

Решение

Пусть последние три цифры номера зачетной книжки – 406. Ставим им в соответствие первые три буквы русского алфавита. Получаем $a = 4$, $b = 0$, $v = 6$. Данные берем из табл. 3 методических указаний. Таким образом, имеем тип сечения № 6 (рис. 3.1), который состоит из швеллера № 20 и равнобокого уголка $125 \times 125 \times 12$. Из сортамента прокатной стали выписываем необходимые геометрические характеристики для швеллера № 20 (ГОСТ 8240-89): $A = 23,4 \text{ см}^2$, $h = 20 \text{ см}$, $b = 7,6 \text{ см}$, $z_0 = 2,07 \text{ см}$, $I_x = 1520 \text{ см}^4$, $I_y = 113 \text{ см}^4$; для уголка (ГОСТ 8509-93) имеем: $A = 28,9 \text{ см}^2$, $b = 12,5 \text{ см}$, $z_0 = 3,53 \text{ см}$, $I_x = 422 \text{ см}^4$, $I_{x_0}^{\max} = 670 \text{ см}^4$, $I_{y_0}^{\min} = 174 \text{ см}^4$.

Определяем координаты центра тяжести сечения относительно осей x_1 и y_2 , представив его в виде двух простых фигур (рис. 3.2):

$$y_c = \frac{\sum_{i=1}^2 S_{x_1}^i}{\sum_{i=1}^2 A_i} = \frac{S_{x_1}^{(1)} + S_{x_1}^{(2)}}{A_1 + A_2} = \frac{A_1 y_{шв} + A_2 y_{уг}}{A_1 + A_2} = \frac{23,4 \cdot 0 + 28,9 \cdot 13,53}{23,4 + 28,9} = 7,48 \text{ см},$$

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^2 S_{y_2}^i}{\sum_{i=1}^2 A_i} = \frac{S_{y_2}^{(1)} + S_{y_2}^{(2)}}{A_1 + A_2} = \frac{A_1 x_{шв} + A_2 x_{уг}}{A_1 + A_2} = \frac{23,4 \cdot 6,9 + 28,9 \cdot 0}{23,4 + 28,9} = 3,09 \text{ см}.$$

Здесь $y_{шв}$, $y_{уг}$ и $x_{шв}$, $x_{уг}$ – расстояния от центров тяжести простых фигур швеллера и уголка до вспомогательных осей x_1 и y_2 .

Центр тяжести заданного сечения (точка C) должен лежать на прямой $C_1 C_2$. Проводим через него центральные оси инерции x_c , y_c и определяем осевые и центробежный моменты инерции относительно этих осей по формулам для параллельного переноса осей:

$$I_{x_c} = I_{x_1}^{(1)} + a_1^2 A_1 + I_{x_2}^{(2)} + a_2^2 A_2 = 1520 + (-7,48)^2 \cdot 23,4 + 422 + 6,05^2 \cdot 28,9 = 4309 \text{ см}^4,$$

$$I_{y_c} = I_{y_1}^{(1)} + b_1^2 A_1 + I_{y_2}^{(2)} + b_2^2 A_2 = 113 + 3,81^2 \cdot 23,4 + 422 + (-3,09)^2 \cdot 28,9 = 1151 \text{ см}^4.$$

Здесь $a_1 = -y_c = -7,48 \text{ см}$, $b_1 = 3,81 \text{ см}$, $a_2 = 6,05 \text{ см}$, $b_2 = -x_c = -3,09 \text{ см}$ – координаты центров тяжести швеллера и уголка в осях x_c, y_c .

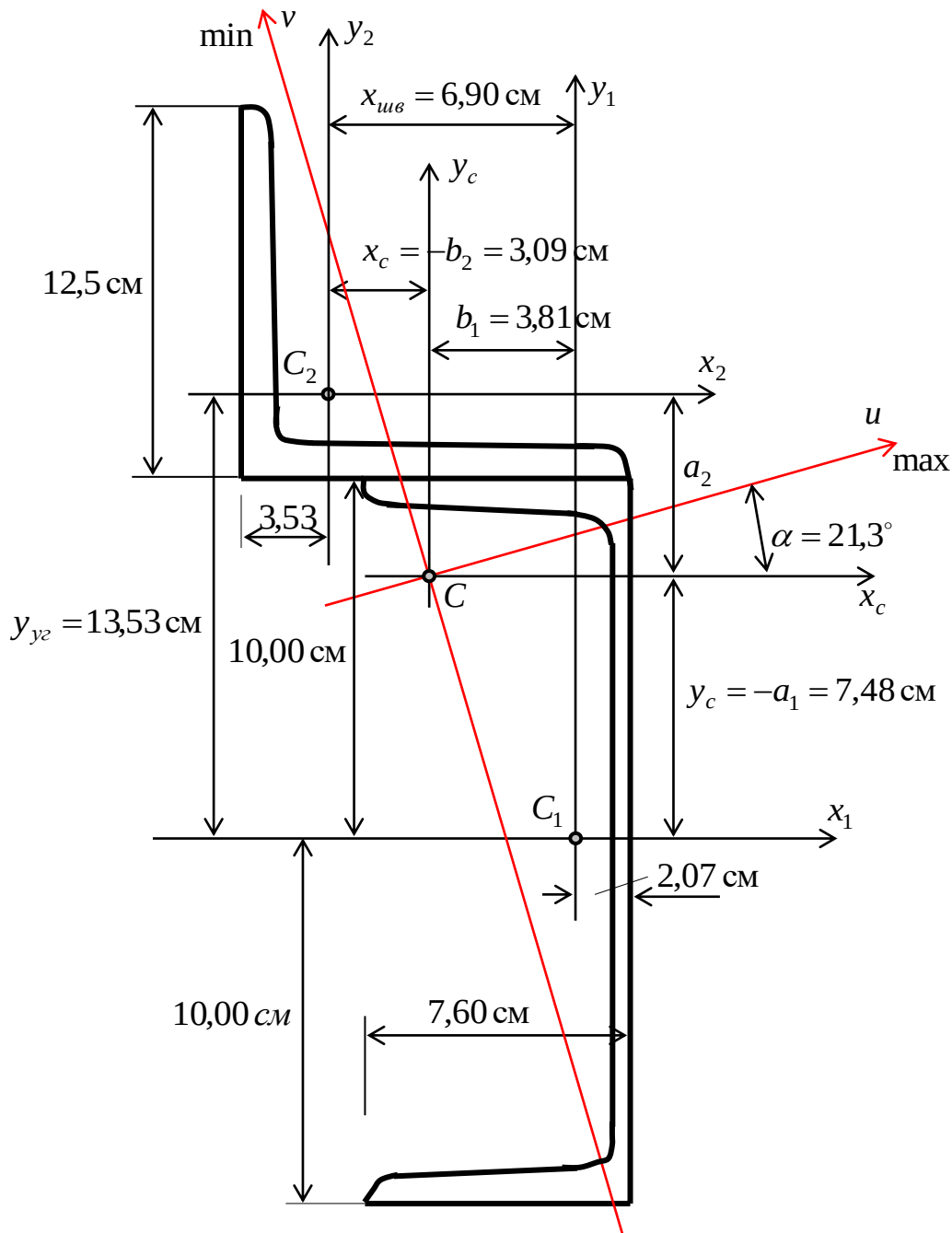


Рис. 3.2

Центробежный момент инерции уголка относительно осей x_2, y_2 можно определить по формуле

$$I_{xy}^{(2)} = -\sqrt{(I_x^{(2)} - I_{y_0}^{\min}) \cdot (I_y^{(2)} - I_{y_0}^{\min})} = -\sqrt{(422 - 174)^2} = -248 \text{ см}^4.$$

Знак минус здесь поставлен потому, что большая часть сечения уголка находится во второй и четвертой четвертях, где координаты имеют разные знаки. Центробежный момент инерции для всего сечения:

$$I_{x_c y_c} = I_{x_1 y_1}^{(1)} + a_1 b_1 A_1 + I_{x_2 y_2}^{(2)} + a_2 b_2 A_2 = 0 + (-7,48) \cdot 3,81 \cdot 23,4 + (-248) + 6,05 \cdot (-3,09) \cdot 28,9 = -1455 \text{ см}^4.$$

Определяем угол наклона главных центральных осей:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{2 \cdot I_{x_c y_c}}{I_{x_c} - I_{y_c}} = -\frac{2 \cdot (-1455)}{4309 - 1151} = 0,921; \quad \alpha = 21,3^\circ.$$

Для нахождения оси $\max$ и ось x_c ($I_{x_c} > I_{y_c}$) поворачиваем против часовой стрелки ($\angle \alpha > 0$) на $\alpha = 21,3^\circ$.

Находим значения главных центральных моментов инерции:

$$I_{\max, \min} = \frac{I_{x_c} + I_{y_c}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(I_{x_c} - I_{y_c})^2 + 4 \cdot I_{x_c y_c}^2} = \frac{4309 + 1151}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(4309 - 1151)^2 + 4 \cdot (-1455)^2} = 2730 \pm 2147, \quad I_{\max} = 4877 \text{ см}^4, \quad I_{\min} = 583 \text{ см}^4.$$

Проверкой нам служит соблюдение равенства

$$I_{x_c} + I_{y_c} = I_{\max} + I_{\min} = \text{const}; \quad 4309 + 1151 = 4877 + 583; \quad 5460 = 5460.$$

Задача 4

Для балки, изображенной на рис. 4.1, а, требуется:

- 1) построить эпюры поперечных сил Q_y и изгибающих моментов M_x , найти $M_x^{\max}$;
- 2) подобрать прямоугольное ($h:b=2$), кольцевое ($d_{\text{внутр}}:d_{\text{внешн}}=0,8$) и двутавровое поперечное сечение при $[\sigma]=160$ МПа;
- 3) выбрать наиболее рациональное сечение по расходу материала.

Для деревянной балки круглого поперечного сечения (рис. 4.1, б) требуется:

- 1) построить эпюры Q_y и M_x , найти $M_x^{\max}$;
- 2) подобрать диаметр сечения при $[\sigma]=8$ МПа;
- 3) построить эпюру прогибов при $E=12$ ГПа (по 3 ординатам на каждом участке).

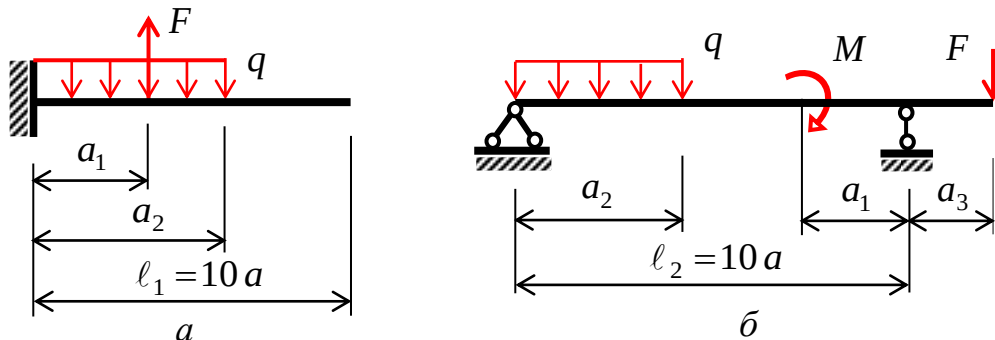


Рис. 4.1

Решение

Пусть последние три цифры номера зачетной книжки – 786. Ставим им в соответствие первые три буквы русского алфавита. Получаем $a = 7$, $b = 8$, $v = 6$. Данные берем из табл. 4 методических указаний. Таким образом, имеем: схема № 6 (рис. 4.1), $\ell_1 = 1,8 \text{ м}$, $\ell_2 = 6 \text{ м}$, $a_1/a = 7$, $a_2/a = 8$, $a_3/a = 1$, $M = 7 \text{ кН} \cdot \text{м}$, $F = 8 \text{ кН}$, $q = 6 \text{ кН/м}$.

Задача 4.1, а

В нашем случае $\ell_1 = 1,8 \text{ м} = 10a$, следовательно $a = 0,18 \text{ м}$. При этом $a_1 = 7a = 1,26 \text{ м}$, $a_2 = 8a = 1,44 \text{ м}$. Расчетная схема балки, соответствующая исходным данным, показана на рис. 4.2, а.

Приложенные к балке внешние нагрузки разделяют ее длину на три участка и вызывают в защемлении опорную реакцию R_0 и опорный момент M_0 . Определяем их значения, используя условия равновесия сил, действующих на консоль (рис. 4.2, а):

$$\sum F_y = 0, R_0 + 8 - 6 \cdot 1,44 = 0, R_0 = 0,64 \text{ кН};$$

$$\sum m_0 = 0, M_0 - 8 \cdot 1,26 + 6 \cdot 1,44 \cdot 0,72 = 0, M_0 = 3,86 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Если опорные реакции R_0 и M_0 найдены верно, то любое другое уравнение равновесия должно тождественно удовлетвориться:

$$\sum m_1 = 0, M_0 + R_0 \cdot 1,26 - 6 \cdot 1,44 \cdot 0,54 = 0, \quad 0 = 0.$$

Для определения Q_y и M_x на участках балки методом сечений воспользуемся скользящей системой координат. Напомним, что положительный изгибающий момент растягивает нижние волокна, и ординаты *эп.* M_x откладываются на них. Положительная поперечная сила вращает оставленную часть консоли по часовой стрелке, и ординаты *эп.* Q_y откладываются вверх от оси *эпюры*.

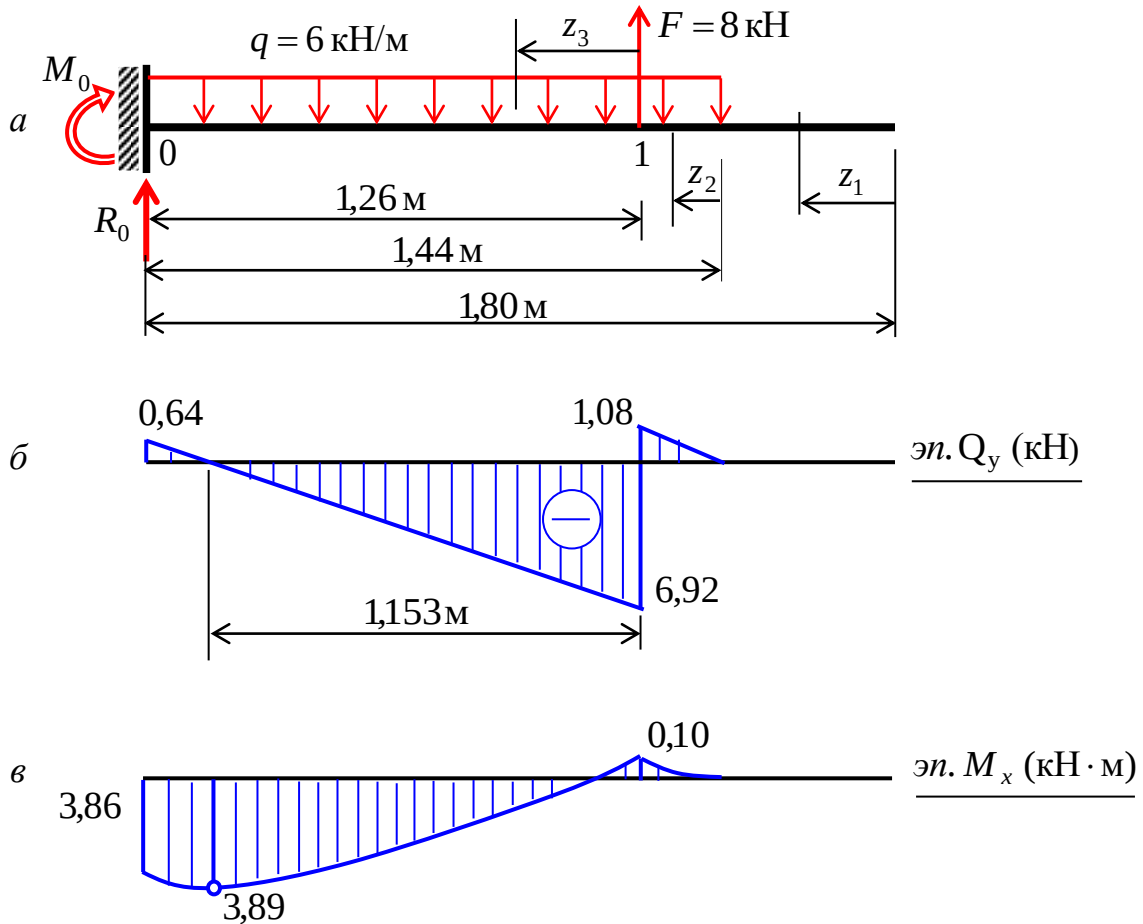


Рис. 4.2

Итак, имеем:

участок № 1 ($0 \leq z_1 \leq 0,36$ м) $Q_1 = 0$, $M_1 = 0$;

участок № 2 ($0 \leq z_2 \leq 0,18$ м) $Q_2 = 6 \cdot z_2$, $M_2 = -\frac{6 \cdot z_2^2}{2} = -3 \cdot z_2^2$;

$Q_2(0,18) = 1,08$ кН; $M_2(0,18) = 0,10$ кН·м;

участок № 3 ($0 \leq z_3 \leq 1,26$ м) $Q_3 = -8 + 6 \cdot (0,18 + z_3) = -6,92 + 6 \cdot z_3$,

$Q_3 = 0$ или $-6,92 + 6 \cdot z_3^0 = 0$ при $z_3^0 = 1,153$ м, $Q_3(1,26) = 0,64$ кН,

$M_3 = 8 \cdot z_3 - 6 \cdot (0,18 + z_3) \cdot \frac{(0,18 + z_3)}{2} = -3 \cdot z_3^2 + 6,92 \cdot z_3 - 0,10$;

$M_3(1,153) = 3,89$ кН·м; $M_3(1,26) = 3,86$ кН·м.

Так как между Q_y и M_x существует дифференциальная зависимость ($Q_y = \frac{dM_x}{dz}$), то в сечении где поперечная сила $Q_y = 0$ (см. рис. 4.2, б), изгибающий момент M_x принимает экстремальное значение.

По эпюре M_x (см. рис. 4.2, в) устанавливаем опасное сечение и значение расчетного момента в нем ($M_{\max} = 3,89$ кН·м).

Записываем условие прочности по нормальным напряжениям и определяем требуемое численное значение осевого момента сопротивления W_x :

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma], \quad \frac{M_{\max}}{W_x} \leq [\sigma], \quad \frac{3,89 \cdot 10^3}{W_x} \leq 160 \cdot 10^6, \quad W_x \geq 24,3 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3.$$

Рассмотрим прямоугольное сечение (рис. 4.3, а). Осевой момент сопротивления будет равен ($h = 2 \cdot b$)

$$W_x = \frac{I_x}{y_{\max}} = \frac{bh^3}{12} \cdot \frac{2}{h} = \frac{bh^2}{6} = \frac{b \cdot (2b)^2}{6} = \frac{2b^3}{3}, \quad \frac{2b^3}{3} \geq 24,3 \cdot 10^{-6},$$

$$\text{отсюда } b = 3,3 \cdot 10^{-2} \text{ м}, \quad A = bh = 2b^2 = 22 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

Рассмотрим кольцевое сечение (рис. 4.3, б). Осевой момент сопротивления будет равен

$$W_x = \frac{I_x}{y_{\max}} = \frac{\pi \cdot d^4}{64} \cdot (1 - \alpha^4) \cdot \frac{2}{d} = \frac{\pi \cdot d^3}{32} \cdot (1 - \alpha^4), \quad \text{где } \alpha = \frac{d_{\text{внутр}}}{d_{\text{внешн}}} = 0,8;$$

$$\frac{\pi \cdot d^3}{32} \cdot (1 - 0,8^4) \geq 24,3 \cdot 10^{-6}, \quad \text{отсюда} \quad d = 7,5 \cdot 10^{-2} \text{ м}. \quad \text{Тогда}$$

$$A = \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot (1 - 0,8^2) = \frac{\pi \cdot 0,075^2}{4} \cdot (1 - 0,8^2) = 15,9 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

Рассмотрим двутавровое сечение (рис. 4.3, в). По сортаменту (см. табл. П2 прил.) ближайшее большее значение W_x будет у двутавра №10 с $W_x = 39,7 \text{ см}^3 = 39,7 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3$ и площадью поперечного сечения $A = 12 \text{ см}^2 = 12 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$.

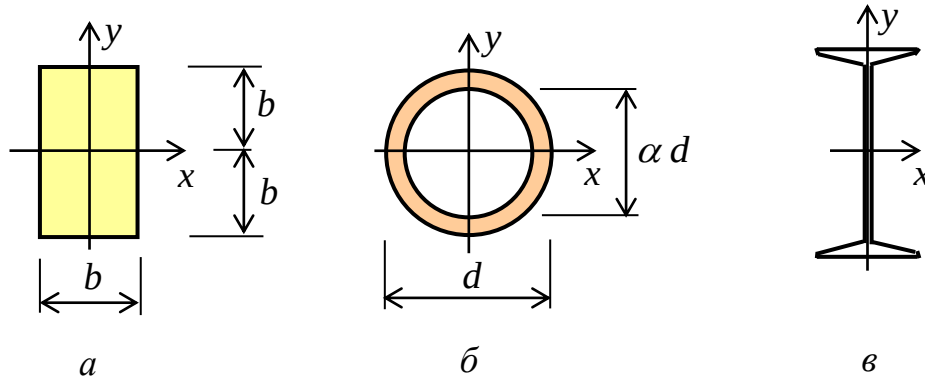


Рис. 4.3

Самым экономичным с точки зрения расхода материала будет двутавровое сечение, так как у него площадь поперечного сечения оказалась наименьшей.

Задача 4.1, б

В нашем случае $\ell_2 = 6 \text{ м} = 10a$, следовательно, $a = 0,6 \text{ м}$. При этом $a_1 = 7a = 4,2 \text{ м}$, $a_2 = 8a = 4,8 \text{ м}$, $a_3 = a = 0,6 \text{ м}$. Расчетная схема деревянной балки, соответствующая исходным данным, показана на рис. 4.4.

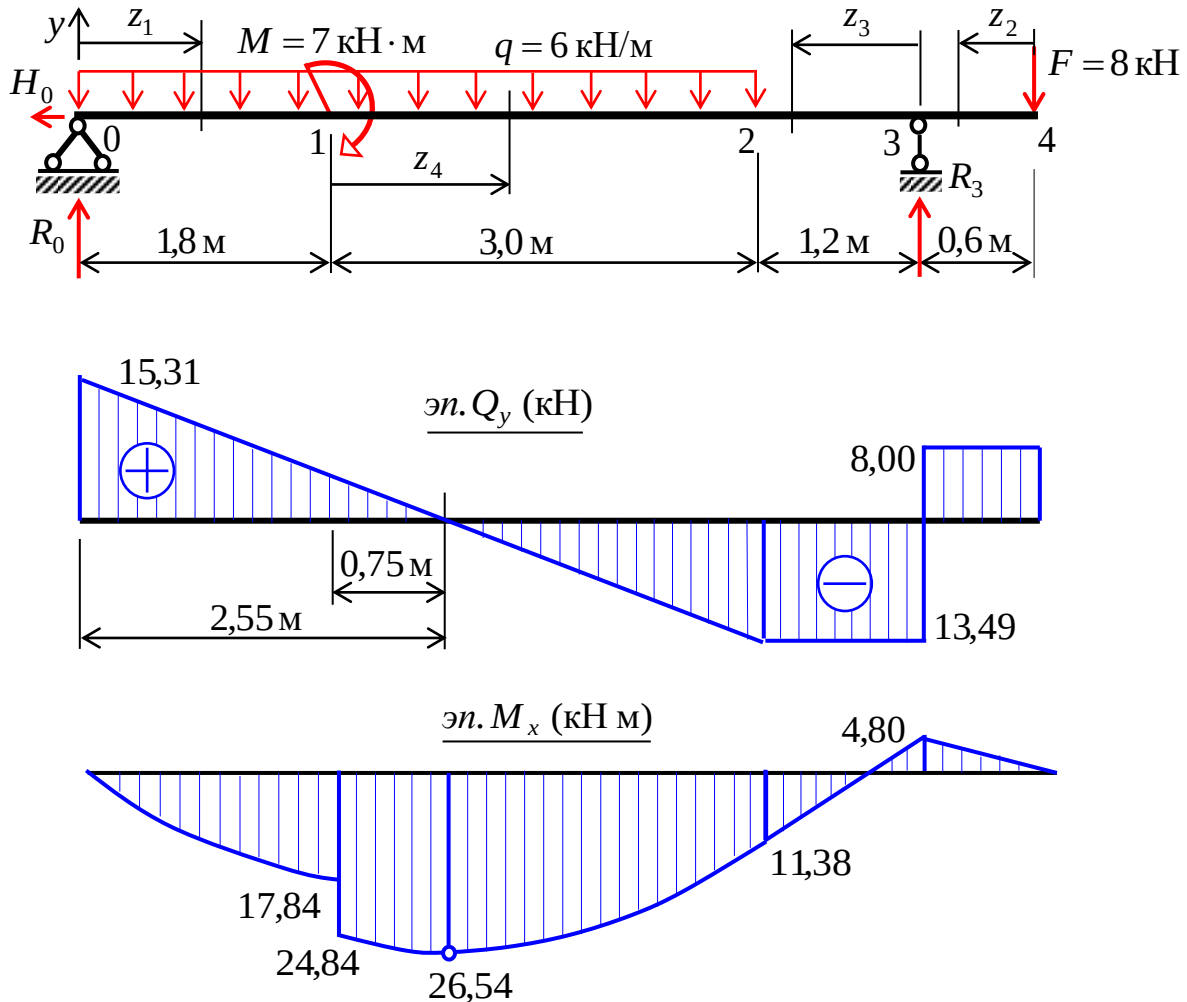


Рис. 4.4

Приложенные к балке три вида нагрузок разделяют ее длину на четыре участка (0–1, 1–2, 2–3, 3–4) и вызывают в опорах балки реакции H_0 , R_0 и R_3 , которые определяем из следующих уравнений равновесия:

$$\Sigma F_z = 0, \quad H_0 = 0;$$

$$\Sigma M_3 = 0, \quad R_0 \cdot 6 + 8 \cdot 0,6 + 7 - 6 \cdot 4,8 \cdot 3,6 = 0, \quad R_0 = 15,31 \text{ кН};$$

$$\Sigma M_0 = 0, \quad R_3 \cdot 6 - 8 \cdot 6,6 - 7 - 6 \cdot 4,8 \cdot 2,4 = 0, \quad R_3 = 21,49 \text{ кН};$$

$$\text{Проверка: } \Sigma F_y = 0, \quad R_0 + R_3 - 8 - 6 \cdot 4,8 = 0, \quad 0 = 0.$$

Определим на участках балки Q_y и M_x :

участок № 1 ($0 \leq z_1 \leq 1,8$ м) $Q_1 = 15,31 - 6 \cdot z_1$, $M_1 = 15,31 \cdot z_1 - 6 \cdot \frac{z_1^2}{2}$,

$Q_1(1,8) = 4,51$ кН, $M_1(1,8) = 17,84$ кН·м, $M_1(0,9) = 11,35$ кН·м;

участок № 2 ($0 \leq z_2 \leq 0,6$ м) $Q_2 = 8$ кН, $M_2 = -8 \cdot z_2$, $M_2(0,6) = -4,8$ кН·м;

участок № 3 ($0 \leq z_3 \leq 1,2$ м) $M_3 = 21,49 \cdot z_3 - 8 \cdot (z_3 + 0,6) = 13,49 \cdot z_3 - 4,8$,

$Q_3 = 8 - 21,49 = -13,49$ кН, $M_3(1,2) = 11,38$ кН·м;

участок № 4 ($0 \leq z_4 \leq 3$ м) $Q_4 = 15,31 - 6 \cdot (z_4 + 1,8) = 4,51 - 6 \cdot z_4$, $Q_4 = 0$ при

$z_4^0 = 0,75$ м, $M_4 = 15,31 \cdot (z_4 + 1,8) + 7 - 6 \cdot \frac{(z_4 + 1,8)^2}{2}$, $Q_4(3,0) = -13,49$ кН,

$M_4(0) = 24,84$ кН·м, $M_4(0,75) = 26,54$ кН·м, $M_4(3,0) = 11,38$ кН·м.

По полученным в характерных сечениях значениям Q_y и M_x строим эпюры Q_y и M_x (см. рис. 4.4). По эпюре M_x устанавливаем опасное сечение и значение расчетного момента в нем ($M_{\max} = 26,54$ кН·м).

Искомый диаметр балки находим из условия прочности по нормальным напряжениям:

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma], \quad \frac{M_{\max}}{W_x} \leq [\sigma], \quad W_x = \frac{\pi \cdot d^3}{32}, \quad \frac{26,54 \cdot 10^3}{\pi \cdot d^3} \cdot 32 \leq 8 \cdot 10^6, \quad d = 0,323 \text{ м},$$

$$EI_x = 12 \cdot 10^9 \cdot \frac{\pi \cdot 0,323^4}{64} = 6,436 \text{ МН} \cdot \text{м}^2.$$

Прогибы характерных сечений деревянной балки определим методом начальных параметров. Начало координат совмещаем с левым крайним сечением балки (рис. 4.5). По условию задачи начальный прогиб v_0 равен нулю ($v_0 = 0$). Уравнение метода начальных параметров на различных участках принимает следующий вид:

на первом участке ($0 \leq z_1 \leq 1,8$ м)

$$EI_x v_y = EI_x \cdot \varphi_0 \cdot z_1 + EI_x \cdot v_0 + 15,31 \cdot \frac{z_1^3}{6} - 6 \cdot \frac{z_1^4}{24}, \quad \text{где } EI_x \cdot v_0 = 0,$$

на втором участке ($1,8 \leq z_2 \leq 4,8$ м)

$$EI_x v_y = EI_x \cdot \varphi_0 \cdot z_2 + 15,31 \cdot \frac{z_2^3}{6} - 6 \cdot \frac{z_2^4}{24} + 7 \cdot \frac{(z_2 - 1,8)^2}{2},$$

на третьем участке ($4,8 \leq z_3 \leq 6,0$ м)

$$EI_x v_y = EI_x \cdot \varphi_0 \cdot z_3 + 15,31 \cdot \frac{z_3^3}{6} - 6 \cdot \frac{z_3^4}{24} + 7 \cdot \frac{(z_3 - 1,8)^2}{2} + 6 \cdot \frac{(z_3 - 4,8)^4}{24},$$

на четвертом участке ($6,0 \leq z_4 \leq 6,6$ м)

$$EI_x v_y = EI_x \cdot \varphi_0 \cdot z_4 + 15,31 \cdot \frac{z_4^3}{6} - 6 \cdot \frac{z_4^4}{24} + 7 \cdot \frac{(z_4 - 1,8)^2}{2} + 6 \cdot \frac{(z_4 - 4,8)^4}{24} + 21,49 \cdot \frac{(z_4 - 6,0)^3}{6}.$$

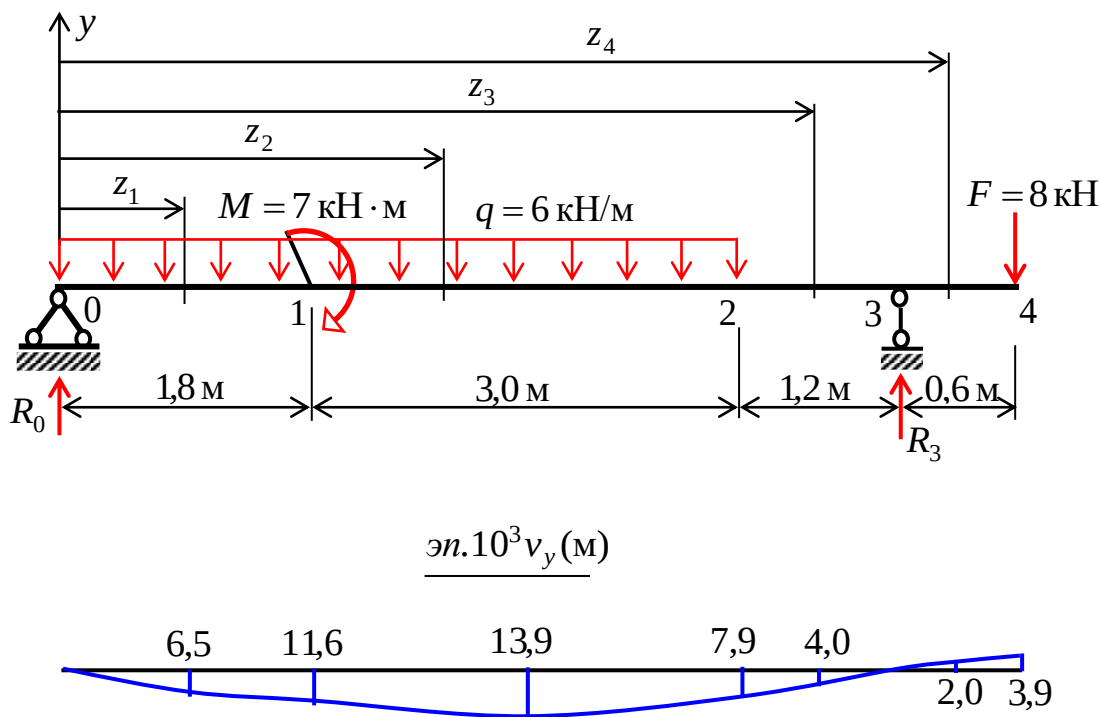


Рис. 4.5

Второй начальный параметр (начальный угол поворота φ_0) найдем из условия равенства нулю прогиба опорного сечения 3 ($v_y(z_3 = 6) = 0$):

$$EI_x v_y(z_3 = 6) = EI_x \cdot \varphi_0 \cdot z_3 + 15,31 \cdot \frac{z_3^3}{6} - 6 \cdot \frac{z_3^4}{24} + 7 \cdot \frac{(z_3 - 1,8)^2}{2} + 6 \cdot \frac{(z_3 - 4,8)^4}{24} = 0, \quad EI_x \cdot \varphi_0 = -48,256.$$

Вычислим прогиб посередине второго участка:

$$\begin{aligned} v_y(z_2 = 3,3 \text{ м}) &= \varphi_0 \cdot z_2 + \frac{1}{EI_x} \cdot \left(15,31 \cdot \frac{z_2^3}{6} - 6 \cdot \frac{z_2^4}{24} + 7 \cdot \frac{(z_2 - 1,8)^2}{2} \right) = \\ &= \frac{10^3}{6,436 \cdot 10^6} \cdot (-48,256 \cdot 3,3 + 15,31 \cdot \frac{3,3^3}{6} - 6 \cdot \frac{3,3^4}{24} + 7 \cdot \frac{(3,3 - 1,8)^2}{2}) = \\ &= 13,9 \cdot 10^{-3} \text{ м}. \end{aligned}$$

Остальные прогибы по краям и посередине всех четырех участков вычисляем аналогичным способом. Эпюра прогибов приведена на рис. 4.5.

Задача 5

Чугунный короткий стержень, поперечное сечение которого изображено на рис. 5.1, сжимается продольной силой F , приложенной в точке A . Требуется:

- 1) вычислить наибольшее растягивающее и наибольшее сжимающее напряжения в поперечном сечении, выразив эти напряжения через F и размеры сечения;
- 2) найти допускаемую нагрузку F при заданных размерах сечения и допускаемых напряжениях для чугуна на сжатие $[\sigma_c]$ и на растяжение $[\sigma_p]$.

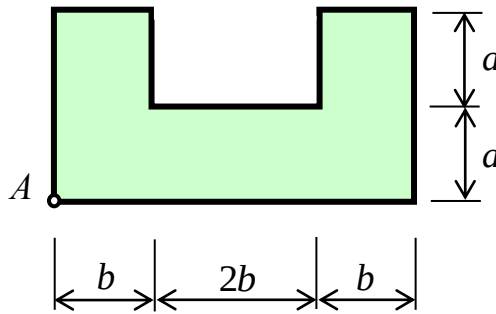


Рис. 5.1

Решение

Пусть последние три цифры номера зачетной книжки – 653. Ставим им в соответствие первые три буквы русского алфавита. Получаем $a = 6$, $b = 5$, $v = 3$. Данные берем из табл. 5 методических указаний. Таким образом, имеем: схему № 3 (см. рис. 5.1), $a = 6$ см, $b = 5$ см, $[\sigma_c] = 60$ МПа, $[\sigma_p] = 25$ МПа.

Поперечное сечение имеет одну ось симметрии, которая является главной центральной осью. Сложное сечение представим в виде двух простых фигур, причем вторую в виде прямоугольного выреза с отрицательной площадью: $A = A_1 + A_2 = 12 \cdot 20 + (-6 \cdot 10) = 180 \text{ см}^2 = 180 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$.

Положение центра тяжести сечения относительно оси x_1 (рис. 5.2):

$$y_c = \frac{\sum S_{x_1}}{\sum A} = \frac{S_{x_1}^{(1)} + S_{x_1}^{(2)}}{A_1 + A_2} = \frac{A_1 \cdot y_1 + A_2 \cdot y_2}{A_1 + A_2} = \frac{240 \cdot 0 + (-60) \cdot 3}{180} = -1 \text{ см}.$$

Здесь y_1 и y_2 – расстояния от оси x_1 до центров тяжести простых фигур. Вторая главная центральная ось x пройдет перпендикулярно к оси симметрии y и через найденный центр тяжести сечения. Величины главных центральных моментов инерции сложного сечения:

$$I_y = I_y^{(1)} - I_y^{(2)} = \frac{h_1 b_1^3}{12} - \frac{h_2 b_2^3}{12} = \frac{12 \cdot 20^3}{12} - \frac{6 \cdot 10^3}{12} = 7500 \text{ см}^4 = 0,75 \cdot 10^{-4} \text{ м}^4,$$

$$I_x = I_x^{(1)} + a_1^2 \cdot A_1 - (I_x^{(2)} + a_2^2 \cdot A_2) = \frac{b_1 h_1^3}{12} + a_1^2 \cdot A_1 - \frac{b_2 h_2^3}{12} - a_2^2 \cdot A_2 =$$

$$= \frac{20 \cdot 12^3}{12} + 1^2 \cdot 240 - \frac{10 \cdot 6^3}{12} + 4^2 \cdot (-60) = 1980 \text{ cM}^4 = 0,198 \cdot 10^{-4} \text{ M}^4.$$

Здесь a_1 и a_2 – расстояния от главной центральной оси x до центров тяжести простых фигур. Определим внутренние силовые факторы – продольную силу и два изгибающих момента относительно главных центральных осей:

$$N_z = -F, \quad M_x = F \cdot 0,05, \quad M_y = F \cdot 0,10 .$$

Тогда уравнение нулевой линии, записанное в координатных осях y и x с учетом знаков напряжений и текущих координат в четверти, принимает следующий вид: $\sigma = 0$, где

$$\sigma = -\frac{N_z}{A} + \frac{M_x}{I_x} \cdot y + \frac{M_y}{I_y} \cdot x = -\frac{F}{180 \cdot 10^{-4}} + \frac{F \cdot 0,05}{1980 \cdot 10^{-8}} \cdot y + \frac{F \cdot 0,10}{7500 \cdot 10^{-8}} \cdot x, \quad \text{или}$$

после приведения подобных членов имеем $y + 0,528 \cdot x - 0,022 = 0$.

Положение нулевой линии показано на рис. 5.2, из которого видно, что наиболее удаленные точки от нулевой линии в сжатой и растянутой областях будут соответственно точки A и B , т. е. точки, в окрестностях которых возникают наибольшие напряжения.

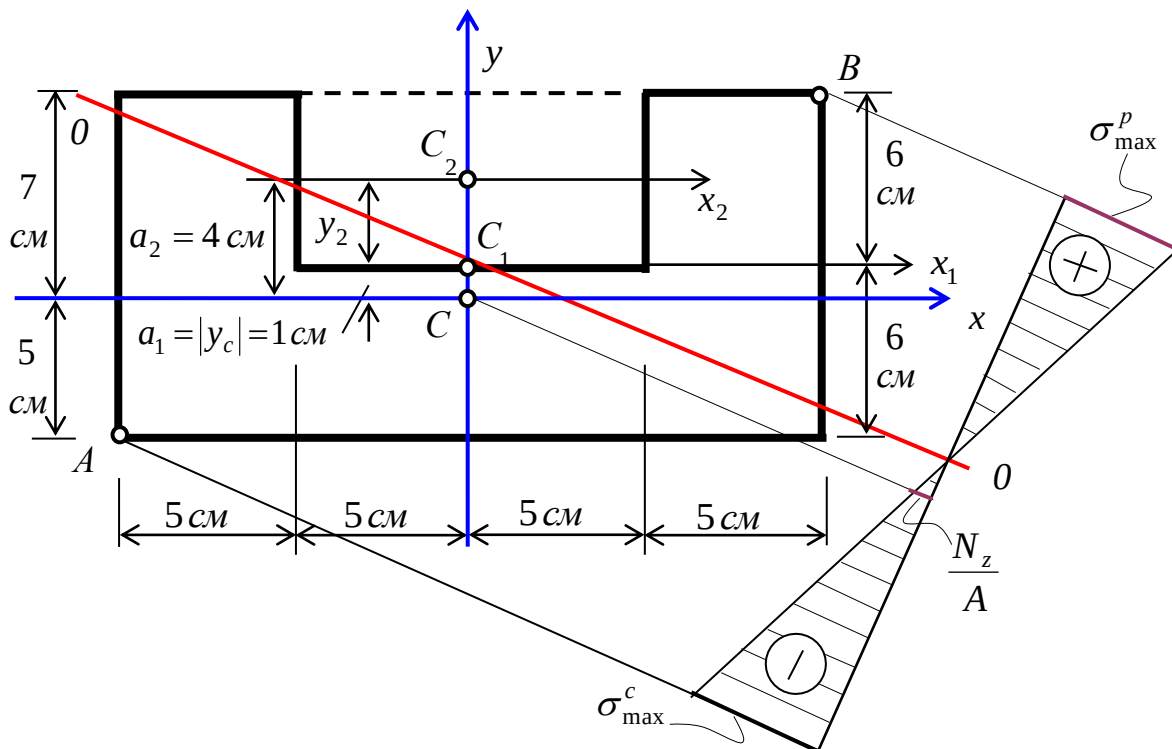


Рис. 5.2

Наибольшие сжимающие и наибольшие растягивающие напряжения в поперечном сечении будут равны

$$\sigma_{\max}^c = \sigma_A = -\frac{F}{180 \cdot 10^{-4}} - \frac{F \cdot 0,05}{0,198 \cdot 10^{-4}} \cdot 0,05 - \frac{F \cdot 0,10}{0,75 \cdot 10^{-4}} \cdot 0,10 = -315,15 \cdot F \quad ,$$

$$\sigma_{\max}^p = \sigma_B = -\frac{F}{180 \cdot 10^{-4}} + \frac{F \cdot 0,05}{0,198 \cdot 10^{-4}} \cdot 0,05 + \frac{F \cdot 0,10}{0,75 \cdot 10^{-4}} \cdot 0,10 = 254,54 \cdot F.$$

Допускаемую нагрузку F находим из условий прочности для самых напряженных точек A и B (сжимающие напряжения сравниваем по модулю):

$$\sigma_{\max}^c \leq [\sigma_c], \quad 315,15 \cdot F \leq 60 \cdot 10^6, \quad F_c \leq 190,4 \text{ кН},$$

$$\sigma_{\max}^p \leq [\sigma_p], \quad 254,54 \cdot F \leq 25 \cdot 10^6, \quad F_p \leq 98,2 \text{ кН}.$$

За окончательное значение допускаемой нагрузки принимаем наименьшее из двух определенных выше значений нагрузки: $F = 98,2 \text{ кН}$.

Задача 6

На рис. 6.1 изображена в аксонометрии ось ломаного стержня круглого поперечного сечения, расположенная в горизонтальной плоскости. Участки стержня образуют прямые углы. Требуется:

- 1) построить отдельно (в аксонометрии) эпюры изгибающих и крутящих моментов;
- 2) для каждого участка определить вид сопротивления и записать условие прочности (использовать четвертую гипотезу прочности).

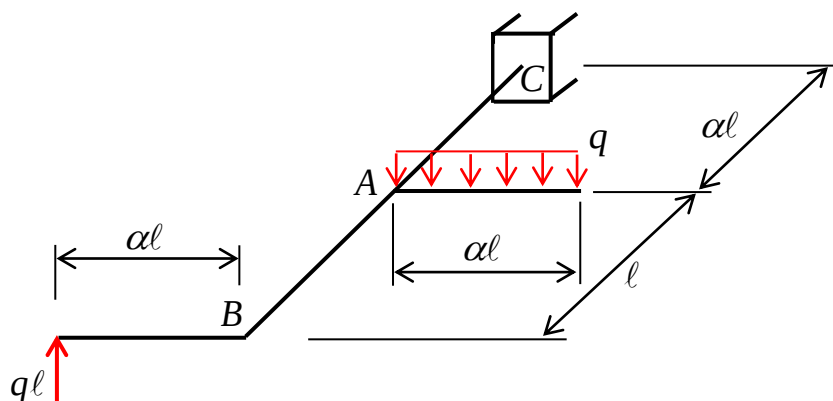


Рис. 6.1

Решение

Пусть последние три цифры номера зачетной книжки – 239. Ставим им в соответствие первые три буквы русского алфавита. Получаем $a = 2$, $b = 3$, $v = 9$. Данные берем из табл. 6 методических указаний. Таким образом, имеем схему № 3 (см. рис. 6.1), $\alpha = 0,9$.

В пределах каждого участка (в нашем случае их четыре) проведем сечение на расстоянии z_i от начала участка (рис. 6.2). Запишем выражения внутренних силовых факторов, используя метод сечений.

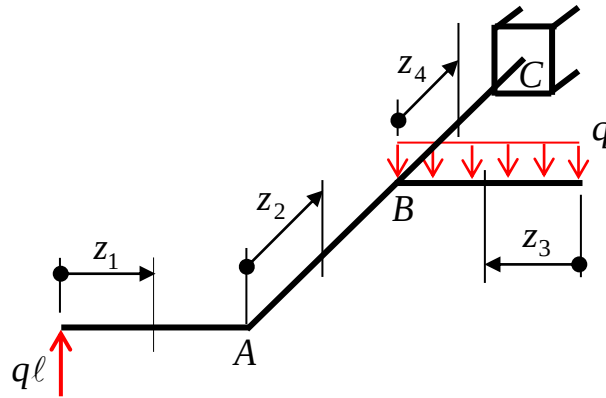


Рис. 6.2

Участок № 1, $0 \leq z_1 \leq 0,9\ell$

$$M_u(z_1) = q\ell \cdot z_1, \quad M_u(0) = 0, \quad M_u(0,9\ell) = 0,9q\ell^2, \quad M_{кр}(z_1) = 0.$$

Участок № 2, $0 \leq z_2 \leq \ell$

$$M_u(z_2) = q\ell \cdot z_2, \quad M_u(0) = 0, \quad M_u(\ell) = q\ell^2, \quad M_{кр}(z_2) = 0,9q\ell^2.$$

Участок № 3, $0 \leq z_3 \leq 0,9\ell$

$$M_u(z_3) = -qz_3 \cdot \frac{z_3}{2}, \quad M_u(0) = 0, \quad M_u(0,9\ell) = -0,405q\ell^2, \quad M_{кр}(z_3) = 0.$$

Участок № 4, $0 \leq z_4 \leq 0,9\ell$

$$M_u(z_4) = q\ell \cdot (\ell + z_4) - q \cdot 0,9\ell \cdot z_4 = 0,1 \cdot q\ell \cdot z_4 + q\ell^2, \quad M_u(0) = q\ell^2,$$

$$M_u(0,9\ell) = 1,09q\ell^2, \quad M_{кр}(z_4) = q\ell \cdot 0,9\ell + 0,9q\ell \cdot 0,45\ell = 1,305q\ell^2.$$

По полученным выражениям M_u и $M_{кр}$ на каждом участке строим эпюры изгибающих и крутящих моментов (рис. 6, 3).

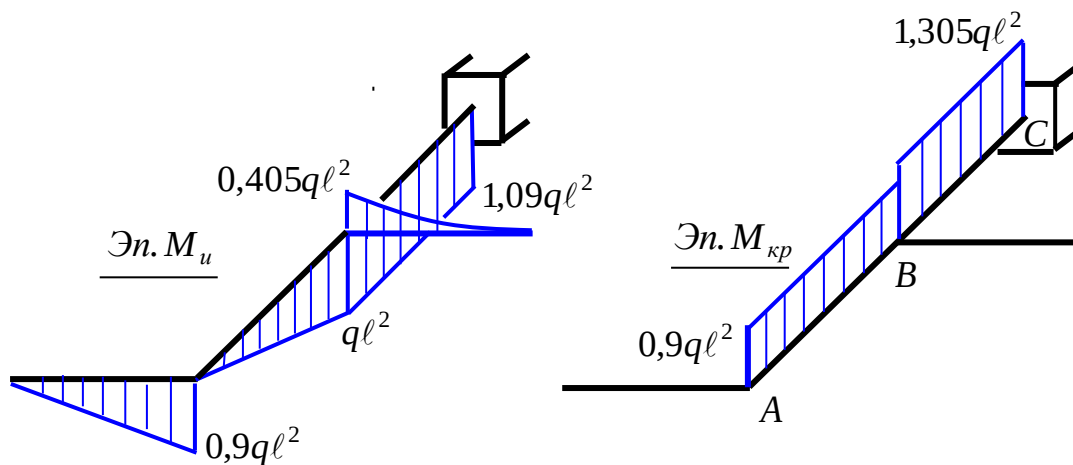


Рис. 6.3

Видно, что на первом и третьем участках ломаного стержня имеет место прямой поперечный изгиб. Условие прочности будет

$\sigma_{\max} \leq [\sigma], \frac{M_{\text{изг}}^{\max}}{W_x} \leq [\sigma], W_x = \frac{\pi \cdot d^3}{32}$, где на первом участке $M_{\text{изг}}^{\max} = 0,9 ql^2$, на третьем участке имеем $M_{\text{изг}}^{\max} = 0,405 ql^2$.

На втором и четвертом участках ломаный стержень испытывает изгиб с кручением. Условие прочности по четвертой гипотезе прочности будет выглядеть следующим образом:

$$\sigma_{\text{расч}}^{(IV)} \leq [\sigma], \frac{M_{\text{расч}}^{IV}}{W_x} \leq [\sigma], M_{\text{расч}}^{IV} = \sqrt{(M_{\text{изг}}^{\max})^2 + 0,75 \cdot (M_{\text{кр}}^{\max})^2}.$$

Таким образом, на втором участке $M_{\text{расч}}^{IV} = ql^2 \cdot \sqrt{(1)^2 + 0,75 \cdot (0,9)^2} = 1,268 \cdot ql^2$, на четвертом участке $M_{\text{расч}}^{IV} = ql^2 \cdot \sqrt{(1,09)^2 + 0,75 \cdot (1,305)^2} = 1,570 \cdot ql^2$.

Задача 7

Шкив с диаметром D_1 и с углом наклона ветвей ремня к горизонту α_1 вращается со скоростью n оборотов в минуту и передает мощность N кВт. Два других шкива имеют одинаковые диаметры D_2 и одинаковые углы наклона ветвей ремня к горизонту α_2 , и каждый из них передает мощность $N/2$ (рис. 7.1). Требуется:

- 1) определить моменты, приложенные к шкивам, по заданным величинам N и n ;
- 2) построить эпюру крутящих моментов M_z ;
- 3) определить окружные усилия t_1 и t_2 , действующие на шкивы, по найденным крутящим моментам и заданным диаметрам шкивов D_1 и D_2 ;
- 4) определить давления на вал, принимая их равными трем окружным усилиям;
- 5) определить силы, изгибающие вал в горизонтальной и вертикальной плоскостях (вес шкивов и вала не учитывать);
- 6) построить эпюры изгибающих моментов от горизонтальных сил M_y и от вертикальных сил M_x ;
- 7) вычислить значения суммарных изгибающих моментов, пользуясь формулой $M_u = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}$, и построить развертку эпюры суммарного изгибающего момента на плоскость, откладывая все ординаты в одну сторону от оси вала (при построении развертки эпюры надо учесть, что для некоторых участков вала она не будет прямолинейной);
- 8) при помощи эпюр M_z (см. п. 2) и M_u (см. п. 7) найти опасное сечение и определить величину максимального расчетного момента (по третьей теории прочности);

9) подобрать диаметр вала d при $[\sigma] = 70 \text{ МПа}$ и округлить его величину (см. задачу 2).

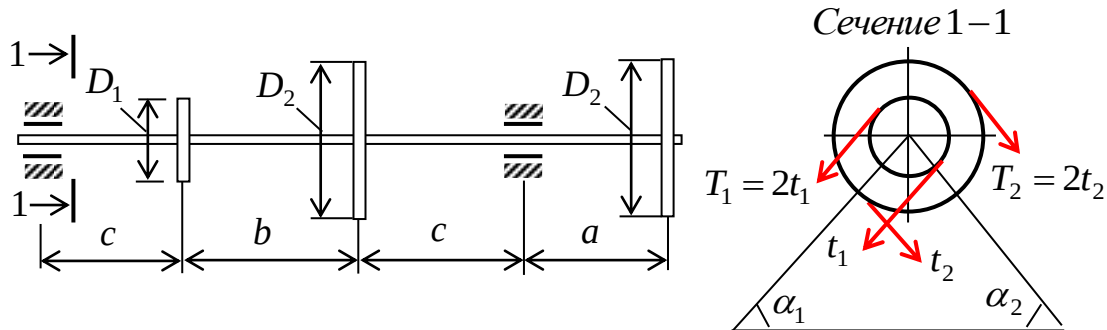


Рис. 7.1

Решение

Пусть последние три цифры номера зачетной книжки – 365. Ставим им в соответствие первые три буквы русского алфавита. Получаем $a = 3$, $b = 6$, $c = 5$. Данные берем из табл. 7 методических указаний. Таким образом, имеем схему № 5 (см. рис. 7.1), $N = 60 \text{ кВт}$, $n = 500 \text{ об/мин}$, $D_1 = 0,6 \text{ м}$, $D_2 = 1,5 \text{ м}$, $a = 1,3 \text{ м}$, $b = 0,6 \text{ м}$, $c = 1,5 \text{ м}$, $\alpha_1^\circ = 60^\circ$, $\alpha_2^\circ = 50^\circ$.

Крутящие моменты в сечениях вала под шкивами:

$$M_{\kappa 1} = \frac{30 \cdot N(\text{кВт})}{\pi \cdot n(\text{об/мин})} = \frac{30 \cdot 60}{\pi \cdot 500} = 1,146 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad M_{\kappa 2} = \frac{30 \cdot 30}{\pi \cdot 500} = 0,573 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Соответствующие этим крутящим моментам окружные усилия t_1 и t_2 определим из следующих формул:

$$M_{\kappa 1} = (T_1 - t_1) \cdot \frac{D_1}{2} = (2t_1 - t_1) \cdot \frac{D_1}{2} = t_1 \cdot \frac{D_1}{2}, \quad \text{аналогично имеем } M_{\kappa 2} = t_2 \cdot \frac{D_2}{2}, \quad \text{отсюда}$$

$$t_1 = \frac{2M_{\kappa 1}}{D_1} = \frac{2 \cdot 1,146}{0,6} = 3,820 \text{ кН}, \quad t_2 = \frac{2M_{\kappa 2}}{D_2} = \frac{2 \cdot 0,573}{1,5} = 0,764 \text{ кН}.$$

Тогда приведенное к центру вала давление на вал в местах насадки шкивов будет равно

$$F_1 = 3 \cdot t_1 = 3 \cdot 3,820 = 11,460 \text{ кН}, \quad F_2 = 3 \cdot t_2 = 3 \cdot 0,764 = 2,292 \text{ кН}.$$

Горизонтальные и вертикальные составляющие давления на вал, вызывающие изгиб вала в соответствующих плоскостях, определяются следующим образом:

$$F_{1x} = -F_1 \cos 60^\circ = -11,460 \cdot 0,500 = -5,730 \text{ кН},$$

$$F_{2x} = F_2 \cos 50^\circ = 2,292 \cdot 0,643 = 1,473 \text{ кН},$$

$$F_{1y} = -F_1 \sin 60^\circ = -11,460 \cdot 0,866 = -9,924 \text{ кН},$$

$$F_{2y} = -F_2 \sin 50^\circ = -2,292 \cdot 0,766 = -1,756 \text{ кН}.$$

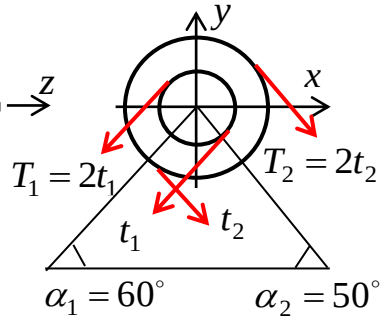


Рис. 7.2

Расчетная схема представляет собой балку, установленную на двух шарнирных опорах и нагруженную сосредоточенными скручивающими моментами и сосредоточенными поперечными силами в вертикальной и горизонтальной плоскостях (рис. 7.2).

Строим эпюры крутящих и изгибающих моментов. Для совмещения горизонтальной плоскости xoz (плоскость $эн. M_y$) с плоскостью страницы повернем на 90° координатные оси $уох$ относительно оси z .

Вычисляем значения суммарного изгибающего момента в характерных сечениях вала по формуле $M_{изг} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}$.

$$M_{изг}^{(1)} = \sqrt{8,83^2 + 4,89^2} = 10,09 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad M_{изг}^{(2)} = \sqrt{6,41^2 + 3,41^2} = 7,26 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{изг}^{(3)} = \sqrt{2,28^2 + 1,92^2} = 2,98 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Из эпюр $M_{кр}$ и $M_{изг}$ видно, что опасным является сечение 1, для которого $M_{кр}^{\max} = 1,146 \text{ кН} \cdot \text{м}$ и $M_{изг}^{\max} = 10,09 \text{ кН} \cdot \text{м}$.

Для этого сечения вычисляем расчетный момент, используя третью теорию прочности. Получим

$$M_{расч}^{(3)} = \sqrt{(M_{изг}^{\max})^2 + (M_{кр}^{\max})^2} = \sqrt{10,09^2 + 1,146^2} = 10,16 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Из условия прочности вычисляем диаметр вала

$$\sigma_{расч}^{(3)} \leq [\sigma], \quad \frac{M_{расч}^{(3)}}{W_x} \leq [\sigma], \quad W_x = \frac{\pi \cdot d^3}{32}, \quad \frac{10,16 \cdot 10^3}{\pi \cdot d^3} \cdot 32 \leq 70 \cdot 10^6, \quad d \geq 0,114 \text{ м}.$$

Округлив значение диаметра (см. задачу 2), получим $d = 125 \text{ мм}$.

Задача 8

Стальной стержень (сталь Ст. 3) длиной ℓ сжимается силой F . Требуется:

- 1) найти размеры поперечного сечения при допуске напряжении на простое сжатие $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$ (расчет производить методом последовательных приближений, в первом приближении задавшись коэффициентом $\varphi = 0,5$);
- 2) найти значение критической силы и коэффициента запаса устойчивости.

Решение

Пусть последние три цифры номера зачетной книжки – 048. Ставим им в соответствие первые три буквы русского алфавита. Получаем $a = 0$, $b = 4$, $v = 8$. Данные берем из табл. 8 методических указаний. Таким образом, имеем $F = 1000 \text{ кН}$, $\ell = 2,4 \text{ м}$, схема закрепления концов стержня и форма сечения стержня показаны на рис. 8.1.

Расчет начинаем с вычисления всех необходимых геометрических характеристик поперечного сечения стойки, которые удобно выразить через площадь поперечного сечения A ($b = h = 2d$):

$$A = 4d^2 - \frac{\pi d^2}{4} = 3,215d^2, \quad d^2 = \frac{A}{3,215} = 0,311 \cdot A,$$

$$I_{\min} = I_x = I_y = \frac{bh^3}{12} - \frac{\pi d^4}{64} = \frac{2d \cdot (2d)^3}{12} - \frac{\pi d^4}{64} = 1,284d^4 = 0,124 \cdot A^2.$$

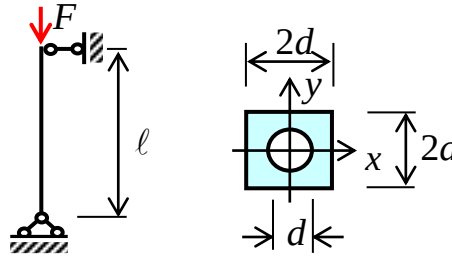


Рис. 8.1

Радиус инерции сечения относительно оси наименьшей жесткости

$$i_{\min} = i_x = i_y = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}} = 0,3525\sqrt{A}.$$

Гибкость стержня

$$\lambda = \frac{\mu \cdot \ell}{i_{\min}} = \frac{1,0 \cdot 2,4}{0,3525\sqrt{A}} = \frac{6,808}{\sqrt{A}},$$

где μ – коэффициент приведения длины стержня, зависящий от условий закрепления стержня (табл. ПЗ прил.).

В условии устойчивости

$$\sigma_y \leq [\sigma_y] \quad \text{или} \quad \frac{F}{A} \leq [\sigma] \cdot \varphi$$

неизвестны величины A и φ , где φ – коэффициент продольного изгиба.

Расчет выполняется методом последовательных приближений, в первом приближении задавшись коэффициентом $\varphi = 0,5$:

$$A \geq \frac{F}{[\sigma] \cdot \varphi_1} = \frac{1000 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6 \cdot 0,5} = 0,0125 \text{ м}^2 = 125 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2,$$

тогда гибкость стержня $\lambda = \frac{6,808}{\sqrt{A}} = \frac{6,808}{\sqrt{125 \cdot 10^{-4}}} \approx 61.$

По табл. П4 прил., используя линейную интерполяцию, находим (рис. 8.2)

$$\varphi_1^* = 0,81 + \frac{0,86 - 0,81}{10} \cdot 9 \approx 0,855.$$

Во втором приближении принимаем $\varphi_2 = \frac{0,5 + 0,855}{2} \approx 0,678$, откуда

$$A \geq 0,0092 \text{ м}^2, \quad \lambda = 71, \quad \varphi_2^* = 0,75 + \frac{0,81 - 0,75}{10} \cdot 9 \approx 0,804.$$

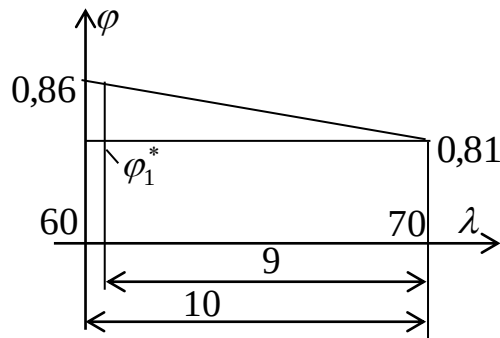


Рис. 8.2

В третьем приближении

$$\varphi_3 = \frac{0,678 + 0,804}{2} \approx 0,741; A \geq 0,0084 \text{ м}^2; \lambda = 74; \varphi_3^* = 0,786.$$

В четвертом приближении $\varphi_4 = 0,764; A \geq 0,0082 \text{ м}^2; \lambda = 75; \varphi_4^* = 0,780.$

В пятом приближении $\varphi_5 = 0,772; A \geq 0,0081 \text{ м}^2; \lambda = 75,6; \varphi_4^* = 0,776.$

Полученное значение φ близко к принятому (лучше, когда отличается на сотую), поэтому проверим выполнение условия устойчивости:

$$\frac{F}{A} \leq [\sigma] \cdot \varphi; \quad \frac{1000 \cdot 10^3}{0,0081} \leq 160 \cdot 10^6 \cdot 0,772; \quad 123,46 \text{ МПа} \leq 123,52 \text{ МПа}.$$

Относительная погрешность между напряжениями составляет

$$\delta_\sigma = \frac{(123,52 - 123,46)}{123,46} \cdot 100 \% \approx 0,05 \%;$$

это меньше одного процента, что допустимо. Принимая $\varphi = 0,772$, получаем

$$A = 0,0081 \text{ м}^2, \quad d = \sqrt{\frac{A}{3,215}} = 0,050 \text{ м}.$$

Для материала стойки (Ст. 3, $E = 200 \text{ ГПа}$, $\sigma_{\text{нц}} = 200 \text{ МПа}$) значение предельной гибкости будет равно

$$\lambda_{\text{пред}} = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{\text{нц}}}} = \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot 200 \cdot 10^9}{200 \cdot 10^6}} \approx 100.$$

Поскольку в нашем случае гибкость стойки меньше предельной ($\lambda = 75,6 < 100$), то величину критической силы определяем по формуле Ясинского ($\sigma_{\text{кр}} = a - b \cdot \lambda$, где для Ст. 3 $a = 310 \text{ МПа}$, $b = 1,14 \text{ МПа}$):

$$F_{\text{кр}} = \sigma_{\text{кр}} \cdot A = (a - b \cdot \lambda) \cdot A = (310 - 1,14 \cdot 75,6) \cdot 10^6 \cdot 0,0081 = 1813 \text{ кН}.$$

Стойка имеет коэффициент запаса устойчивости, равный

$$n_y = F_{\text{кр}} / F = 1813 / 1000 = 1,81.$$

ПРИЛОЖЕНИЕ

Таблица П1. Геометрические характеристики простых фигур

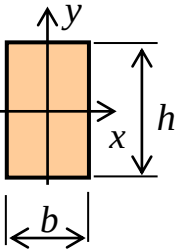
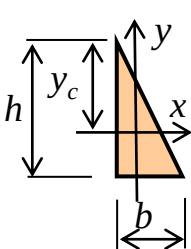
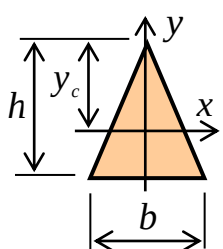
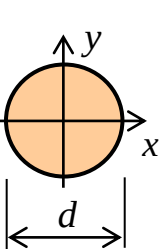
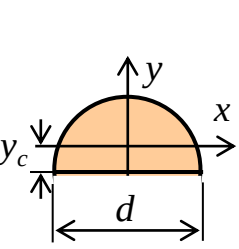
				
$y_c = \frac{1}{2}h$	$y_c = \frac{2}{3}h$	$y_c = \frac{2}{3}h$	$y_c = \frac{1}{2}d$	$y_c = \frac{2d}{3\pi}$
$A = bh$	$A = \frac{bh}{2}$	$A = \frac{bh}{2}$	$A = \frac{\pi d^2}{4}$	$A = \frac{\pi d^2}{8}$
$I_x = \frac{bh^3}{12}$	$I_x = \frac{bh^3}{36}$	$I_x = \frac{bh^3}{36}$	$I_x = \frac{\pi d^4}{64}$	$I_x = 0,11 \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^4$
$I_y = \frac{hb^3}{12}$	$I_y = \frac{hb^3}{36}$	$I_y = \frac{hb^3}{48}$	$I_\rho = \frac{\pi d^4}{32}$	$I_y = \frac{\pi d^4}{128}$

Таблица П2. Площади и моменты сопротивления для двутавровых балок (ГОСТ 8239-89)

Но- мер сече- ния	A, см ²	W _x , см ³	Но- мер сече- ния	A, см ²	W _x , см ³	Но- мер сече- ния	A, см ²	W _x , см ³	Но- мер сече- ния	A, см ²	W _x , см ³
10	12,0	39,7	18	23,4	143	27	40,2	371	40	72,6	953
12	14,7	58,4	20	26,8	184	30	46,5	472	45	84,7	1231
14	17,4	81,7	22	30,6	232	33	53,8	597	50	100	1589
16	20,2	109	24	34,8	289	36	61,9	743	55	118	2035

Таблица ПЗ. Коэффициенты приведения длины μ

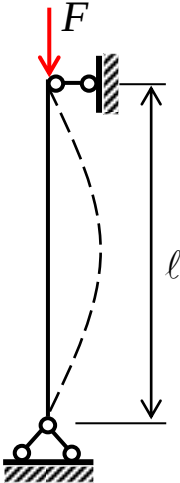
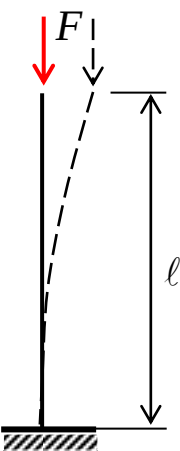
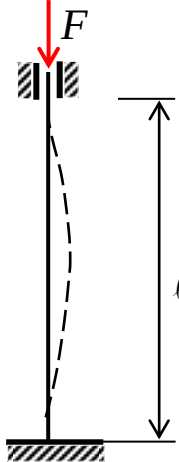
			
$\mu = 1,0$	$\mu = 0,7$	$\mu = 2,0$	$\mu = 0,5$

Таблица П4. Коэффициенты продольного изгиба φ для Ст.3

λ	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
φ	1,00	0,99	0,96	0,94	0,92	0,89	0,86	0,81	0,75	0,69	0,60
λ	110	120	130	140	150	160	170	180	190	200	
φ	0,52	0,45	0,40	0,36	0,32	0,29	0,26	0,23	0,21	0,19	

ОГЛАВЛЕНИЕ

ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ	3
ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ	3
Задача 1	3
Задача 2.....	6
Задача 3.....	7
Задача 4.....	10
Задача 5	17
Задача 6	19
Задача 7	21
Задача 8.	24
ПРИЛОЖЕНИЕ	27