

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Тульский государственный университет»

Институт Горного дела и строительства
Кафедра «Городского строительства, архитектуры и дизайна»

Утверждено на заседании кафедры
«ГСиА»
«29» января 2019 г., протокол № 4

Заведующий кафедрой

_____ К.А. Головин

ЛЕКЦИИ

«Вычислительные методы в строительстве»

**основной профессиональной образовательной программы
высшего образования – программы магистратуры**

по направлению подготовки
08.04.01 Строительство

с профилем
**Теория и практика организационно-технологических и
экономических решений**

Форма обучения: очная, заочная

Идентификационный номер образовательной программы: 080401-03-19

Тула, 2020 год

ЛИСТ СОГЛАСОВАНИЯ

Разработчик(и):

Головин Константин Александрович, д.т.н., зав. каф.
(ФИО, должность, ученая степень, ученое звание)

(подпись)

Оглавление

ТЕМА 1. Введение в численные методы решения задач строительства.....	2
ТЕМА 2. Численные методы решения задач линейной алгебры.....	10
ТЕМА 3. Численные методы решения нелинейных уравнений и их систем..	36
ТЕМА 4. Численные методы решения линейных дифференциальных уравнений.....	45
ТЕМА 5. Численные методы оптимизации.....	59

ТЕМА 1. ВВЕДЕНИЕ В ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ СТРОИТЕЛЬСТВА

1.1. Разновидности численных методов и особенности их применения

Суть численных методов состоит в выполнении последовательности арифметических операций над числами, характеризующих рассматриваемый объект или процесс. Все численные методы, применяемые при решении строительных задач, можно условно разделить на две разновидности.

Первая разновидность численных методов связана с отысканием числовых значений искомых величин по конечным вычислительным алгоритмам. Применение таких методов для решения задач характеризуется выполнением заранее известного конечного числа арифметических операций.

Вторая разновидность численных методов основана на итерационных вычислительных алгоритмах отыскания искомых числовых величин решаемой задачи, т. е. на выполнении определенной повторяющейся вычислительной процедуры, последовательно приближающей получаемые приближенные числовые величины к их точным значениям. В этом случае число выполняемых арифметических операций заранее неизвестно и оно зависит от числа шагов последовательных приближений, которые необходимо выполнить.

Применяя при решении строительных задач численные методы как первой, так и второй разновидностей, следует учитывать ряд особенностей решения задач такими методами.

Во-первых, приступая к численному решению задачи, описывающей поведение некоторого реального строительного объекта или процесса, нужно отчетливо представлять, что необходимо узнать и будут ли все вычисляемые величины способствовать пониманию поведения исследуемого объекта или процесса. Одна из наиболее распространенных ошибок при реализации численных методов с помощью ЭВМ – вычисление большого количества величин, характеризующих поведение объекта или процесса. Важно понимать, что количество вычисленных величин не обязательно способствует пониманию сути результатов решаемой задачи.

Во-вторых, понимая цель вычислений и определив их объем, необходимо ясно представлять, какие входные данные или начальные параметры характеризуют решаемую задачу. При этом следует понимать, что используемые входные данные связаны с теми допущениями, которые были введены при формировании содержательной модели исследуемого строи-

тельного объекта или процесса, и могут не учитывать некоторую информацию о самом объекте или процессе. Поэтому нужно критически относиться к входным данным и предусматривать возможность включения в вычислительный алгоритм дополнительных начальных параметров для проверки их значимости и влияния на конечные результаты.

В-третьих, после осмысления цели вычислений и ясного понимания, что необходимо учитывать для ее достижения, следует тщательно продумать алгоритм вычислений. Важно предусмотреть в нем процедуры проверки получаемых промежуточных и конечных результатов. Цель таких проверок – соответствие получаемых результатов исследуемому объекту или процессу. При этом желательно, чтобы все математические соотношения и уравнения были приведены к безразмерному виду, так как учет размерностей может приводить к дополнительным трудностям при вычислениях.

Таковы некоторые особенности, которые рекомендуется помнить при реализации численных методов. Из них следует, что девизом численных методов является утверждение «Цель расчетов – не числа, а понимание».

1.2. Основные понятия и правила приближенных вычислений

Существует три источника получения величин, используемых при численном решении строительных задач:

- измерения;
- счет;
- выполнение математических операций.

Получаемые во всех трех случаях значения, как правило, являются приближенными величинами.

Таким образом, точные величины при реализации численных методов встречаются редко. Обычно ими являются некоторые числовые параметры в математических выражениях и формулах. Большая часть величин, встречающихся при вычислениях, характеризуется приближенными значениями или приближенными числами. Математические действия над приближенными числами называются приближенными вычислениями.

Отклонение приближенной величины a от ее точного значения A характеризуется разностью

$$\Delta a = A - a \quad (1.2.1)$$

и называется погрешностью приближенной величины. Абсолютная величина разности (1.2.1) называется абсолютной погрешностью приближенного числа a

$$\Delta \neq |A - a| . \quad (1.2.2)$$

Так как при вычислениях точные значения участвующих в них величин, как правило, неизвестны, то невозможно определить ни знаки погрешностей соответствующих приближенных чисел, ни их абсолютные величины. Поэтому в приближенных вычислениях обычно используют предельные абсолютные погрешности приближенных чисел, с помощью которых задаются верхние оценки их неизвестных абсолютных погрешностей.

Под предельной абсолютной погрешностью приближенного числа a понимают любое число не меньшее Δ

$$\Delta = |A - a| \leq \alpha. \quad (1.2.3)$$

Из (1.2.3) следует, что точное число A лежит в интервале

$$a - \alpha \leq A \leq a + \alpha. \quad (1.2.4)$$

Из всего множества значений, удовлетворяющих соотношению (1.2.4), необходимо, по возможности, выбирать меньшее значение.

Предельная абсолютная погрешность не полностью характеризует отклонение точного значения какой-либо величины от ее приближенного значения. Для сравнительной оценки одинаковых предельных абсолютных погрешностей различных по величине приближенных чисел вводится понятие предельной относительной погрешности, которая вычисляется по формуле

$$\delta = \frac{\alpha}{|a|} \quad (a \neq 0). \quad (1.2.5)$$

Предельная относительная погрешность, оценивающая качество полученного приближенного числа, безразмерна и, как правило, выражается в процентах.

Понятия предельной абсолютной и относительной погрешностей приближенного числа связаны с понятием значащих цифр такого числа. Значащей цифрой приближенного числа является любая цифра в его десятичном изображении и определяющая число единиц соответствующего десятичного разряда. При этом нуль, в зависимости от занимаемого места в записи числа, может трактоваться по-разному. В начале десятичных дробей он не является значащей цифрой, в остальных случаях нуль – значащая цифра.

В приближенных числах различают два вида значащих цифр: верные и сомнительные. Верными считаются n первых значащих цифр приближенного числа, если его абсолютная погрешность не превышает половины единицы разряда, выражаемого последней значащей цифрой, считая слева направо. Цифры, следующие за верной последней цифрой, считаются сомнительными.

При решении строительных задач используют вид записи приближенных значений величин, который сам показывает число верных цифр. При такой форме записи приближенного числа сомнительной считается последняя значащая цифра, в которой допускается ошибка не больше чем на единицу, а остальные цифры являются верными.

Абсолютная и относительная точность приближенного числа связаны с количеством верных значащих цифр. Предельная абсолютная погрешность зависит от количества таких цифр после запятой и равняется единице разряда первой сомнительной цифры. Относительная предельная погрешность приближенного числа зависит от общего количества его верных цифр и ориентировочно равняется: 10 % – при одной верной цифре, 1 % – при двух верных цифрах, 0.1 % – при трех верных цифрах и т. д. Таким образом, точность приближенных вычислений зависит не от количества значащих цифр, а от количества верных значащих цифр. При решении строительных задач допустимая относительная погрешность вычислений, как правило, находится в пределах от 1 до 5 %, поэтому при выполнении вычислений в таких задачах обычно ограничиваются тремя верными значащими цифрами.

Используемые в численных методах правила арифметики выведены в предположении, что все числа являются точными; поэтому при вычислениях с такими числами удерживаются все значащие цифры. Удержание же всех значащих цифр при вычислениях с приближенными числами создает иллюзию мнимой точности таких вычислений, поэтому применение арифметических действий при вычислениях с приближенными числами имеет ряд особенностей.

При сложении приближенных величин в сумме берется столько знаков после запятой, сколько их имеется у слагаемого с наибольшей предельной абсолютной погрешностью.

Предельная абсолютная погрешность суммы или разности нескольких приближенных величин равна сумме предельных абсолютных погрешностей этих величин. Поэтому при сложении большого числа приближенных величин рекомендуется в вычислениях удерживать один или два дополнительных знака, а в ответе произвести их округление. При вычитании приближенных чисел следует дополнительно иметь в виду следующее. Вычитание близких чисел существенно увеличивает предельную относительную погрешность результата.

При умножении и делении приближенных величин складываются предельные относительные погрешности, поэтому число верных значащих

цифр результата равняется наименьшему числу таких цифр среди величин, участвующих в этой арифметической операции.

В случае выполнения приближенных вычислений с одновременным применением различных арифметических действий руководствуются принципом равной точности. Согласно этому принципу выбираемые степени точности всех участвующих в вычислениях приближенных величин должны быть согласованы друг с другом и ни одна из них не должна быть чрезмерной или недостаточной.

1.3. Влияние погрешностей при реализации численных методов

В связи с тем, что решение строительных задач численными методами связано с приближенными вычислениями, важным является вопрос о чувствительности этих результатов вычислений к изменчивости исходных данных и погрешностям округлений в ходе самих вычислений.

Оценка влияния изменчивости исходных данных связана с понятием устойчивости получаемого конечного результата, т. е. зависимостью его поведения от погрешности исходных данных. Если на величину конечного результата численного решения задачи практически не влияют малые изменения исходных данных, то конечный результат устойчив по отношению к погрешностям этих данных. В противном случае он является неустойчивым, когда малые колебания величин исходных данных существенно изменяют результаты решения задачи. Критерии оценки зависимости конечного результата от погрешностей исходных данных будут затрагиваться далее при рассмотрении конкретных численных методов.

Оценка влияния второго фактора связана с проблемой устойчивости самого вычислительного процесса. Если в процессе вычислений неизбежные погрешности округления взаимно компенсируются и их влияние не существенно, то вычислительный процесс считается устойчивым. Если в процессе вычислений неизбежные округления начинают быстро накапливаться и их влияние носит недопустимый характер, то вычислительный процесс считается неустойчивым.

Устойчивость вычислительного процесса сравнительно просто проверяется при ручных вычислениях. В этом случае объем вычислений относительно невелик, процесс накопления ошибок округления имеет обозримый вид, и для контроля над ходом вычислений можно использовать следующие приемы: наблюдать и оценивать на каждом шаге вычислений погрешности промежуточных результатов в соответствии с описанными выше

правилами приближенных вычислений; регулировать число верных значащих цифр промежуточных результатов, чтобы избежать грубых ошибок округлений. И, наконец, зная погрешности промежуточных округлений, оценить предельную относительную погрешность конечного результата.

При реализации вычислительного процесса с помощью ЭВМ исследование его устойчивости носит более сложный характер. Это объясняется тем, что в этом случае существенно возрастает объем производимых вычислений, процесс накопления ошибок носит массовый характер и теряет свою обозримость, и все промежуточные вычисления проводятся с числами с фиксированным числом значащих цифр. Поэтому описанные выше приемы контроля над ходом вычислительного процесса непригодны для машинных вычислений.

Распространенным методом оценки устойчивости вычислительного процесса, реализуемого с помощью ЭВМ, является выполнение машинных вычислений с обычной и двойной точностью. Принято считать совпадающие в двух ответах значащие цифры верными, и в зависимости от их числа делается заключение об устойчивости вычислительного процесса.

1.4. Реализация численных методов на ЭВМ

Численные методы решения математических задач, описывающие поведение различных объектов или процессов, представляют собой определенную последовательность арифметических операций над числами – исходными данными и промежуточными результатами. Последовательность таких операций называется алгоритмом решения математической задачи. Числа и выполняемые над ними операции образуют язык численных методов, и ввиду его простоты численные методы решения задач легко реализуются на ЭВМ. Однако следует понимать, что применение компьютера при решении задач численными методами не упрощает решение задач, а лишь позволяет автоматизировать вычисления и резко повысить скорость их выполнения.

Для численного решения математической задачи с помощью компьютера необходимо иметь:

1. Исходные данные.
2. Алгоритм решения задачи.
3. Программу реализации алгоритма на компьютере.

Для написания компьютерных программ используются специальные языки программирования. На заре появления ЭВМ программирование осуществлялось в машинных кодах и было уделом лишь профессиональных программистов. После появления алгоритмических языков программирования написание программ стало более доступным инженерам и другим специалистам, применяющим ЭВМ для решения математических задач. Однако написание и отладка таких программ требуют глубоких знаний одного из языков программирования и связаны с большими затратами времени.

Языки программирования подразделяются на специальные и универсальные. Специальные языки программирования (FORTRAN, COBOL, LISP, PROLOG и др.) предназначены для решения задач определенного класса. Например, один из первых языков программирования FORTRAN создавался для решения инженерных задач. Языки программирования COBOL, LISP, PROLOG обычно используют для решения своих задач, соответственно, экономисты, архитекторы и ученые. Универсальные языки программирования (BASIC, PASCAL, C⁺⁺ и др.) могут использоваться при решении задач различными специалистами.

Необходимость использования специалистами языков программирования для численного решения задач на компьютере стала постепенно исчезать после появления компьютерных математических систем. Такие системы позволяют автоматизировать численное решение задач без составления компьютерных программ. Форма записи математических выражений в таких системах близка к их привычному виду. Среди них можно отметить MatLab, Maple, Mathematica и др. Например, система MatLab предназначена для решения задач линейной алгебры, а система Maple позволяет получать решение сложных математических задач в аналитическом виде.

Для решения инженерных задач наиболее приспособлена компьютерная математическая система MathCAD. Описание алгоритма решения задачи в такой системе осуществляется в естественной математической форме с применением общепринятой символики для математических знаков. Кроме того, это естественное описание алгоритма одновременно является для компьютера и программой численного решения задачи. Такое объединение алгоритма и программы радикально упрощает применение компьютера при решении инженерных задач.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Проверьте, как Вы усвоили следующие понятия:

- конечный алгоритм;
- итерационный алгоритм;
- погрешность приближенной величины;
- абсолютная погрешность приближенной величины;
- предельная абсолютная погрешность приближенной величины;
- предельная относительная погрешность приближенной величины;
- значащие цифры;
- верные и сомнительные значащие цифры;
- устойчивость результата вычислений;
- устойчивость вычислительного процесса;
- алгоритм решения задачи.

2. Проверьте, как Вы сумеете воспроизвести:

- правила арифметических действий с приближенными величинами;
- практическую оценку устойчивости вычислительного процесса.

В формуле (2.1.3) матрица A_i получается из матрицы A заменой i -того столбца столбцом свободных членов.

Нахождение корней системы линейных алгебраических уравнений с помощью формул (2.1.3) или (2.1.4) требует выполнения большого количества арифметических действий. Число только операций умножения и деления равняется

$$N = (n^2 - 1) \times n! + n,$$

поэтому при большом значении n эти формулы для решения систем линейных алгебраических уравнений, как правило, не используются.

Применяемые для решения систем линейных алгебраических уравнений численные методы можно разделить на две группы:

- прямые методы;
- итерационные методы.

В основе прямых методов лежит преобразование исходной системы уравнений к некоторой эквивалентной упрощенной системе, решая которую по определенному конечному алгоритму находят корни исходной системы уравнений. Прямые методы позволяют эффективно решать системы уравнений до порядка 10^3 . Прямым методом, который обычно применяется при решении строительных задач, является метод Гаусса. Среди других прямых методов можно отметить метод главных элементов и метод Халлецкого.

В основе итерационных методов лежит преобразование исходной системы уравнений к эквивалентной системе специального вида и получение численных значений корней путем реализации некоторых сходящихся бесконечных процессов последовательных приближений. Для нахождения корней системы задаются их предельной абсолютной погрешностью. По достижению на некотором шаге требуемой точности процесс последовательных приближений обрывается.

Итерационные методы позволяют эффективно решать системы уравнений до порядка 10^6 . Эффективность применения итерационных методов существенно зависит от удачного выбора начальных значений корней и быстроты сходимости процесса.

Среди итерационных методов, применяемых при решении строительных задач, наиболее известным является метод простой итерации. Из других методов этой группы следует назвать метод Зейделя и метод релаксации.

2.2. Устойчивость решения системы линейных алгебраических уравнений

Понятие устойчивости решения системы линейных алгебраических уравнений определяется зависимостью решения этой системы от погрешностей величин коэффициентов и свободных членов. Если при малых изменениях коэффициентов или свободных членов величины корней системы не претерпевают существенных изменений, то решение системы уравнений считается устойчивым. В противном случае оно является неустойчивым.

Устойчивость решения системы линейных алгебраических уравнений зависит от обусловленности матрицы ее коэффициентов. Понятие обусловленности матрицы характеризуется изменчивостью элементов обратной матрицы при малом изменении элементов исходной матрицы. Если изменения величин элементов обратной матрицы незначительны, то исходная матрица считается хорошо обусловленной, и это является признаком устойчивости решения системы уравнений. В противном случае обусловленность матрицы недостаточна, и это приводит к неустойчивости решения.

Количественную оценку обусловленности матрицы можно осуществлять с помощью величины нормированного определителя

$$\tilde{|A|} = \frac{|A|}{\sqrt{\prod_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^2}},$$

которая удовлетворяет соотношениям $0 \leq \tilde{|A|} \leq 1$.

Чем ближе эта величина к единице, тем лучше обусловленность матрицы. Обусловленность матрицы считается достаточной для обеспечения устойчивости решения системы уравнений, если

$$0.1 \leq \tilde{|A|} \leq 1.$$

В противном случае обусловленность матрицы недостаточна.

Качественную оценку обусловленности матрицы коэффициентов решаемой системы уравнений можно дать с помощью различных внешних признаков.

Обусловленность матрицы можно оценить, сравнивая значения элементов. Если значения главных элементов матрицы a_{ii} существенно больше значений ее побочных элементов a_{ij} ($i \neq j$)

$$a_{ii} \gg a_{ij} \quad (i, j=1, \dots, n), \quad (2.2.1)$$

то обусловленность такой матрицы можно считать достаточной. И, наоборот, если значения всех элементов матрицы близки друг к другу, то обусловленность такой матрицы плохая. Из признака (2.2.1) также очевидно, что наличие нулевых побочных элементов улучшает обусловленность матрицы, а наличие отдельных главных элементов, значения которых существенно меньше значений остальных главных элементов, ухудшает ее обусловленность.

Внешним проявлением плохой обусловленности матрицы также является близость значений элементов двух произвольных столбцов матрицы с точностью до постоянного множителя

$$a_i \approx c a_j,$$

где a_i , a_j – соответственно, i и j столбцы матрицы коэффициентов, c – некоторый числовой множитель.

2.3. Решение систем линейных уравнений методом Гаусса

Метод Гаусса основан на использовании идеи последовательного исключения неизвестных из уравнений заданной системы (2.1.1). Метод имеет различные варианты вычислительных схем.

Классическая схема метода – схема единственного деления. Согласно этой схеме исходная система уравнений с квадратной матрицей коэффициентов по шагам преобразуется в эквивалентную систему с правой треугольной матрицей коэффициентов

$$\left. \begin{aligned} x_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3 + \dots + \alpha_{1n}x_n &= \beta_1 \\ x_2 + \alpha_{23}x_3 + \dots + \alpha_{2n}x_n &= \beta_2 \\ &\dots\dots\dots \\ x_n &= \beta_n \end{aligned} \right\}. \quad (2.3.1)$$

Решение эквивалентной системы (2.3.1) позволяет найти корни заданной системы уравнений (2.1.1).

Алгоритм метода Гаусса включает две вычислительные процедуры – прямой и обратный ходы. Прямой ход состоит в исключении по шагам из уравнений системы (2.1.1) неизвестных величин с номерами, меньшими номеров уравнений, в которые они входят. Это позволяет заменить исходную систему уравнений эквивалентной системой вида (2.3.1). Обратный ход служит для нахождения решения эквивалентной системы уравнений.

[illegible]
$$\alpha_{1j} = \frac{a_{1j}}{a_{11}}, \quad \beta_1 = \frac{b_1}{a_{11}},$$

$$a_{ij}^1 = a_{ij} - \alpha_{1j} a_{1i}, \quad b_i^1 = b_i - \beta_1 a_{1i} \quad (i, j = 2, \dots, n),$$

На втором шаге прямого хода исключается неизвестное x_2 из всех уравнений системы (2.3.2), начиная с третьего. Полагая коэффициент a_{22}^1 отличным от нуля, поделим на него второе уравнение системы (2.3.2). Последовательно умножим это преобразованное уравнение на коэффициенты a_{j2}^1 ($j = 3, \dots, n$) и вычтем из соответствующих уравнений (2.3.2), начиная с третьего. В итоге после второго шага прямого хода получим следующую систему уравнений:

[illegible]
$$\alpha_{2j} = \frac{a_2^1}{a_{22}^1}, \beta_2 = \frac{b_2^1}{a_{22}^1},$$

$$a_{ij}^2 = a_{ij}^1 - \alpha_{2j} a_{i2}^1, b_i^2 = b_i^1 - \beta a_{i2}^1 \quad (i, j = 3, \dots, n),$$

Продолжая процесс исключения неизвестных по описанной схеме, после $(n-1)$ -го шага прямого хода получим следующую систему уравнений:

Здесь

На n -ном шаге прямого хода, поделив последнее уравнение системы (2.3.4) на коэффициент a_{nn}^{n-1} , найдем

и получим эквивалентную систему уравнений (2.3.1).

Обратный ход метода Гаусса заключается в нахождении корней системы уравнений (2.3.1) по следующим формулам:

Формулы (2.3.5) получены в результате разрешения уравнений эквивалентной системы (2.3.1) относительно неизвестных, номер которых совпадает с номером уравнения.

Рассмотренная вычислительная схема реализуема, если разрешающие элементы каждого шага отличны от нуля. При решении систем уравнений (2.1.1), встречающихся в задачах строительной механики, такие условия соблюдаются всегда и, более того, $a_{ij} > 0 \quad (i = 1, \dots, n)$.

2.4. Решение систем линейных уравнений методом простой итерации

В основе решения систем линейных алгебраических уравнений методом простой итерации лежит переход от исходной системы уравнений (2.1.1) к эквивалентной системе уравнений специального вида.

Для этого разрешим первое уравнение (2.1.1) относительно x_1 , второе – относительно x_2 , последнее – относительно x_n и приведем исходную систему к виду

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \beta_1 + \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3 + \dots + \alpha_{1n}x_n \\ x_2 &= \beta_2 + \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \alpha_{23}x_3 + \dots + \alpha_{2n}x_n \\ &\vdots \\ x_n &= \beta_n + \alpha_{n1}x_1 + \alpha_{n2}x_2 + \alpha_{n3}x_3 + \dots + \alpha_{nn}x_n \end{aligned} \right\}, \quad (2.4.1)$$

где

$$\beta_i = \frac{b_i}{a_{ii}}, \alpha_i \equiv 0, \alpha_{ij} = -\frac{a_{ij}}{a_{ii}} \quad (i \neq j) (i, j = 1, \dots, n). \quad (2.4.2)$$

Каждое уравнение (2.4.1) формально имеет вид формулы для нахождения корня соответствующего номера, выраженного через остальные корни, входящие в это уравнение. Подставляя в правые части этих формул некоторые приближенные значения корней, можно получить их уточненные значения. Поэтому для приближенного нахождения искомых корней реализуется следующий вычислительный процесс последовательных уточнений некоторых начальных значений таких корней.

За начальное приближение искомых корней примем соответствующие значения свободных членов системы (2.4.1)

$$\begin{aligned} x_1^0 &= \beta_1 \\ x_2^0 &= \beta_2 \\ &\dots\dots\dots \\ x_n^0 &= \beta_n \end{aligned} \tag{2.4.3}$$

Первое приближение искомых корней получим, подставив (2.4.3) в правые части (2.4.1)

$$\begin{aligned} x_1^1 &= \beta_1 + \alpha_{11}x_1^0 + \alpha_{12}x_2^0 + \alpha_{13}x_3^0 + \dots + \alpha_{1n}x_n^0 \\ x_2^1 &= \beta_2 + \alpha_{21}x_1^0 + \alpha_{22}x_2^0 + \alpha_{23}x_3^0 + \dots + \alpha_{2n}x_n^0 \\ &\vdots \\ x_n^1 &= \beta_n + \alpha_{n1}x_1^0 + \alpha_{n2}x_2^0 + \alpha_{n3}x_3^0 + \dots + \alpha_{nn}x_n^0 \end{aligned}$$

.....

ЭТИХ корней

$k \rightarrow \infty$

ДУТ ВЫПОЛНЯТЬСЯ УСЛОВИЯ

$$\max_i |x_i^n - x_i^{n-1}| \leq \varepsilon \quad (i=1, \dots, n).$$

ния искомых корней с заданной предельной абсолютной погрешностью.

удовлетворяют условиям

$$\sum_{j=1}^n |\alpha_{ij}| < 1 \quad (i=1, \dots, n) \quad (2.4.7)$$

ИЛИ

$$\sum_{i=1}^n |\alpha_{ij}| < 1 \quad (j = 1, \dots, n), \quad (2.4.8)$$

ном приближении искомых корней.

a_{ij} исходной системы уравнений (2.1.1) удовлетворяют соотношениям

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \quad (i \neq j; i = 1, \dots, n). \quad (2.4.9)$$

ния исходной системы уравнений.

2.5. Понятие собственного значения и собственного вектора матрицы и методы ихнахождения

Рассмотрим систему однородных линейных уравнений

[illegible]

с главными коэффициентами, зависящими от некоторого параметра λ .

Матричная форма (2.5.1) имеет вид

$$(A-\lambda E)x=0, \quad (2.5.2)$$

где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{11} & \dots & a_{11} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Каждое значение параметра λ_i , при котором система (2.5.1) имеет ненулевое решение, называется собственным значением матрицы A . Их число равняется порядку матрицы. Совокупность всех собственных значений образует спектр матрицы. Соответствующий каждому значению параметра λ_i вектор ненулевого решения называется собственным вектором матрицы A .

Для нахождения собственных значений матрицы A используется условие существования ненулевых решений системы уравнений (2.5.1)

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk}-\lambda & \dots & a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nk} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (2.5.3)$$

ИЛИ

$$\det(A-\lambda E)=0. \quad (2.5.4)$$

Уравнение (2.5.3) или (2.5.4) называется характеристическим уравнением матрицы A , а соответствующий определитель называется характеристическим определителем этой матрицы, поэтому корни уравнения

(2.5.3) или (2.5.4) λ_i , являющиеся собственными значениями матрицы A , по-другому называются характеристическими числами матрицы.

При разворачивании характеристического определителя получается полином n -ной степени относительно параметра λ

$$(-1)^n(\lambda^{n-p_1}\lambda^{n-1}+p_2\lambda^{n-2}-\dots+(-1)^np_n), \quad (2.5.5)$$

называемый характеристическим полиномом матрицы A . Таким образом, нахождение собственных значений матрицы заключается в отыскании корней нелинейного алгебраического уравнения n -ной степени.

Каждому собственному значению матрицы соответствует собственный вектор. Для нахождения собственных векторов матрицы A собственные значения λ_i подставляются в систему уравнений (2.5.1)

[illegible]

В этом случае определитель системы (2.5.6) равен нулю, а ранг матрицы A равен $n-1$. Тогда, если отбросить первое уравнение (2.5.6) и положить восстановившихся уравнениях $x_{1i} = 1$, то их можно разрешить относительно неизвестных корней $x_{2i}, x_{3i}, \dots, x_{ni}$. Определенная таким образом, с точностью до произвольного постоянного множителя, совокупность ненулевых значений $x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{ni}$ и образует собственный вектор матрицы A , соответствующий ее собственному значению λ_i .

Таким образом, вычисление собственных значений и собственных векторов матрицы A можно разбить на три этапа:

- получение характеристического полинома (2.5.5) матрицы A ;
- решение характеристического уравнения и нахождение собственных значений λ_i ($i = 1, \dots, n$);
- решение системы уравнений (2.5.6) и нахождение собственных векторов.

При исследовании поведения ряда реальных объектов или процессов может потребоваться нахождение всех собственных значений и собственных векторов матрицы. Такая задача называется полной проблемой собственных значений, и ее решение, как правило, требует рассмотрения всех трех указанных этапов. В общем случае это достаточно сложная задача. Относительно легко она решается лишь для отдельных видов матриц, например, диагональной или треугольной форм.

Вместе с тем для ряда строительных задач нет необходимости решать полную проблему собственных значений. В одних задачах достаточно указать границы, в которых лежат все или часть собственных значений матрицы. При решении других задач ограничиваются отысканием наименьшего и наибольшего собственного значения и соответствующих им собственных векторов. В ряде случаев отыскивают собственное значение, близкое к некоторому заданному числу. Все задачи такого рода называются частичными проблемами собственных значений. Решение таких задач не требует рассмотрения всех указанных выше этапов вычисления собственных значений и собственных векторов.

Существующие методы численного нахождения собственных значений и собственных векторов матрицы A можно разделить на две группы:

- прямые методы;
- итерационные методы.

Прямые методы обычно используются для решения полной проблемы собственных значений. Среди методов этой группы можно назвать метод Данилевского, метод Крылова и метод Ланцоша. Наиболее простой алгоритм решения полной проблемы собственных значений матрицы A дает метод Данилевского, а по количеству арифметических операций, необходимых для его выполнения, он является и самым экономичным среди методов, базирующихся на получении и решении характеристического уравнения.

Итерационные методы позволяют определять собственные значения матрицы A без составления и решения характеристического уравнения и применяются как для решения частичной, так и полной проблем собственных значений. Основным преимуществом этих методов является возможность нахождения собственных значений без получения характеристического полинома матрицы.

2.6. Решение частичной проблемы собственных значений симметричной матрицы

Отыскание собственных значений и собственных векторов в строительных задачах обычно связано с матрицами, элементы которых удовлетворяют условию симметричности

$$a_{ij} = a_{ji} \quad (i \neq j; i, j = 1, \dots, n).$$

Матрицы, удовлетворяющие этому ограничению, называются симметричными. Все собственные значения таких матриц являются вещественными величинами.

Решение частичной проблемы собственных значений в строительных задачах часто заключается в отыскании наименьшего и наибольшего собственного значения. Отыскание граничных величин λ_1, λ_n спектра собственных значений симметричной матрицы сравнительно просто осуществляется итерационным методом.

Метод решения рассматриваемой частичной проблемы построен на отыскании наибольшего по модулю собственного значения матрицы A , которое обозначим $\tilde{\lambda}$, и наибольшего по модулю собственного значения вспомогательной матрицы $B = A - \tilde{\lambda}E$, которое обозначим $\tilde{\mu}$. При известных значениях $\tilde{\lambda}$ и $\tilde{\mu}$ граничные величины λ_1, λ_n спектра собственных значений матрицы A определяются в зависимости от знака $\tilde{\lambda}$. Если $\tilde{\lambda} > 0$, то искомые величины определяются по формулам

$$\lambda_1 = \tilde{\lambda} + \tilde{\mu}, \quad \lambda_n = \tilde{\lambda}. \quad (2.6.1)$$

В противном случае эти величины равны

$$\lambda_1 = \tilde{\lambda}, \quad \lambda_n = \tilde{\lambda} + \tilde{\mu}. \quad (2.6.2)$$

Для отыскания величины $\tilde{\lambda}$ осуществляется следующий итерационный процесс. Задается произвольный ненулевой вектор

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad (x_1 \neq 0).$$

Этот вектор нормируется и принимается за нулевое приближение собственного вектора e , соответствующего собственному значению $\tilde{\lambda}$

$$e^0 = \frac{x}{\|x\|}$$

Норма вектора x имеет вид

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}.$$

Первое приближение собственного вектора e имеет вид

$$e^1 = \frac{x^1}{\|x^1\|} \quad x^1 = A e^0.$$

Соответствующеемупервоеприближениесобственногозначения $\tilde{\lambda}$ определяется как скалярное произведение векторов x^1 и e^0

$$\tilde{\lambda}^1 = \sum_{i=1}^n x_i^1 e_i^0. \quad (2.6.3)$$

Произвольное k -тое приближение искомых величин имеет следующий вид:

$$e^k = \frac{x^k}{\|x^k\|}, \quad x^k = A e^{k-1}$$

и

$$\tilde{\lambda}^k = \sum_{i=1}^n x_i^k e_i^{k-1}. \quad (2.6.4)$$

Продолжая по описанной схеме процесс последовательных приближений собственного значения, в пределе получим искомое собственное значение

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{\lambda}^k = \tilde{\lambda}.$$

При численном решении задачи процесс последовательных приближений (2.3.4) продолжается до тех пор, пока на некотором n -ном шаге не будет выполняться условие

$$|\tilde{\lambda}^n - \tilde{\lambda}^{n-1}| \leq \varepsilon. \quad (2.6.5)$$

Выполнение условия (2.6.5) является признаком приближенного нахождения наибольшего по модулю собственного значения матрицы A с заданной предельной абсолютной погрешностью.

Итерационный процесс отыскания наибольшего по модулю собственного значения $\tilde{\mu}$ вспомогательной матрицы $B = A - \tilde{\lambda}E$ осуществляется аналогично по формулам (2.6.3) – (2.6.5).

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Проверьте, как Вы усвоили следующие понятия:

- решение системы уравнений;
- неособенная матрица коэффициентов системы уравнений;
- прямые методы решения системы уравнений;
- итерационные методы решения системы уравнений;
- устойчивость решения системы уравнений;
- обусловленность матрицы коэффициентов;

- собственное значение матрицы;
- собственный вектор матрицы;
- спектр матрицы;
- характеристический полином матрицы;
- характеристическое уравнение матрицы;
- полная проблема собственных значений матрицы;
- частичная проблема собственных значений матрицы;

2. Проверьте, как Вы сумеете воспроизвести:

- каноническую форму записи системы уравнений;
- матричную форму записи системы уравнений;
- решение системы уравнений через обратную матрицу;
- количественную оценку обусловленности матрицы коэффициентов;
- качественную оценку обусловленности матрицы коэффициентов;
- эквивалентную систему уравнений метода Гаусса;
- алгоритм нахождения корней системы методом Гаусса;
- эквивалентную систему уравнений метода простой итерации;
- условия сходимости метода простой итерации для исходной системы уравнений;
- условия сходимости метода простой итерации для эквивалентной системы уравнений;
- алгоритм нахождения корней системы методом простой итерации;
- этапы вычисления собственных значений и собственных векторов матрицы;
- алгоритм решения частичной проблемы собственных значений итерационным методом.

ТЕМА 3. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ И ИХ СИСТЕМ

3.1. Корни нелинейного уравнения

Нелинейное уравнение в общем случае имеет вид

$$f(x) = 0. \quad (3.1.1)$$

Уравнение (3.1.1) называется алгебраическим, если его левая часть является многочленом n -ной степени неизвестной величины x

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n, \quad (3.1.2)$$

где все коэффициенты являются вещественными числами и $a_0 > 0$. Левая часть трансцендентного уравнения содержит неизвестную величину x в качестве аргумента других элементарных, а также специальных функций.

Будем считать, что функция $f(x)$ и две ее первых производных $f'(x)$ и $f''(x)$ определены и непрерывны в некоторой вещественной области изменения величины x

$$x \in [a, b]. \quad (3.1.3)$$

Всякое значение x^* из области (3.1.3), удовлетворяющее равенству

$$f(x^*) = 0,$$

является нулем функции $f(x)$ и называется вещественным корнем уравнения (3.1.1). Корни бывают кратные и простые.

Значение x^* называется корнем k -той кратности, если при $x = x^*$ вместе с функцией обращаются в нуль ее производные до порядка $k-1$ включительно

$$f(x^*) = f'(x^*) = \dots = f^{(k-1)}(x^*) = 0,$$

но $f^{(k)}(x^*) \neq 0$. В этом случае говорят, что уравнение (3.1.1) имеет k одинаковых корней, т. е. имеет кратный корень.

Однократный корень уравнения называется простым и для него выполняется условие

$$f'(x^*) \neq 0.$$

Если для простого корня уравнения в области (3.1.2) можно выделить некоторый отрезок $[\alpha, \beta]$, в котором производная $f'(x)$ сохраняет постоянный знак, то в нем не содержится других корней уравнения, и корень считается изолированным.

Далее рассматривается нахождение вещественных простых корней уравнения (3.1.1). Нахождение таких корней включает два этапа:

- этап отделения или изолирования корней;
- этап уточнения корней.

На первом этапе устанавливаются минимальные отрезки $[\alpha, \beta]$, в каждом из которых содержится по одному корню уравнения (3.1.1). Следовательно, любое значение из такого промежутка является приближенным значением соответствующего корня. На втором этапе вычисляются приближенные значения корней с заданной точностью ε .

3.2. Отделение корней нелинейного уравнения

В основе процедуры отделения корней лежит следующее свойство непрерывной функции $f(x)$. Если такая функция на концах некоторого отрезка $[\alpha, \beta]$ принимает значения разных знаков, т. е.

$$f(\alpha)f(\beta) < 0, \quad (3.2.1)$$

то внутри этого отрезка существует, по крайней мере, одно значение x , при котором функция обращается в нуль

$$f(x) = 0.$$

Это значение x является корнем уравнения (3.1.1). Признаком единственности корня является сохранение знака первой производной $f'(x)$ в рассматриваемом отрезке

$$f'(\alpha)f'(\beta) > 0. \quad (3.2.2)$$

Процедура отделения корней для широкого класса непрерывных функций, являющихся левой частью уравнения (3.1.1) в строительных задачах, может выполняться численным и графическим способом.

Численный способ отделения корней произвольного нелинейного уравнения (3.1.1) включает следующие шаги:

1. Разбиение области изменения величины x на некоторое число отрезков одинаковой длины.
2. Определение знаков функции $f(x)$ в граничных точках отрезков, на которые разбита область задания (3.1.3).
3. Установление отрезков $[\alpha, \beta]$, на концах которых произошла смена знаков функции $f(x)$.
4. Проверка признака единственности корня (3.2.2) для отрезков, на концах которых произошла смена знаков функции $f(x)$.

5. Выполнение шагов 1 – 4 для отрезков, в которых не соблюдается признак (3.2.2).

6. Проверка полноты отделения корней в соответствии с изложенными выше критериями.

Сравнительно просто и быстро выделить отрезки, содержащие по одному корню, позволяет графический способ отделения корней. Такой способ имеет две разновидности.

Первая разновидность основана на построении графика функции $y = f(x)$ для заданной области (3.1.2) и приближенном определении на графике этой функции местонахождения ее нулей. Конечные отрезки небольшой длины, визуально выделенные на осях в окрестностях нулей функции $f(x)$, будут содержать по одному корню уравнения (3.1.1).

Вторая разновидность основана на замене уравнения (3.1.1) некоторым эквивалентным уравнением

$$\varphi(x) = \psi(x) \quad (3.2.3)$$

и на приближенном определении точек пересечения графиков функций $y = \varphi(x)$ и $y = \psi(x)$. Конечные отрезки небольшой длины, визуально выделенные на оси x в окрестностях этих точек пересечения, также будут содержать по одному корню уравнения (3.1.1).

Первую разновидность графического способа отделения корней обычно следует применять при решении алгебраических уравнений, так как в этом случае поведение функции $f(x)$ и очертание ее графика в заданном интервале (3.1.3) предсказуемы. Вторую разновидность графического способа отделения корней предпочтительнее применять при решении трансцендентных уравнений. Поведение функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, входящих в эквивалентное уравнение (3.2.3), и очертание их графиков, как правило, более предсказуемы по сравнению с исходной функцией $f(x)$.

3.3. Методы уточнения изолированных корней нелинейного уравнения

В результате выполнения процедуры отделения корней для каждого из простых искомых корней указывается изолирующий его первоначальный отрезок $[\alpha_0, \beta_0]$, для которого выполняются условия (3.2.1) и (3.2.2). Любое значение из такого отрезка можно с некоторой точностью считать начальным приближенным значением искомого корня.

Для уточнения приближенного значения корня до требуемой точности внутри первоначального изолирующего отрезка некоторым способом строится сходящаяся числовая последовательность приближенных значений искомого корня

$$x_0, x_1, \dots, x_n, \dots; \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*. \quad (3.3.1)$$

Здесь x_0 – начальное приближение искомого корня, взятое из $[\alpha_0, \beta_0]$. За уточненное приближенное значение корня принимается

$$\tilde{x} = x_n.$$

Различают два типа сходимости последовательности (3.3.1). Если два соседних последовательных приближения при построении (3.3.1) всегда располагаются по разные стороны от искомого корня, то сходимость последовательности двусторонняя, а если по одну сторону – односторонняя.

Процесс построения последовательности продолжается до тех пор, пока на некотором шаге n не будет достигнута требуемая точность вычисления значения искомого корня

$$|x^* - \tilde{x}| \leq \varepsilon, \quad (3.3.2)$$

где ε – заданная предельная абсолютная погрешность или точность искомого корня. Поскольку точное значение корня ξ неизвестно, то пользоваться условием (3.3.2) при построении последовательности (3.3.1) невозможно. Поэтому важным является вопрос о практических критериях, позволяющих контролировать близость приближенного значения корня, получаемого на каждом шаге, к его точному значению. Эти критерии зависят от типа сходимости последовательности (3.3.1) и приводятся ниже при рассмотрении конкретных итерационных методов построения такой последовательности.

Среди наиболее известных итерационных методов, применимых к широкому классу непрерывных функций, являющихся левой частью уравнения (3.1.1), следует отметить:

- метод половинного деления;
- метод линейной интерполяции;
- метод простой итерации.

Каждый метод предлагает свой способ построения последовательности (3.3.1), и все они достаточно просто реализуются на ЭВМ. Рассмотрим вычислительную схему каждого метода.

Метод половинного деления. Метод позволяет получить двустороннюю последовательность (3.3.1), гарантированно сходящуюся в задан-

ном первоначальном изолирующем отрезке $[\alpha_0, \beta_0]$. Получение такой последовательности основывается на построении в отрезке $[\alpha_0, \beta_0]$, содержащем искомый корень, совокупности вложенных друг в друга суженных изолирующих отрезков. Для этого каждый предыдущий изолирующий отрезок, начиная с первоначального, делится пополам и из двух полученных отрезков новым изолирующим отрезком является тот, на концах которого функция $f(x)$ имеет противоположные знаки. Приближенным значением корня на каждом шаге является число, делящее изолирующий отрезок пополам. Следовательно, метод половинного деления заменяет отыскание нуля функции $f(x)$ в изолирующих отрезках, вычислением положения средних точек этих отрезков.

В качестве начального приближения x_0 искомого корня берется число

$$x_0 = (\alpha_0 + \beta_0) / 2, \quad (3.3.3)$$

делящее отрезок $[\alpha_0, \beta_0]$ пополам. В соответствии с условием (3.2.1) из двух полученных отрезков

$$[\alpha_0, x_0], [x_0, \beta_0]$$

определяется новый изолирующий отрезок $[\alpha_1, \beta_1]$. Число, делящее этот отрезок пополам, является первым приближением искомого корня

$$x_1 = (\alpha_1 + \beta_1) / 2.$$

Значение n -ного приближения искомого корня, вычисленного методом деления пополам, имеет вид

$$x_n = (\alpha_n + \beta_n) / 2. \quad (3.3.4)$$

Процесс сужения изолирующих отрезков согласно формуле (3.3.4) продолжается до тех пор, пока на некотором шаге n не выполнится одно из условий

$$f(x_n) = 0 \text{ или } |\beta_n - \alpha_n| \leq \varepsilon, \quad (3.3.5)$$

и, следовательно, n -ное приближение искомого корня будет являться или его точным значением, или приближенным значением с заданной абсолютной точностью ε .

Возможное минимальное число шагов для нахождения приближенного значения искомого корня с заданной точностью определяется по формуле

$$n = \log_2 \frac{\beta_0 - \alpha_0}{\varepsilon}. \quad (3.3.6)$$

За один шаг точность приближенного значения искомого корня увеличивается вдвое. Метод является наиболее простым среди указанных выше итерационных методов. Недостатком метода является значительный объем вычислений при малых значениях ε .

Метод линейной интерполяции. Метод позволяет получить одностороннюю последовательность (3.3.1), монотонно сходящуюся в заданном первоначальном изолирующем отрезке $[\alpha_0, \beta_0]$. Получение такой последовательности основывается на построении в отрезке $[\alpha_0, \beta_0]$, содержащем искомый корень, совокупности суженных изолирующих отрезков с одним неподвижным концом. Для получения такой совокупности отрезков каждый предыдущий отрезок делится не пополам, а на части, пропорциональные абсолютным значениям функции $f(x)$ по его концам. Приближенным значением корня на каждом шаге является число, делящее отрезок на пропорциональные части. Неподвижен тот конец первоначального изолирующего отрезка $[\alpha_0, \beta_0]$, для которого знак функции $f(x)$ совпадает со знаком ее второй производной $f''(x)$. Следовательно, метод линейной интерполяции заменяет отыскание нуля функции $f(x)$ в изолирующих отрезках $[\alpha_k, \beta_k]$ ($k = 0, 1, \dots, n$) отысканием точки пересечения с осью x хорды, соединяющей на графике функции $y = f(x)$ вершины ее ординат $f(\alpha_k)$ и $f(\beta_k)$, поэтому этот метод называется также методом хорд.

В качестве начального приближения x_0 искомого корня берется число

$$x_0 = \alpha_0 + \frac{f(\alpha_0)(\alpha_0 - \beta_0)}{f(\beta_0) - f(\alpha_0)}, \quad (3.3.7)$$

делящее отрезок $[\alpha_0, \beta_0]$ на части, пропорциональные абсолютным величинам чисел $f(\alpha_0)$ и $f(\beta_0)$. Далее, опять для двух полученных отрезков проверяется условие (3.2.1). Тот отрезок, для которого оно выполняется, является новым изолирующим отрезком $[\alpha_1, \beta_1]$, содержащим искомый корень. Число, делящее этот отрезок на пропорциональные части, является первым приближением искомого корня

$$x_1 = \alpha_1 + \frac{f(\alpha_1)(\alpha_1 - \beta_1)}{f(\beta_1) - f(\alpha_1)}$$

Значение n -ного приближения искомого корня, вычисленного методом линейной интерполяции, имеет вид

$$x_n = \alpha_n + \frac{f(\alpha_n)(\alpha_n - \beta_n)}{f(\beta_n) - f(\alpha_n)}. \quad (3.3.8)$$

Процесс сужения изолирующих отрезков согласно формуле (3.3.8) продолжается до тех пор, пока на некотором шаге n не будет выполняться условие

$$|x_n - x_{n-1}| \leq \frac{m}{M - m} \varepsilon, \quad (3.3.9)$$

где

$$m = \min |f'(x)|; \quad M = \max |f'(x)|$$

наименьшее и наибольшее значения модуля производной функции $f(x)$ в изолирующем отрезке $[\alpha_0, \beta_0]$. Если

$$M \leq 2m,$$

то из (3.3.9) следует, что выполнение условия

$$|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon$$

гарантирует вычисление приближенного значения искомого корня с заданной абсолютной точностью ε . Метод линейной интерполяции позволяет находить приближенное значение корня с требуемой точностью быстрее, чем метод половинного деления.

Метод простой итерации. Метод позволяет получать последовательность (3.3.1) как с двусторонней, так и односторонней сходимостью в заданном первоначальном изолирующем отрезке $[\alpha_0, \beta_0]$. В основе получения сходящейся последовательности лежит переход от заданного уравнения (3.1.1) к некоторому эквивалентному уравнению

$$x = \varphi(x). \quad (3.3.10)$$

Рассматривая (3.3.10) как рекуррентную формулу, вычисляют последовательность приближенных значений искомого корня. Приближенным значением корня на каждом шаге является число, полученное по (3.3.10) на основании предыдущего приближенного значения корня. Следовательно, метод простой итерации заменяет отыскание нуля функции $y = f(x)$ на изолирующем отрезке $[\alpha_0, \beta_0]$ отысканием точки пересечения некоторой кривой $y = \varphi(x)$ с прямой $y = x$ на этом же отрезке.

Начальное приближение x_0 искомого корня вычисляют по формуле (3.3.3) или (3.3.7) и подставляют в правую часть (3.3.10). Получается число, являющееся первым приближением искомого корня

$$x_1 = \varphi(x_0). \quad (3.3.11)$$

Продолжая этот процесс, получим значение n -ного приближения искомого корня

$$x_n = \varphi(x_{n-1}). \quad (3.3.12)$$

Процесс последовательных приближений согласно формулам (3.3.10) – (3.3.12) стремится в пределе к искомому корню, если для любых произвольных значений x_i и x_j из отрезка $[\alpha_0, \beta_0]$ выполняется условие

$$|\varphi(x_i) - \varphi(x_j)| \leq q |x_i - x_j| \quad (q < 1). \quad (3.3.13)$$

Очевидно, что чем меньше q , тем быстрее сходимость процесса. Выполнение (3.3.13) обеспечивается при любом начальном приближении x_0 , если производная функции $\varphi(x)$ во всех точках изолирующего отрезка $[\alpha_0, \beta_0]$ удовлетворяет условию

$$|\varphi'(x)| \leq q < 1. \quad (3.3.14)$$

Причем, если

$$0 < \varphi'(x) < 1,$$

то сходимость последовательности (3.3.1) односторонняя и монотонная, а если

$$-1 < \varphi'(x) < 0,$$

то сходимость двусторонняя и гарантированная. Следовательно, сходимость последовательности приближенных значений искомого корня, вычисленных методом простой итераций, зависит от выбора функции $\varphi(x)$.

Заданное уравнение (3.1.1) может быть преобразовано к виду (3.3.10) различными способами. Простой прием получения функции $\varphi(x)$, удовлетворяющей условию (3.3.14), состоит в следующем. Умножим уравнение (3.1.1) на некоторый параметр $\lambda > 0$ и прибавим к обеим частям равенства x . Тогда заданному уравнению можно придать вид

$$x = x - \lambda f(x).$$

Следовательно, функция $\varphi(x)$ описывается выражением

$$\varphi(x) = x - \lambda f(x). \quad (3.3.15)$$

Из условия (3.3.14) с учетом (3.3.15) получаются следующие значения числового параметра λ и величины q :

$$\lambda = 1/M; q = 1 - mM \quad / \quad .$$

Процесс построения последовательности (3.3.1) методом простой итерации продолжается до тех пор, пока на некотором шаге n не будет выполняться условие

$$|x_n - x_{n-1}| \leq \frac{1-q}{q} \varepsilon. \quad (3.3.16)$$

Если

$$q \leq \frac{1}{2},$$

то из (3.3.16) следует, что выполнение условия

$$|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon$$

гарантирует вычисление приближенного значения искомого корня с заданной абсолютной точностью ε . Возможное минимальное число шагов для нахождения приближенного значения искомого корня с заданной точностью определяется по формуле

$$n = \frac{\ln(1/\varepsilon)}{\ln(1/q)}.$$

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Проверьте, как Вы усвоили следующие понятия:

- нелинейное алгебраическое уравнение;
- нелинейное трансцендентное уравнение;
- корень нелинейного уравнения;
- простой и кратный корень;
- изолированный корень;
- отделение корня;
- уточнение корня;
- изолирующий отрезок;
- односторонняя сходимость последовательности числовых значений;
- двусторонняя сходимость последовательности числовых значений;
- решение системы нелинейных уравнений;
- матрица Якоби.

2. Проверьте, как Вы сумеете воспроизвести:

- признаки простого и кратного вещественного корня;
- признак изолированности корня;
- этапы нахождения простых вещественных корней;
- признак единственности отделения вещественного корня;
- алгоритм численного способа отделения корней нелинейного уравнения;
- процедуру графического способа отделения корней;
- суть процедуры уточнения приближенных значений корней;
- перечень основных методов уточнения корней;
- алгоритм метода половинного деления;
- алгоритм метода линейной интерполяции;
- алгоритм метода простой итерации;

ТЕМА 4. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

4.1. Типы дифференциальных уравнений и виды задач, встречающихся при их решении

Дифференциальные уравнения классифицируют по различным признакам. Необходимость классификации уравнений объясняется тем, что для каждого класса уравнений существует своя общая теория и методы их решения.

Прежде всего, дифференциальные уравнения различают по числу независимых переменных, связанных с искомыми функциями: обыкновенные дифференциальные уравнения и дифференциальные уравнения в частных производных. В первом случае неизвестная функция является функцией одной независимой переменной и дифференциальные уравнения содержат обыкновенные производные от искомой функции. Во втором случае неизвестная функция является функцией нескольких независимых переменных и дифференциальные уравнения содержат частные производные от искомой функции.

Важным признаком дифференциального уравнения является его линейность. Если неизвестная функция и производные входят в уравнение в степенях не выше первой и не умножаются друг на друга, то дифференциальное уравнение является линейным. В противном случае оно считается нелинейным.

Другим важным признаком, по которому подразделяются дифференциальные уравнения, является их порядок. Порядком дифференциального уравнения называют максимальный порядок производной неизвестной функции, входящей в уравнение. В зависимости от величины порядка различают дифференциальные уравнения первого порядка и дифференциальные уравнения высших порядков – второго, третьего и т. д.

По признаку зависимости коэффициентов, являющихся множителями при неизвестной функции и производных, от аргументов искомой функции дифференциальные уравнения бывают с постоянными коэффициентами, т. е. не зависящими от аргументов, и переменными коэффициентами, т. е. зависящими от них.

По признаку наличия свободного члена дифференциальные уравнения подразделяются на однородные и неоднородные. Если такой член то-

ждественно равен нулю для всех значений независимых переменных, то дифференциальное уравнение считается однородным, в противном случае оно неоднородное.

Решениями дифференциального уравнения называются функции, обращающие его в тождество при их подстановке в уравнение. Поскольку любые реальные объекты и процессы существуют и протекают во времени, а также имеют физические границы, то на некоторые значения искомой функции и производных могут накладываться ограничения при определенных значениях ее аргументов. Такие ограничения, связанные с некоторым моментом времени, называются начальными условиями задачи, и их число равняется порядку уравнения. Ограничения, которые накладываются на искомую функцию и производные при определенных значениях независимых переменных и не зависящие от времени, называются граничными условиями задачи.

При решении дифференциальных уравнений, связанных с инженерными приложениями, встречаются следующие разновидности задач:

- начальная задача или задача Коши – решение дифференциального уравнения заключается в отыскании функции, удовлетворяющей этому уравнению и начальным условиям;
- краевая или граничная задача – решение дифференциального уравнения заключается в отыскании функции, удовлетворяющей этому уравнению и граничным условиям;
- смешанная задача – решение дифференциального уравнения заключается в отыскании функции, удовлетворяющей этому уравнению, начальным и граничным условиям.

Дифференциальные уравнения, встречающиеся в инженерных приложениях, как правило, не могут быть решены точно. Приближенные методы их решения делятся на две группы:

- аналитические методы, дающие приближенное решение уравнения в виде предела некоторой последовательности элементарных функций или их квадратур;
- численные методы, дающие приближенное решение в виде таблицы значений искомой функции для ряда значений ее аргументов из области их задания.

Существующие численные методы решения дифференциальных уравнений позволяют получать числовые значения искомой функции с требуемой точностью.

4.2. Численные методы решения начальной задачи для обыкновенных линейных дифференциальных уравнений

Начальная задача может быть связана как с решением отдельного дифференциального уравнения первого или высшего порядков, так и систем таких уравнений. Рассмотрим кратко суть начальной задачи для каждого случая.

Обыкновенное линейное дифференциальное уравнение первого порядка в общем случае имеет вид

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y). \quad (4.2.1)$$

Если функция $f(x, y)$, стоящая в правой части (4.2.1), имеет частную производную по аргументу y непрерывную в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) , то для уравнения (4.2.1) существует единственная функция

$$y = y(x), \quad (4.2.2)$$

являющаяся его решением и удовлетворяющая условию

$$y(x_0) = y_0. \quad (4.2.3)$$

Условие (4.2.3) называется начальным условием уравнения (4.2.1). Начальная задача для уравнения (4.2.1) заключается в отыскании функции (4.2.2), удовлетворяющей начальному условию (4.2.3).

Начальная задача для системы обыкновенных линейных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad (4.2.4)$$

где

$$\frac{dy}{dx} = \begin{pmatrix} \frac{dy_1}{dx} \\ \vdots \\ \frac{dy_n}{dx} \end{pmatrix} = f = \begin{pmatrix} f_1(x, y_1, \dots, y_n) \\ \vdots \\ f_n(x, y_1, \dots, y_n) \end{pmatrix}$$

заключается в отыскании функций $y_1, \dots, y_n$, удовлетворяющих системе (4.2.4) и начальным условиям

$$y_1(x_0) = y_{10}, \dots, y_n(x_0) = y_{n0}. \quad (4.2.5)$$

В (4.2.5) $y_{10}, \dots, y_{n0}$ – заданные числа, накладывающие ограничения на значения искомых функций $y_1, \dots, y_n$ при некотором начальном значении аргумента $x = x_0$.

Начальная задача для обыкновенного линейного дифференциального уравнения n -ного порядка, разрешенного относительно n -ной производной и имеющего вид

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}), \quad (4.2.6)$$

заключается в отыскании функции $y = y(x)$, удовлетворяющей (4.2.6) и начальным условиям

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y^{(n-1)}_0. \quad (4.2.7)$$

В (4.2.7) $y_0, y'_0, \dots, y^{(n-1)}_0$ – заданные числа, накладывающие ограничения на значения искомой функции и ее производных до $(n-1)$ -го порядка при некотором начальном значении аргумента $x = x_0$.

Начальная задача для обыкновенного линейного дифференциального уравнения n -ного порядка с помощью подстановок

$$y_1 = y', \quad y_2 = y'', \quad \dots, \quad y_{n-1} = y^{(n-1)}$$

приводится к начальной задаче для следующей эквивалентной системы обыкновенных линейных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= y_1 \\ \frac{dy_1}{dx} &= y_2 \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \quad (4.2.8)$$

$$\begin{aligned} \frac{dy_{n-2}}{dx} &= y_{n-1} \\ \frac{dy_{n-1}}{dx} &= f(x, y_1, \dots, y_{n-1}) \end{aligned}$$

с начальными условиями (4.2.7).

Начальные задачи, как правило, решаются приближенно численными методами. К числу эффективных численных методов решения начальных задач в инженерных приложениях следует отнести шаговый метод.

Суть этого метода заключается в замене интегрирования уравнения (4.2.1) или системы уравнений (4.2.4) приближенным вычислением значений искомой функции $y(x)$ или $y(x)$ для заданного отрезка интегрирования

$$x_0 \leq x \leq a \quad (4.2.9)$$

в отдельных его точках. Для этого на отрезке интегрирования (4.2.9) с некоторым шагом Δx строится система равноотстоящих точек

$$x_{i+1} = x_i + \Delta x, \quad i = 0, 1, \dots, n. \quad (4.2.10)$$

В этих точках по конечно-разностным формулам вычисляются приближенные значения $y(x)$

$$\text{или } y(x) \quad y_{i+1} = y_i + \Delta y_i \quad (4.2.11)$$

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i$$

Приращения Δy_i или Δy_i в формуле (4.2.11) являются некоторыми функциями от шага Δx

$$\Delta y_i = F(\Delta x)$$

$$\Delta y_i = F(\Delta x) \quad (4.2.12)$$

и могут вычисляться по-разному. В зависимости от способа вычисления приращений (4.2.12) существуют разновидности метода конечных разностей. Наиболее известными среди них являются метод Эйлера и метод Рунге-Кутты.

Метод Эйлера. Метод Эйлера является простейшим конечно-разностным методом численного решения начальной задачи для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка и систем таких уравнений. Формула (4.2.12) для одного уравнения имеет вид

$$\Delta y_i = \Delta x \cdot f(x_i, y_i) \quad (4.2.13)$$

и для системы уравнений –

$$\Delta y_i = \Delta x \cdot f(x_i, y_i). \quad (4.2.14)$$

Достоинством метода Эйлера является его простота. Однако точность метода невысокая, его погрешность на каждом шаге имеет порядок $O(\Delta x^2)$, и поэтому для получения удовлетворительных результатов необходимо принимать достаточно малый шаг Δx .

Второй порядок точности позволяют получить различные модификации метода Эйлера. Среди таких модификаций, прежде всего, следует назвать метод Эйлера-Коши. Формула (4.2.12) в этом случае для одного уравнения принимает вид

$$\Delta y_i = \Delta x \cdot f\left(x_i + \frac{\Delta x}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}\right)$$

$$k_1 = \Delta x \cdot f(x_i, y_i) \quad (4.2.15)$$

и для системы уравнений –

$$\Delta y_i = \Delta x \cdot f\left(x_i + \frac{\Delta x}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}\right)$$

$$k_1 = \Delta x \cdot f(x_i, y_i) \quad (4.2.16)$$

Погрешность данной модификации метода Эйлера на каждом шаге имеет порядок $O(\Delta x^3)$.

Метод Рунге-Кутты. Метод Рунге-Кутты позволяет получать численное решение начальной задачи для обыкновенного дифференциального

уравнения первого порядка и систем таких уравнений более высокого порядка точности и имеет несколько вычислительных схем. При решении строительных задач обычно используют вычислительную схему, дающую четвертый порядок точности.

Формула (4.2.12) для уравнения (4.2.1) в этом случае принимает вид

$$\Delta y_i = \frac{1}{6} (k_i^i + 2k_1^i + 2k_2^i + k_3^i), \quad (4.2.17)$$

где

$$k_1^i = \Delta x f(x_i, y_i)$$

$$k_2^i = \Delta x f\left(x_i + \frac{\Delta x}{2}, y_i + \frac{k_1^i}{2}\right)$$

$$k_3^i = \Delta x f\left(x_i + \frac{\Delta x}{2}, y_i + \frac{k_2^i}{2}\right)$$

$$k_4^i = \Delta x f(x_i + \Delta x, y_i + k_3^i)$$

Для системы уравнений (4.2.4) соответствующие формулы имеют вид

$$\Delta y_i = \frac{1}{6} (k_i^i + 2k_1^i + 2k_2^i + k_3^i), \quad (4.2.18)$$

где

$$k_1^i = \Delta x f(x_i, y_i)$$

$$k_2^i = \Delta x f\left(x_i + \frac{\Delta x}{2}, y_i + \frac{k_1^i}{2}\right)$$

$$k_3^i = \Delta x f\left(x_i + \frac{\Delta x}{2}, y_i + \frac{k_2^i}{2}\right)$$

$$k_4^i = \Delta x f(x_i + \Delta x, y_i + k_3^i)$$

Погрешность метода Рунге-Кутты на каждом шаге имеет порядок $O(\Delta x^5)$.

На практике для оценки погрешности вычислений шаговыми методами используют двойной счет с шагом Δx и $0.5\Delta x$. Если расхождения полученных значений не превышает заданной предельной абсолютной погрешности во всех совпадающих узловых точках, то точность приближенного вычисления искомых функций может считаться удовлетворительной.

4.3. Численные методы решения краевой задачи для обыкновенных линейных дифференциальных уравнений

Краевые задачи, связанные со строительными объектами и процессами, часто описываются обыкновенными линейными дифференциальными уравнениями второго порядка. К таким уравнениям приводят, напри-

мер, задача определения перемещений в балках при изгибе и задача устойчивости сжатых стержней.

Обыкновенное линейное дифференциальное уравнение второго порядка в общем случае имеет вид

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x). \quad (4.3.1)$$

Входящие в уравнение коэффициенты $p(x), q(x)$ и свободный член $f(x)$ являются известными функциями. В частном случае эти величины могут быть константами, а отдельные из них – равняться нулю.

Краевая задача для уравнения (4.3.1) заключается в отыскании функции $y(x)$, которая внутри отрезка

$$x \in [a, b] \quad (4.3.2)$$

удовлетворяет уравнению (4.3.1), а на его концах некоторым дополнительным условиям вида

$$\begin{aligned} \alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) &= A \\ \beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b) &= B \\ \alpha_i^2 + \beta_i^2 &> 0, \quad (i = 0, 1) \end{aligned}, \quad (4.3.3)$$

где $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1, A, B$ – заданные числа. Условия (4.3.3), которые накладывают ограничения на искомую функцию $y(x)$, называются краевыми или граничными условиями для уравнения (4.3.1). При этом считается, что входящие в (4.3.1) функции $p(x), q(x), f(x)$ являются непрерывными на отрезке (4.3.2).

Среди численных методов решения краевой задачи для уравнения (4.3.1) наиболее простым является метод конечных разностей. При решении краевой задачи этим методом отрезок (4.3.2) разбивается на n равных частей

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} \quad (4.3.4)$$

и строится система равноотстоящих точек или узлов

$$\begin{aligned} x_i &= x_0 + i\Delta x, \quad (i = 0, 1, \dots, n) \\ x_0 &= a, \quad x_n = b \end{aligned} \quad (4.3.5)$$

Входящие в уравнение (4.3.1) производные y', y'' аппроксимируются во внутренних узлах следующими приближенными конечно-разностными отношениями

$$y'_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x}, \quad y''_i = \frac{y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i}{\Delta x^2}. \quad (4.3.6)$$

Конечно-разностные отношения в наружных узлах для производной y' , входящей в граничные условия (4.3.3), имеют вид

$$y'_0 = \frac{y_1 - y_0}{\Delta x}, \quad y'_n = \frac{y_n - y_{n-1}}{\Delta x}. \quad (4.3.7)$$

Входящие в формулы (4.3.6) и (4.3.7) y_i, y'_i, y'_i ($i=0,1,\dots,n$) обозначают приближенные значения искомой функции $y(x)$ и ее производных $y'(x)$, $y''(x)$ в узлах x_i .

Подставляя (4.3.6) и (4.3.7), соответственно, в дифференциальное уравнение и краевые условия, получим следующую систему конечно-разностных соотношений

$$\left. \begin{aligned} \alpha_0 y_0 + \alpha_1 \frac{y_1 - y_0}{\Delta x} &= A \\ \frac{y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i}{\Delta x^2} + p_i \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x} + q_i y_i &= f_i \quad (i=0,1,\dots,n-2) \\ \beta_0 y_n + \beta_1 \frac{y_n - y_{n-1}}{\Delta x} &= B \end{aligned} \right\} \quad (4.3.8)$$

После приведения подобных членов система (4.3.8) принимает вид

$$\left. \begin{aligned} (\alpha_0 \Delta x - \alpha_1) y_0 + \alpha_1 y_1 &= \Delta x A \\ k_i y_i + m_i y_{i+1} + y_{i+2} &= \Delta x^2 f_i \quad (i=0,1,\dots,n-2) \\ -\beta_1 y_{n-1} + (\beta_0 \Delta x + \beta_1) y_n &= \Delta x B \end{aligned} \right\}, \quad (4.3.9)$$

где

$$k_i = 1 - \Delta x p_i + \Delta x^2 q_i, \quad m_i = -2 + \Delta x p_i. \quad (4.3.10)$$

Таким образом, решение краевой задачи для дифференциального уравнения (4.3.1) с использованием формул (4.3.6) и (4.3.7) сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений (4.3.9) относительно $n+1$ узловых значений искомой функции $y(x)$. Система уравнений (4.3.9) относительно этих величин имеет следующую структуру. Первое и последнее уравнения содержат по два смежных неизвестных узловых значения функции, соответственно, y_0, y_1 и y_{n-1}, y_n . Каждое промежуточное уравнение системы ($i=1,\dots,n-1$) содержит по три смежных неизвестных узловых значения функции y_{i-1}, y_i, y_{i+1} . Следовательно, система уравнений (4.3.9) имеет относительно неизвестных величин трехчленную структуру.

Наиболее просто система линейных алгебраических уравнений, имеющая трехчленную структуру, решается методом прогонки. Суть метода заключается в следующем. Выразим из первого уравнения системы (4.3.9), имеющего двучленную структуру, y_0 через y_1

$$y_0 = \frac{\alpha_1 y_1 - A \Delta x}{\alpha_1 - \alpha_0 \Delta x} \quad (4.3.11)$$

и подставим во второе уравнение системы. Второе уравнение, включающее искомые значения y_0, y_1, y_2 , после подстановки (4.3.11) будет иметь двучленную структуру. Выразим y_1 через y_2 , подставим в следующее уравнение, и оно также примет двучленную структуру. Продолжая аналогичный процесс последовательных подстановок для всех трехчленных уравнений системы (4.3.9), получим рекуррентную формулу, связывающую неизвестное узловое значение искомой функции меньшего номера через смежное с ней узловое значение большего номера

$$y_{i+1} = c_i(d_i - y_{i+2}) \quad (i=0, 1, \dots, n-2) \quad (4.3.12)$$

Входящие в (4.3.12) величины c_i, d_i находятся по формулам следующего вида. При $i=0$

$$c_0 = \frac{\alpha_1 - \alpha_0 \Delta x}{m_0(\alpha_1 - \alpha_0 \Delta x) + k_0 \alpha_1} \quad (4.3.13)$$

$$d_0 = \frac{k_0 A \Delta x}{\alpha_1 - \alpha_0 \Delta x} + f_0 \Delta x^2$$

и при $i=1, 2, \dots, n-2$

$$c_i = \frac{1}{m_i - k_i c_{i-1}} \quad (4.3.14)$$

$$d_i = f_i \Delta x^2 - k_i c_{i-1} d_{i-1}$$

Подставим в последнее уравнение системы (4.3.9) значение y_{n-1} , найденное согласно (4.3.12), и получим формулу для y_n

$$y_n = \frac{\beta_1 c_{n-2} d_{n-2} + B \Delta x}{\beta_1(1 + c_{n-2}) + \beta_0 \Delta x} \quad (4.3.15)$$

Вычисление узловых значений искомой функции по полученным формулам включает прямой и обратный ходы. Прямой ход состоит в получении численных значений m_i, k_i, c_i, d_i в порядке возрастания индекса i ($i=0, 1, 2, \dots, n-2$) по формулам (4.3.10), (4.3.13), (4.3.14). Обратный ход заключается в вычислении неизвестных значений искомой функции $y(x)$ в узлах x_i в порядке убывания индекса i по формулам (4.3.15), (4.3.12), (4.3.11).

Для оценки погрешности решения краевой задачи методом конечных разностей используют двойной шаг Δx и $0.5\Delta x$. Требуемая точность вычисления узловых значений искомой функции $y(x)$ приближенно считается достигнутой, если выполняется условие

$$\left| y^* - y(x_i) \right| \approx \frac{1}{3} \left| y_i^* - y_i \right| \leq \varepsilon. \quad (4.3.16)$$

Здесь $y(x_i)$ – точное значение искомой функции в узле x_i , y_i и y_i^* – приближенные значения искомой функции в узле x_i , соответственно, с шагом Δx и $0,5\Delta x$, а ϵ – заданная точность решения краевой задачи.

4.4. Численные методы решения линейных дифференциальных уравнений в частных производных

Поведение целого ряда объектов и процессов в строительных задачах описывается на языке дифференциальных уравнений в частных производных. Встречающиеся в строительных задачах такие уравнения распадаются на два больших класса. Уравнения одного класса описывают некоторые нестационарные объекты или процессы, в которых характеризующие их числовые величины заметно меняются во времени. Решениями таких уравнений являются функции, зависящие от пространственных координат и времени. Примером уравнения этого класса может служить уравнение свободных колебаний простой балки. Уравнения другого класса описывают различные стационарные объекты или процессы, для которых характеризующие их числовые величины во времени неизменны или этими изменениями можно пренебречь. Решениями таких уравнений являются функции, зависящие только от пространственных координат. Примером уравнения этого класса является уравнение кручения цилиндрического стержня.

Достаточно часто решение строительных задач связано с линейными уравнениями второго порядка, когда искомая функция является функцией двух независимых переменных. В общем случае такие уравнения имеют вид

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + F u = G. \quad (4.4.1)$$

Здесь $u = u(x, y)$ – искомая функция; A, B, C, D, E, F, G – коэффициенты и свободный член уравнения, которые являются константами или заданными функциями независимых переменных x и y . В зависимости от величины $B^2 - 4AC$ уравнения вида (4.4.1) бывают трех типов: параболический –

$B^2 - 4AC = 0$, гиперболический – $B^2 - 4AC > 0$ и эллиптический – $B^2 - 4AC < 0$. Нестационарные объекты и процессы обычно описываются уравнениями двух первых типов, и их изучение может быть связано с решением начальной или смешанной задач. Стационарные объекты или процессы описываются уравнениями эллиптического типа, и их изучение связано с решением краевой задачи.

Краевая задача для уравнения эллиптического типа заключается в отыскании функции $u = u(x, y)$, удовлетворяющей этому уравнению внутри заданной двумерной области D произвольной формы, и некоторым дополнительным условиям на границе S этой области. При решении прикладных задач возможны следующие случаи граничных условий.

Первый тип граничных условий накладывает ограничения на значения искомой функции на границе области

$$u|_S = f(x, y). \quad (4.4.2)$$

Условие (4.4.2) называется граничным условием Дирихле.

Второй тип граничных условий связан с ограничениями для значений внешней нормальной производной искомой функции на границе области

$$\frac{\partial u}{\partial n}|_S = \varphi(x, y). \quad (4.4.3)$$

Условие (4.4.3) называется граничным условием Неймана.

Третий тип граничных условий имеет вид

$$\left| \frac{\partial u}{\partial n} + hu \right|_S = g(x, y). \quad (4.4.4)$$

Условие (4.4.4) является объединением граничных условий двух первых типов и называется граничным условием смешанного типа.

И наконец, при решении прикладных задач возможны случаи, когда на границе области S могут существовать участки, имеющие разные типы граничных условий из числа (4.4.2) – (4.4.4).

Как и в случае обыкновенных дифференциальных уравнений для численного решения краевой задачи обычно применяют метод конечных разностей. Для этого на заданную область D наносится прямоугольная сетка из вертикальных и горизонтальных параллельных линий с шагами Δx и Δy

$$\begin{aligned} x_i &= x_0 + i\Delta x & y_k &= y_0 + k\Delta y \end{aligned} \quad \begin{aligned} (i &= 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \\ (k &= 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \end{aligned}$$

Полученные точки пересечения параллельных линий называются узлами сетки (i, k) . При этом могут образоваться два типа узлов: узлы, принадлежащие области D , включая границу S , и узлы, лежащие за пределами области и ее границы. Среди узлов первого типа различают внутренние и граничные узлы. Внутренними называются узлы, у которых четыре соседних узла являются узлами первого типа. Остальные узлы первого типа яв-

ляются граничными, непосредственно примыкающими к границе S . Множество внутренних узлов образует сеточную область D_{ik} , а совокупность граничных узлов образует границу этой области S_{ik} . Значения искомой функции $u = u(x, y)$ в сеточной области обозначаются u_{ik} и являются неизвестными величинами, подлежащими определению.

Для определения сеточных значений искомой функции производные, входящие в уравнение (4.4.1), для каждого внутреннего узла аппроксимируются разностными отношениями следующего вида

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{ik} &\approx \frac{u_{i+1k} - u_{i-1k}}{2\Delta x} \\ \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{ik} &\approx \frac{u_{ik+1} - u_{ik-1}}{2\Delta y} \\ \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_{ik} &\approx \frac{u_{i+1k} - 2u_{ik} + u_{i-1k}}{\Delta x^2} \\ \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)_{ik} &\approx \frac{u_{ik+1} - 2u_{ik} + u_{ik-1}}{\Delta y^2} \\ \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right)_{ik} &\approx \frac{u_{i+1k+1} - u_{i+1k-1} - u_{i-1k+1} + u_{i-1k-1}}{4\Delta x \Delta y} \end{aligned} \quad (4.4.5)$$

С учетом формул (4.4.5) уравнение (4.4.1) заменяется системой конечно-разностных отношений, содержащих сеточные и граничные значения искомой функций

$$\begin{aligned} a_{ik} \frac{u_{i+1k} - 2u_{ik} + u_{i-1k}}{\Delta x^2} + b_{ik} \frac{u_{i+1k+1} - u_{i+1k-1} - u_{i-1k+1} + u_{i-1k-1}}{4\Delta x \Delta y} + \\ + c_{ik} \frac{u_{ik+1} - 2u_{ik} + u_{ik-1}}{\Delta y^2} + d_{ik} \frac{u_{i+1k} - u_{i-1k}}{2\Delta x} + e_{ik} \frac{u_{ik+1} - u_{ik-1}}{2\Delta y} + f_{ik} u_{ik} = g_{ik} \end{aligned} \quad (4.4.6)$$

$(i, k) \in D_{ik}$

Здесь $a_{ik}, b_{ik}, c_{ik}, d_{ik}, e_{ik}, f_{ik}, g_{ik}$ – значения коэффициентов и свободного члена уравнения (5.4.1) в сеточной области.

Дополняя (4.4.6) конечно-разностными соотношениями, аппроксимирующими граничные условия задачи, получим систему неоднородных линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных сеточных значений искомой функции.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Проверьте, как Вы усвоили следующие понятия:

- решение дифференциального уравнения;
- начальные условия;
- граничные условия;
- начальная задача;
- краевая задача;
- смешанная задача.

2. Проверьте, как Вы сумеете воспроизвести:

- классификацию дифференциальных уравнений;
- формулировку начальной задачи для обыкновенного линейного дифференциального уравнения первого порядка;
- формулировку начальной задачи для системы обыкновенных линейных дифференциальных уравнений первого порядка;
- формулировку начальной задачи для обыкновенного линейного дифференциального уравнения высшего порядка;
- суть шагового метода решения начальной задачи;
- алгоритм метода Эйлера;
- алгоритм метода Рунге-Кутты;
- оценку погрешности шагового метода решения начальной задачи;
- алгоритм метода конечных разностей;
- суть метода прогонки;
- оценку погрешности решения краевой задачи методом конечных разностей.

ТЕМА 5. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ

5.1. Постановка и разновидности задачи оптимизации

Любая задача оптимизации рассматривается как некоторое мероприятие, преследующее определенную цель. Например, при проектировании строительных конструкций такой целью может быть их минимальный вес или минимальная стоимость. Степень достижения поставленной цели характеризует эффективность мероприятия. Эффективность мероприятия зависит от ряда факторов, распадающихся на две группы и влияющих на его исход.

Одна группа факторов заранее известна и связана с неизменяемыми условиями проведения мероприятия. Количественно эти факторы описываются некоторыми заданными постоянными величинами $c_1, \dots, c_m$, которые являются параметрами задачи и не подлежат изменению при ее решении. В строительных задачах такими параметрами являются, например, объемный вес стали, стоимость одного кубометра бетона, стоимость одной тонны стали и другие числовые константы объекта или процесса.

Другая группа факторов связана с изменяемыми условиями проведения мероприятия. Такие факторы называются элементами решения задачи. Количественно они описываются при помощи некоторого набора переменных величин $x_1, \dots, x_n$, которые в ходе решения задачи могут изменяться в заданных пределах и должны удовлетворять определенным ограничениям. Элементами решения в строительных задачах являются, например, геометрические характеристики конструкций, механические характеристики материала конструкций, количество самих конструкций и другие переменные величины, влияющие на технико-экономическую эффективность сооружения.

Ограничения, налагаемые на элементы решения, могут иметь вид равенств

$$g_s(x_1, \dots, x_n, c_1, \dots, c_m) = 0 \quad (s=1, 2, \dots, p), \quad (5.1.1)$$

неравенств

$$\varphi_t(x_1, \dots, x_n, c_1, \dots, c_m) \geq 0 \quad (t=1, 2, \dots, q) \quad (5.1.2)$$

или одновременно и первый и второй вид. Входящие в (5.1.1), (5.1.2)

$g_s(x_1, \dots, x_n, c_1, \dots, c_m)$ и $\varphi_t(x_1, \dots, x_n, c_1, \dots, c_m)$ являются некоторыми известными математическими выражениями, связывающими элементы решения $x_1, \dots, x_n$ и заданные параметры $c_1, \dots, c_m$. Кроме того, элементы решения могут иметь ограничения по знаку. В строительных задачах такие ограничения имеют вид

$$x_j \geq 0 \quad (j=1, \dots, n), \quad (5.1.3)$$

так как элементы решения таких задач не могут быть отрицательными величинами.

Показателем эффективности мероприятия является некоторая величина F , связанная функциональной зависимостью с элементами решения и зависящая от заданных параметров

$$F=f(x_1, \dots, x_n, c_1, \dots, c_m). \quad (5.1.4)$$

Значения функции (5.1.4) позволяют количественно оценивать степень достижения поставленной цели, и она называется целевой функцией. Показателями эффективности в оптимизационных строительных задачах могут быть, например, вес, стоимость, трудоемкость и другие физические или технико-экономические показатели возводимого сооружения.

Математические выражения (5.1.1) – (5.1.4) описывают оптимизационную задачу, которая формулируется следующим образом: при заданных параметрах $c_1, \dots, c_m$ найти элементы решения $x_1, \dots, x_n$, удовлетворяющие ограничениям (5.1.1) – (5.1.3), при которых целевая функция (5.1.4) принимает наибольшее или наименьшее значение. Элементы решения, при которых достигаются экстремальные значения целевой функции, называются оптимальным решением задачи.

Таким образом, получение оптимального решения связано с математической задачей нахождения экстремальных значений функции n переменных с ограничениями на область задания функции. Применение классического метода определения экстремальных значений функций, основанного на отыскании значений переменных, обращающих в нуль частные производные функции по этим переменным, при решении задач оптимизации носит ограниченный характер.

Во-первых, такой метод неприменим для линейной целевой функции. Во-вторых, при наличии ограничений на элементы решения оптимальное решение может достигаться не в точке, где производные обращаются в нуль, а на границе области задания целевой функции. И, в-третьих, если элементы решения изменяются дискретно, то производных у целевой функции не существует вообще.

Поэтому классическая теория математического анализа, как правило, не позволяет найти решение задачи оптимизации (5.1.1) – (5.1.4). Методы решения такой задачи предлагаются областью математики, которая называется математическим программированием. Эти методы основаны на алгоритмической форме нахождения оптимального решения. Разными разделами математического программирования предлагаются алгоритмы получения численного решения задач оптимизации, отличающихся видом целевой функции и ограничений на область ее задания. Для отыскания оптимальных решений в строительных задачах наиболее часто используются вычислительные процедуры линейного программирования.

Линейное программирование позволяет получить численное решение задачи оптимизации, если целевая функция (5.1.4) и система ограничений (5.1.1), (5.1.2) линейны относительно всех элементов решения. Оптимизационные задачи, решаемые методами линейного программирования, называются задачами линейного программирования. Классическими оптимизационными строительными задачами, которые решаются методами линейного программирования, являются задачи оптимального проектирования. Цель таких задач заключается в получении наилучшего проектного решения с учетом некоторых требований. Например, задача о минимуме веса или стоимости несущей конструкции при обеспечении условий ее надежности – прочности, жесткости и устойчивости.

5.2. Формы задачи линейного программирования

Существует три вида формулировок задачи линейного программирования – общая задача, стандартная задача и основная задача.

В общей задаче линейного программирования требуется для заданной линейной целевой функции

$$F = \sum_{j=1}^n c_j x_j \quad (5.2.1)$$

найти n неотрицательных элементов решения $x_1, \dots, x_n$

$$x_j \geq 0 \quad (j=1, \dots, n), \quad (5.2.2)$$

которые максимизируют или минимизируют целевую функцию и удовлетворяют некоторой системе m ограничений ($m < n$) в общей форме, включающей как ограничения-неравенства, так и ограничения-равенства

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i \quad (i=1, \dots, k), \quad (5.2.3)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \quad (i=k+1, \dots, s), \quad (5.2.4)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad (i=s+1, \dots, m). \quad (5.2.5)$$

Коэффициенты a_{ij} и свободные члены b_i в ограничениях (5.2.2) – (5.2.3) являются заданными параметрами решаемой задачи оптимизации.

В строительных задачах критерии оптимальности могут быть связаны как с нахождением минимума целевой функции, так и ее максимума. Например, критериями оптимальности в строительных задачах являются максимальная прибыль цеха по изготовлению железобетонных плит или минимальная стоимость квадратного метра площади возводимого жилого здания.

В задачах линейного программирования наряду с общей формой ограничений используются стандартная и каноническая форма ограничений. При стандартной форме все ограничения имеют вид неравенств (5.2.3)

$$\sum_{j=1}^m a_{ij} x_j \geq b_i \quad (i = 1, \dots, m),$$

а в случае канонической формы – вид равенств (5.2.5)

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad (i = 1, \dots, m).$$

Задачи линейного программирования с использованием ограничений в стандартной или канонической формах называются, соответственно, стандартной и основной задачами линейного программирования.

Методы решения задач линейного программирования основаны на использовании канонической формы ограничений. Поэтому для решения задач линейного программирования осуществляется приведение ограничений, имеющих вид неравенств, к канонической форме.

При переходе от общей и стандартной задачи линейного программирования к основной задаче левые части ограничений-неравенств рассматриваются как некоторые добавочные элементы решения

$$y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + b_i \quad (i = 1, \dots, s).$$

Для того чтобы добавочные элементы решения, связанные с ограничениями (5.2.4), удовлетворяли требованию неотрицательности (5.2.2), ограничения такого вида приводятся к виду (5.2.3) переменной знака в обеих частях. В строительных задачах все ограничения на область задания линейной целевой функции, как правило, формулируются в виде неравенств.

Таким образом, переход от общей или стандартной задачи к основной задаче линейного программирования сопровождается увеличением числа элементов решения. В их число, наряду с исходными элементами решения $x_1, \dots, x_n$, включаются добавочные элементы $y_1, \dots, y_s$. При этом целевая функция (5.2.1) выражается только через исходные элементы решения. Можно считать, что добавочные элементы входят в целевую функцию с нулевыми коэффициентами.

5.3. Основная задача линейного программирования

При решении основной задачи линейного программирования отыскиваются неотрицательные элементы решения

$$x_j \geq 0 \quad (j=1, \dots, n), \quad (5.3.1)$$

[illegible]

Одним из приемов отыскания наименьших значений линейной функции F является отыскание наибольших значений эквивалентной функции $F' = -F$.

Известно, что с помощью гауссовых исключений систему уравнений (5.3.2) можно заменить эквивалентной системой

и, следовательно, выразить базисные переменные через свободные переменные

Соотношения (5.3.5) являются общим решением системы (5.3.2).

Любое частное решение системы (5.3.2), удовлетворяющее условиям (5.3.1), называется допустимым решением основной задачи линейного

программирования. Допустимое решение, при котором целевая функция принимает минимальное значение, является оптимальным. Совокупность допустимых решений в линейном пространстве, образованном вещественным множеством элементов решения $x_1, \dots, x_n$, образует область допустимых решений. Границы этой области определяются условиями (5.3.1) и (5.3.2).

Известно, что областью допустимых решений основной задачи линейного программирования является выпуклый n -мерный многогранник, каждая грань которого описывается одним из уравнений системы (5.3.2). Например, при $n = 2$ областью допустимых решений является плоский многоугольник, а при $n = 3$ – это трехмерный многогранник.

Особую роль при решении основной задачи линейного программирования играют допустимые базисные решения системы (5.3.2), в которых все базисные переменные принимают неотрицательные значения. Такие решения называются опорными решениями. Доказано, что каждому опорному решению соответствует вершина многогранника решений, а оптимальное решение, в случае его существования, принадлежит множеству опорных решений.

Таким образом, для нахождения оптимального решения задачи можно найти значения целевой функции во всех вершинах многогранника решений. Опорное решение, соответствующее вершине многогранника, в которой достигается экстремальное значение целевой функции, и является оптимальным решением основной задачи. Однако метод «слепого» перебора всех опорных решений мало пригоден для решения прикладных оптимизационных задач из-за его громоздкости и практической неприемлемости для численной реализации на ЭВМ. Основным методом решения основной задачи линейного программирования является симплексный метод.

5.4. Симплексный метод решения основной задачи линейного программирования

В основе симплексного метода лежит итерационная процедура упорядоченного перехода от одного опорного решения задачи к другому. Каждый шаг такой процедуры исправляет предыдущее опорное решение и последовательно приближает значения целевой функций к экстремальному значению, т. е. уменьшает ее при отыскании минимума и увеличивает при отыскании максимума функции.

Для нахождения начального опорного решения система уравнений (5.3.2) приводится к эквивалентному виду

После осуществления m аналогичных шагов выделяется некоторый набор m базисных переменных, выраженных через $n - m$ свободных переменных

$$b_i^m \geq 0 \quad (i = 1, \dots, m)$$

$$b_i^m = \frac{b_i^{m-1}}{a_{ks}^{m-1}}, \quad a_{kj}^m = \frac{a_{kj}^{m-1}}{a_{ks}^{m-1}} \quad (j \neq k)$$

$$a_{ij}^m = a_{ij}^{m-1} - a_{kj}^{m-1} \frac{a_{is}^{m-1}}{a_{ks}^{m-1}} \quad (i \neq k) \quad . \quad (5.4.5)$$

$$(i = 1, \dots, m; j = m+1, \dots, n)$$
$$\begin{aligned} x_i &= b_i^m \quad (i = 1, \dots, m) \\ x_j &= 0 \quad (j = m + 1, \dots, n) \end{aligned}$$

Проверку оптимальности начального опорного решения осуществляют с помощью целевой функции, выраженной через свободные переменные

где $c'_0 = \sum_{i=1}^m c_{ii} b^m$; $c'_j = c_j - \sum_{i=1}^m c_{ij} a^m$. Если параметры c'_j в (5.4.6) удовлетво-

$$c'_j < 0, \quad (5.4.7)$$
$$F_{max}=c'_0.$$

При отыскании наименьшего значения целевой функции критерием оптимальности полученного опорного решения является удовлетворение параметров c'_j в выражении (5.4.6) требованию

$$c'_j > 0. \quad (5.4.8)$$

В этом случае величина целевой функции не может быть уменьшена за счет изменения неотрицательных свободных переменных. Поэтому опорное решение также является оптимальным, но соответствует минимальному значению целевой функции

$$F_{\min} = c'_0.$$

В случае неоптимальности начального опорного решения для нахождения нового опорного решения в системе уравнений (5.4.4) осуществляется следующий шаг жорданова исключения. Это позволяет произвести корректировку базисных переменных и включить в их число свободную переменную при параметре целевой функции c'_j , не удовлетворяющем критерию оптимальности. В случае нескольких свободных переменных с параметрами c'_j , не удовлетворяющих такому критерию, выбирается переменная с наибольшим по модулю параметром. Разрешающий элемент определяется из числа положительных коэффициентов разрешающего столбца в соответствии с указанными выше требованиями.

При корректировке базисных переменных получение новых элементов разрешающего столбца и разрешающей строки производится по формулам

$$\begin{aligned} a_{ks}^{m+1} &= \frac{1}{a_{ks}^m} a_{is}^{m+1} = \frac{a_{is}^m}{a_{ks}^m} \quad (i \neq k, i = 1, \dots, m) \\ b_k^{m+1} &= \frac{b_k^m}{a_{mks}^m} a_{kj}^{m+1} = \frac{a_{kj}^m}{a_{ks}^m} \quad (j \neq s, j = m+1, \dots, n) \end{aligned}$$

Для получения остальных элементов используются формулы

$$\begin{aligned} b_i^{m+1} &= \frac{b_i^m}{a_{ks}^m} a_{ij}^{m+1} = a_{ij}^m - a_{is}^m \frac{a_{kj}^m}{a_{ks}^m} \\ (i \neq k; i &= 1, \dots, m; j = m+1, \dots, n) \end{aligned}$$

Процесс нахождения новых опорных решений за счет корректировки базисных переменных продолжается, пока не будет найдено оптимальное решение или будет установлено его отсутствие.

Оптимальное решение не существует, если для коэффициента целевой функции c'_j , не удовлетворяющего критерию оптимальности, в соответствующем ему столбце нет ни одного положительного элемента. Для критерия (5.4.7) это означает, что линейная функция неограничена сверху, а для критерия (5.4.8) — снизу.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Проверьте, как Вы усвоили следующие понятия:

- оптимальное решение;
- оптимизационная задача;
- эффективность мероприятия;
- элементы решения;
- целевая функция;
- математическое программирование;
- линейное программирование;
- базисные и свободные переменные;
- базисное решение;
- допустимое решение;
- область допустимых решений;
- опорные решения;
- оценочное отношение переменной;
- разрешающий коэффициент;
- разрешающий столбец и строка матрицы.

2. Проверьте, как Вы сумеете воспроизвести:

- суть оптимизационной задачи;
- формулировку общей задачи линейного программирования;
- формулировку стандартной задачи линейного программирования;
- формулировку основной задачи линейного программирования;
- порядок приведения общей и стандартной формы ограничений к канонической форме ограничений;
- суть симплексного метода;
- порядок отыскания начального опорного решения;
- критерии оптимальности опорного решения;
- порядок корректировки опорного решения.

