

Контрольная работа

Пример

ЗАДАНИЕ. Компания производит полки для ванных комнат двух размеров – A и B . Агенты по продаже считают, что в неделю на рынке может быть реализовано до 550 полок. Для каждой полки типа A требуется 2 м^2 материала, а для полки типа B – 3 м^2 материала. Компания может получить до 1200 м^2 материала в неделю. Для изготовления одной полки типа A требуется 12 мин машинного времени, а для изготовления одной полки типа B – 30 мин; машину можно использовать 160 час в неделю. Если прибыль от продажи полок типа A составляет 3 денежных единицы, а от полок типа B – 4 ден. ед., то сколько полок каждого типа следует выпускать в неделю?

РЕШЕНИЕ. Составим математическую модель задачи. Пусть x_1 – количество полок вида A , x_2 – количество полок вида B , которые производятся в неделю (по смыслу задачи эти переменные неотрицательны). Прибыль от продажи такого количества полок составит $3x_1 + 4x_2$, прибыль требуется максимизировать. Выпишем ограничения задачи.

$x_1 + x_2 \leq 550$ – в неделю на рынке может быть реализовано до 550 полок.

Затраты материала: $2x_1 + 3x_2 \leq 1200$

Затраты машинного времени: $12x_1 + 30x_2 \leq 9600$.

Таким образом, приходим к задаче линейного программирования.

$$f = 3x_1 + 4x_2 \rightarrow \max,$$

$$x_1 + x_2 \leq 550,$$

$$2x_1 + 3x_2 \leq 1200,$$

$$12x_1 + 30x_2 \leq 9600,$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

Разбор задачи

Рассмотрим двухмерную задачу линейного программирования. Пусть требуется найти максимум линейной формы

$$\max F(x_1, x_2) = \max(x_1 + 2x_2)$$

при условии

$$x_1 + x_2 \leq 120, \quad 0 \leq x_1 \leq 100, \quad 0 \leq x_2 \leq 75.$$

Изобразим область, описываемую совокупностью ограничений на плоскости $x_1 O x_2$.

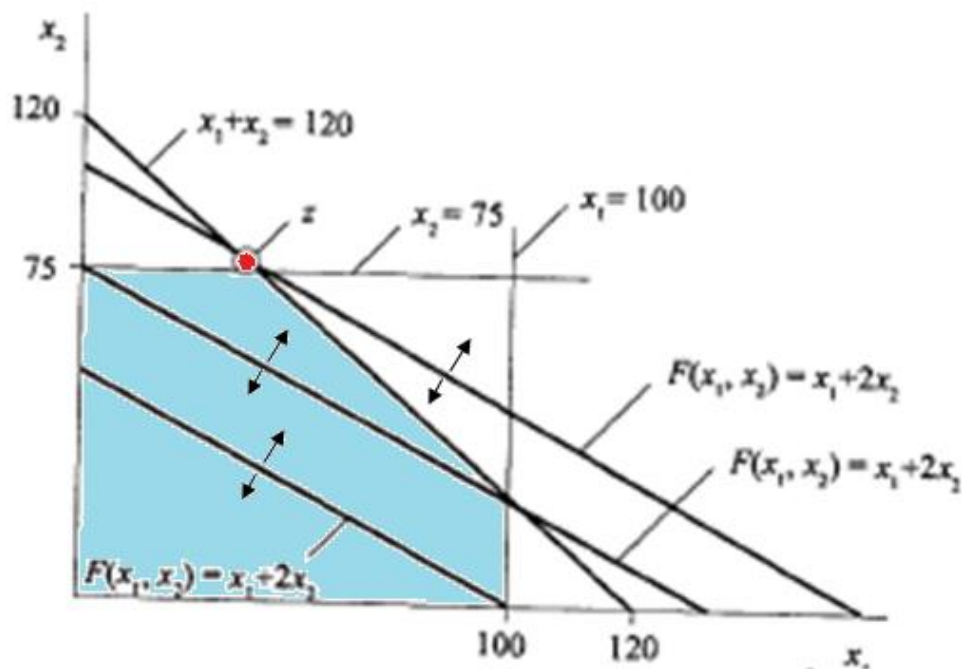


Рис.1. Графическое решение задачи линейного программирования.

Переменные x_1 и x_2 неотрицательные, поэтому множество точек, являющихся возможными решениями задачи, находятся в 1 квадранте.

Неравенству $x_1 + x_2 \leq 120$ удовлетворяет полуплоскость, лежащая ниже прямой $x_1 + x_2 = 120$.

Построив аналогичные прямые для остальных ограничений, получим многоугольник, множество точек которого (x_1, x_2) удовлетворяет всем неравенствам системы ограничений. Этот многоугольник и представляет собой область допустимых решений D .

Из множества точек (x_1, x_2) многоугольника необходимо выбрать такую, в которой функция $F(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2$ принимает максимальное значение. Для некоторого фиксированного значения F^* линейная функция

$F(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2$ представляет собой прямую линию.

Задаваясь различными значениями F^* , получим семейство параллельных прямых. Увеличение значений линейной функции соответствует перемещению прямой параллельно самой себе вверх. Следовательно, как видно из рисунка, максимальное значение целевой функции на допустимом множестве точек соответствует прямой, проходящей через точку z пересечения прямых $x_1 + x_2 = 120$ и $x_2 = 75$.

Решив эту систему, получим $x_1 = 45$. Тогда максимальное значение функции $F(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2 = 195$.

1. Задача о застройке микрорайона

Для застройки микрорайона имеются n типовых проектов зданий, в каждом из которых предусмотрено m типов квартир. Стоимость одного здания каждого типа соответственно равна $c_1, c_2, \dots, c_n$ рублей; количество квартир i – ого типа в одном доме j – ого типа равно a_{ij} ; потребность в квартирах j – ого типа – b_j .

Необходимо составить план застройки микрорайона, удовлетворяющий потребности в квартирах, для которого затраты на строительство будут минимальны.

Информацию удобно записать в таблице:

Таблица 1

Исходные данные

Типы Квартир Типы домов	1	...	j	...	n	Потребно сти в квартирах
1	a_{11}	...	a_{1j}	...	a_{1n}	b_1
...	...	...	...	...	...	...
I	a_{i1}	...	a_{ij}	...	a_{in}	b_i
...	...	...	...	...	...	...
M	a_{m1}	...	a_{mj}	...	a_{mn}	b_m
Стоимость одного дома каждого типа	c_1	...	c_j	...	c_n	

Обозначим через x_j – число домов j – ого типа, тогда вектор $x = \{x_1, \dots, x_n\}$ даст нам план застройки. Получаем следующую задачу линейного программирования:

найти такие числа $x_j \geq 0$ ($j=1, \dots, n$), которые удовлетворяют условиям:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i \quad (i=1, \dots, m)$$

и для которых функция Z (затраты на строительство)

$$Z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \text{ минимальные.}$$

.

Таблица 2

Исходные данные для выбора задания

Типы домов Типы квартир	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Потребности в квартирах
1	10	15	20	0	30	25	15	0	12	14	100
2	20	14	15	10	0	25	15	14	12	20	200
3	30	15	12	10	15	20	0	14	17	20	150
4	0	12	13	15	30	12	10	15	20	0	140
5	13	14	15	20	30	0	13	15	20	25	250
6	12	15	20	25	15	14	13	20	30	0	183
7	13	12	25	13	16	17	15	20	0	15	231
8	0	14	15	20	13	25	14	17	20	0	145
9	15	20	16	30	20	16	15	25	15	0	156
10	17	15	14	25	15	13	20	27	16	0	210
Стоимость одного дома каждого типа	10	15	20	14	12	15	20	10	15	14	

Задания

Для выполнения работы студент выбирает 4 строки таблицы и 2 столбца и решает графически задачу

Для заочников:

4 строки, начиная с i -й и 2 столбца, начиная с j -го,

где i - предпоследняя цифра зачетной книжки, а j - последняя.

Например – 4 первые строки и первые 2 столбца (1,1)

Исходные данные для примера

Типы домов Типы квартир	1	2	Потребности в квартирах
1	10	15	100
2	20	14	200
3	30	15	150
4	0	12	140
Стоимость одного дома каждого типа	10	15	

2. Построение сетевого графика

Предположим, что у нас есть некоторое задание, например строительство дома, и что это задание можно разделить на несколько видов деятельности, таких как закладка фундамента, установка крыши, электромонтаж и т.д. Часть этих действий может выполняться одновременно, в то время как некоторые действия должны быть полностью завершены, прежде чем можно будет приступить к другим действиям. Вопрос заключается в том, чтобы найти эффективный метод определения того, как спланировать действия таким образом, чтобы вся работа была выполнена за определенное время.

Чтобы решить эту проблему, мы строим «взвешенный ориентированный граф» или сетевой график, в котором каждая дуга представляет собой время, затрачиваемое на соответствующее действие. Такой график приведен на рис. 1. Вершина *A* представляет собой начало задания, а вершина *L* – его завершение. Поскольку все задание невозможно выполнить до тех пор, пока не будет пройден каждый путь от *A* до *L*, задача сводится к поиску самого длинного пути

от A до L .

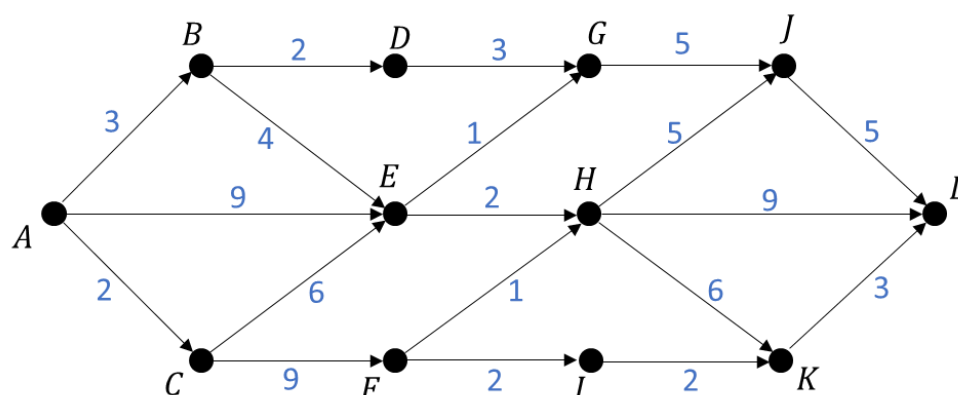


Рис. 1. Сетевой график

Решение получается с помощью метода подобному методу, который используется для решения задачи о кратчайшем пути. Перемещаясь по ориентированному графу слева направо, мы связываем с каждой меткой V метку $l(V)$, указывающую длину самого *длинного* пути от A до V . Как и в задаче с кратчайшим путем, мы отслеживаем эти метки, записывая их рядом с вершинами, которые они представляют.

Например, для ориентированного графа на рис. 1 мы назначаем:

вершине A – значение 0;

вершине B – значение $l(A) + 3$, т.е. 3;

вершине C – значение $l(A) + 2$, т.е. 2;

вершине D – значение $l(B) + 2$, т.е. 5;

вершине E – наибольшее из значений $l(A) + 9$, $l(B) + 4$, $l(C) + 6$, т.е. 9;

вершине F – значение $l(C) + 9$, т.е. 11;

вершине G – наибольшее из значений $l(D) + 3$, $l(E) + 1$, т.е. 10;

вершине H – наибольшее из значений $l(E) + 2$, $l(F) + 1$, т.е. 12;

вершине I – значение $l(F) + 2$, т.е. 13;

вершине J – наибольшее из значений $l(G) + 5$, $l(H) + 5$, т.е. 17;

вершине K – наибольшее из значений $l(H) + 6$, $l(I) + 2$, т.е. 18;

вершине L – наибольшее из значений $l(H) + 9$, $l(J) + 5$, $l(K) + 3$, т.е. 22.

Эти метки показаны на рис. 2. Отсюда следует, что самый длинный путь имеет длину 22, а это значит, что все задание не может быть выполнено за

меньшее время.

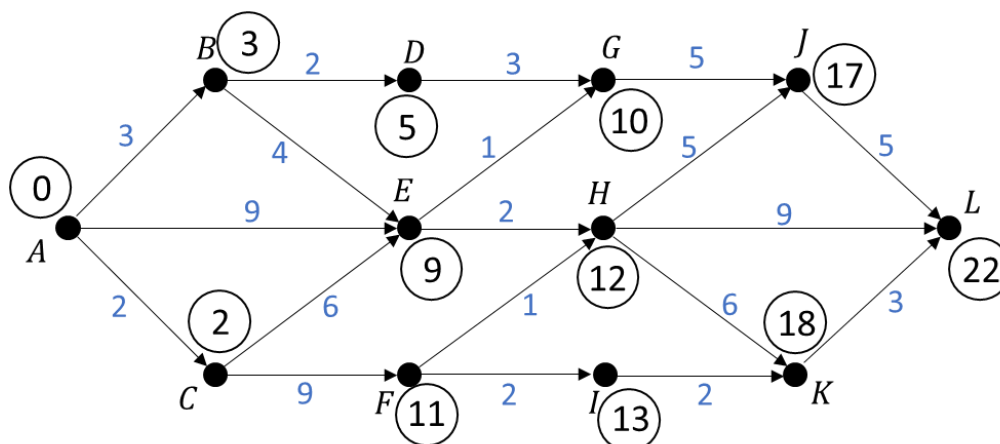


Рис. 2. Поиск критического пути

Чтобы найти самый длинный путь, мы выполняем обратную трассировку от L так же, как и в задаче о кратчайшем пути. При выполнении обратной трассировки мы можем ограничиться только теми ребрами, длина которых равна разности меток на его концах, таких как JL .

В нашем случае единственный наидлиннейший путь от A до L представляет собой

$$A \rightarrow C \rightarrow F \rightarrow H \rightarrow J \rightarrow L.$$

Этот путь часто называют критическим путем (critical path), поскольку любая задержка на этом пути создает задержку выполнения всего задания. Вот почему при планировании следует уделять особое внимание критическим путям.

Примеры заданий

Таблица 1

Вариант 0

№ работы	Длительность работы	Последующие работы
1	4	4
2	6	5,6
3	7	4
4	3	7
5	2	7,8
6	1	7
7	6	10
8	4	9,10
9	8	-
10	6	-

Таблица 2

Вариант 1

№ работы	Длительность работы	Последующие работы
1	2	2
2	3	3,4
3	8	4,5,7
4	7	5
5	3	7,8
6	4	8
7	9	9
8	3	-
9	4	10
10	6	-

Таблица 3

Вариант 2

№ работы	Длительность работы	Последующие работы
1	3	2,3
2	5	3,4,5
3	7	4
4	9	5,6
5	6	6,8
6	4	7,9
7	2	8
8	3	-
9	8	10
10	2	-

Таблица 4

Вариант 3

№ работы	Длительность работы	Последующие работы
1	4	4
2	5	4,5
3	9	5
4	7	5,6
5	6	6,8
6	3	7,9
7	1	8,10
8	2	-
9	4	10
10	6	-

Таблица 5

Вариант 4

№ работы	Длительность работы	Последующие работы
1	3	3,4
2	4	3,5
3	7	4,6
4	8	5,7
5	2	6
6	5	8,9
7	6	9,10
8	1	-
9	3	-
10	6	8,9

Таблица 6

Вариант 5

№ работы	Длительность работы	Последующие работы
1	4	2
2	3	4,5
3	6	5,6,7
4	5	5
5	8	6,7
6	7	7,8
7	6	8,9
8	3	-
9	2	10
10	6	-

Таблица 7

Вариант 6

№ работы	Длительность работы	Последующие работы
1	3	3
2	6	3,4
3	5	4,6
4	7	6,7,8
5	8	7,8
6	9	7
7	6	8,9
8	10	-
9	2	-
10	3	7

Таблица 8

Вариант 7

№ работы	Длительность работы	Последующие работы
1	9	3,4
2	7	3,5
3	3	5,6
4	6	5
5	5	6,7,8
6	8	7,8
7	3	8
8	4	-
9	2	8,10
10	1	-

Таблица 9

Вариант 8

№ работы	Длительность работы	Последующие работы
1	5	2,4
2	4	4,5
3	8	4,6
4	7	5,6,7
5	3	6,7
6	2	7,9
7	1	-
8	6	9,10
9	2	-
10	3	9

Таблица 10

Вариант 9

№ работы	Длительность работы	Последующие работы
1	8	4
2	7	1,5
3	4	4,6
4	2	5,7,9
5	1	6
6	3	7,8
7	4	9,10
8	5	10
9	1	10
10	8	-

Выбор варианта - последняя цифра зачетной книжки