

Контрольная работа по дисциплине "Высшая математика"

во 2 семестре

Контрольная работа выполняется студентами в соответствии с начальной буквой фамилии:

А - Б - 1 вариант

В - Г - 2 вариант

Д - Ж - 3 вариант

З - К - 4 вариант

Л - Н - 5 вариант

О - Р - 6 вариант

П - Р - 7 вариант

С - У - 8 вариант

Ф - Ц - 9 вариант

Ч - Щ - 10 вариант

Э - Я - 11 вариант

Вариант № 1

1. Вычислить неопределённые интегралы:

а) $\int \frac{x^8 - 3x^5 - x^2 + 1}{x^3} dx$, в) $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{3 + \sin x}}$,

б) $\int \ln(x^2 + 5) dx$, г) $\int \frac{dx}{5 - 12x - 9x^2}$.

2. Вычислить определённые интегралы:

а) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx$, в) $\int_0^2 \sqrt{4 - x^2} dx$,

б) $\int_0^1 \frac{e^x dx}{1 + e^{2x}}$, г) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 + \sin x}$.

3. Найти общее решение дифференциального уравнения:

а) $xy dx + (x + 1) dy = 0$, б) $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

4. Решить линейное неоднородное дифференциальное уравнение $y' + y \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}$.

5. Найти частное решение уравнения $y'' = xe^x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.

6. Решить уравнение: $y'' - 6y' + 8y = 3x^2 + 2x + 1$.

7. Исследовать на сходимость ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(3n!)^2}$.

8. Найти область сходимости степенного ряда:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n(n+1)}$, б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n \cdot 2^n}$.

9. Разложить функцию $y = e^{3x}$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0 = 1$ и указать область сходимости полученного ряда.

Вариант № 2

1. Найти неопределённые интегралы:

а) $\int \frac{\sqrt{x} - x^3 e^x + x^2}{x^3} dx$, в) $\int (x^2 + x - 3) \sin 3x dx$,

б) $\int \frac{x dx}{\sqrt{9 - x^2}}$, г) $\int \frac{x - 4}{(x - 2)(x^2 + 1)} dx$.

2. Вычислить определённые интегралы:

$$\begin{aligned} \text{а) } \int_1^e \frac{dx}{x(1+\ln^2 x)}, \text{ в) } \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^7 2x dx, \\ \text{б) } \int_1^5 \frac{dx}{x+\sqrt{2x-1}}, \text{ г) } \int_2^{3,5} \frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}}. \end{aligned}$$

3. Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$\text{а) } 3y' = \frac{1+x^2}{y^2}, \text{ б) } \sqrt{y}dx + x^2 dy = 0.$$

4. Решить линейное дифференциальное неоднородное уравнение: $y' + 2xy = 2xe^{x^2}$

5. Найти частное решение уравнение: $y'' = -2y'$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$

6. Решить уравнение $y'' + 4y = 2\cos x$.

7. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{9+n^2}$.

8. Найти области сходимости степенных рядов:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n x^n}{\sqrt{n}}, \text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x+1)^n}{3n-2}.$$

9. Разложить функцию $y = e^{-2x}$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0 = 1$ и указать область сходимости полученного ряда.

Вариант № 3

1. 1. Найти неопределённые интегралы:

$$\begin{aligned} \text{а) } \int \frac{e^{2x}-1}{e^x-1} dx, \text{ в) } \int (3x+1) \cos 2x dx, \\ \text{б) } \int \frac{\sin x \cos x}{\sqrt{\cos^2 x - \sin^2 x}} dx, \text{ г) } \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{2-x}}. \end{aligned}$$

2. Вычислить определённые интегралы

$$\begin{aligned} \text{а) } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x} dx, \text{ в) } \int_1^e \frac{dx}{x(1+\ln^2 x)}, \\ \text{б) } \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x dx}{\sin^3 x}, \text{ г) } \int_0^{e-1} \ln(x+1) dx. \end{aligned}$$

3. Найти частные решения дифференциальных уравнений:

а) $(x+3)dy - (y+2)dx = 0$, если $y=3$, при $x=2$,

б) $(x^2+1)dy = 2xydx$, если $y=2$, при $x=1$.

4. Решить линейное неоднородное дифференциальное уравнение:

$$y' - \frac{3}{x}y = x$$

5. Найти общее решение уравнения $y'' = \frac{1}{2}(y')^2$.

6. Решить уравнение $y'' + y' - 2y = x^2 e^{4x}$.

7. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{(n+1)!}$.

8. Найти области сходимости степенных рядов:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n x^n}{\sqrt[3]{n}}$, б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{n^2}$.

9. Разложить функцию $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ в ряд Маклорена и указать область сходимости полученного ряда.

Вариант № 4

1. 1. Найти неопределённые интегралы:

а) $\int \frac{3 \cdot 2^x - 2 \cdot 3^x}{2^x} dx$, б) $\int x \cdot 2^x dx$,

в) $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt{1+2\cos x}}$, г) $\int \frac{dx}{1+e^{3x}}$.

2. Вычислить определённые интегралы:

а) $\int_0^2 \frac{4x}{\sqrt{1+2x^2}} dx$, б) $\int_1^e \frac{\cos(\ln x)}{x} dx$,

в) $\int_0^3 x\sqrt{1+x} dx$, г) $\int_0^{e-1} \ln(x+1) dx$.

3. Найти частные решения дифференциальных уравнений:

а) $y' = xy^2$, $y(0)=2$ б) $y \lg x dx + dy = 0$, $y(\frac{\pi}{3}) = 4$

4. Решить линейное неоднородное дифференциальное уравнение: $x^2 y' + 2xy = -4$, при начальном условии $y(-1) = 0$.

5. Найти общее решение уравнения: $y'' - \frac{1}{x-1}y' = \frac{x}{x-1}$.
6. Решить уравнение: $y'' - 4y' + 4y = 3e^{2x}$.
7. Исследовать на сходимость ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+n}{1+n^2}\right)^2$.
8. Найти область сходимости степенных рядов:
 а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n x^n}{\sqrt{2^n (3n-1)}}$, б) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt[3]{n+2}}{n+1} (x-2)^n$.
9. Разложить функцию $y = \sqrt{1+x^2}$ в ряд Маклорена и указать область сходимости полученного ряда.

Вариант № 5

1. 1. Найти неопределенные интегралы:
 а) $\int 2 \sin^2 \frac{x}{2} dx$, в) $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$,
 б) $\int \frac{x^3 dx}{x^8 - 4}$, г) $\int x e^{-2x} dx$.
2. Вычислить определенные интегралы:
 а) $\int_{-\frac{2}{3}}^{\frac{2}{3}} \frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}}$, в) $\int_{-1}^1 t \lg x dx$,
 б) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x} \cos x dx$, г) $\int_0^{\pi} x^3 \sin x dx$.
3. Найти общие решения дифференциальных уравнений:
 а) $(x-1)dy=(y+1)dx$, б) $y' = 2y - 1$.
4. Решить линейное неоднородное дифференциальное уравнение
 $\frac{dy}{dx} - 2xy = e^{x^2}$.
5. Найти частное решение уравнения $y'' = xe^x$, если $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.
6. Решить уравнение $y'' + 3y' = 3xe^{-3x}$.
7. Исследовать на сходимость ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n n!}{n^n}$.

8. Найти область сходимости степенных рядов:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{(2n+1)^2 \sqrt{3^n}}$, б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} (x-2)^n}{(n+1) \ln(n+1)}$.

9. Разложить функцию $y = \cos^2 x$ в ряд Маклорена и указать область сходимости полученного ряда.

Вариант № 6

1. Найти неопределенные интегралы:

а) $\int \operatorname{tg}^2 x dx$, в) $\int \ln^2 x dx$,
б) $\int \frac{dx}{x(2 + \ln x)}$, г) $\int \frac{(x+2)dx}{x^2 + x + 1}$.

2. Вычислить определенные интегралы:

а) $\int_0^1 \frac{e^x dx}{e^x + 5}$, в) $\int_0^1 (1-x)e^{-x} dx$,
б) $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{dx}{3+4x^2}$, г) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 + \sin x}$.

3. Найти общее решение дифференциального уравнения:

а) $y' = xe^{-y}$, б) $\frac{dy}{dx} = -y \operatorname{tg} x$.

4. Решить линейное неоднородное дифференциальное уравнение:

$xy' + y = \sin x$.

5. Найти решение задачи Коши: $y'' = -\frac{1}{x} y'$, $y(1) = 2$, $y'(1) = 1$.

6. Решить уравнение: $y'' + y' + y = (x^2 + x)e^x$.

7. Исследовать на сходимость ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n}{5n+1}\right)^n$.

8. Найти область сходимости степенного ряда:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! x^n}{(n+1)^n}$, б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n-2)(x-3)^n}{(n+1)^2 2^{n+1}}$.

9. Разложить функцию $y = \frac{1}{x-4}$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0 = -2$ и указать область сходимости полученного ряда.

Вариант № 7

1. Найти неопределенные интегралы:

а) $\int \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} dx$, в) $\int x^3 e^{-x^4} dx$,
 б) $\int \frac{dx}{\sqrt{4 - 9x^2}}$, г) $\int e^{-x} \cos x dx$.

2. Вычислить определенные интегралы:

а) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \sin^3 x \cdot \cos x dx$, в) $\int_0^4 \frac{dx}{1 + \sqrt{x}}$,
 б) $\int_0^1 \ln(1 + x^2) dx$, г) $\int_0^1 \frac{x^3 dx}{x^8 - 4}$

3. Найти общие решения дифференциальных уравнений:

а) $y' - \frac{y}{x} = 0$, б) $x dy = y dx$.

4. Решить линейное неоднородное дифференциальное уравнение при начальном условии $y(0) = 5$.

5. Найти решение уравнения $y'' = -2y'$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$.

6. Решить уравнение $y'' - y' = 2(1 - x)$.

7. Исследовать на сходимость ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$

8. Найти область сходимости степенных рядов:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n x^n}{3^n (n+1)}$, б) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{3^n (n+1) \sqrt{n+1}}$.

9. Разложить функцию $y = \frac{1}{x+2}$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0 = 3$ и указать область сходимости полученного ряда.

Вариант № 8

1. Найти неопределенные интегралы:

а) $\int \frac{\sqrt{x} - x^3 e^x + x^2}{x^3} dx$, в) $\int (x^2 - 2x + 5) e^{-x} dx$,
 б) $\int x \operatorname{ctg}(x^2 + 1) dx$, г) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x}}$.

2. Вычислить определенные интегралы:

$$\begin{aligned} \text{а) } \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} \frac{\sin x dx}{1 + \cos x}, \quad \text{в) } \int_1^2 x \ln x dx, \\ \text{б) } \int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 4x + 5}, \quad \text{г) } \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1 + 2 \sin^2 x}. \end{aligned}$$

3. Найти общие решения дифференциальных уравнений

$$\text{а) } (x^2 + 1)dy - xydx = 0, \quad \text{б) } y' = 2xy.$$

4. Решить линейное неоднородное дифференциальное уравнение

$$x(y' - x \cos x) = y.$$

5. Найти решение задачи Коши $y'' = \frac{1}{x+2}y'$, $y(2) = 2$, $y'(2) = 8$.

6. Решить уравнение: $y'' - 3y' + 2y = xe^x$.

7. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+2)}{2^n}$.

8. Найти области сходимости степенных рядов:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n x^n, \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-4)^{2n-1}}{2n-1}.$$

9. Разложить функцию $y = (1+x)e^{-x}$ в ряд Маклорена и указать область сходимости полученного ряда.

Вариант № 9

1. Найти неопределенные интегралы:

$$\begin{aligned} \text{а) } \int \frac{24^x - 6^x}{4^x} dx, \quad \text{в) } \int x \cos 3x dx, \\ \text{б) } \int \frac{\cos x dx}{\sin^2 x}, \quad \text{г) } \int \frac{x+5}{x^2 - 2x - 8} dx. \end{aligned}$$

2. Вычислить определенные интегралы:

$$\begin{aligned} \text{а) } \int_0^1 \sqrt[3]{2x+1} dx, \quad \text{в) } \int_0^{e-1} \ln(x+1) dx, \\ \text{б) } \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^3 x dx}{\sqrt[3]{\sin x}}, \quad \text{г) } \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{3 + \cos x}. \end{aligned}$$

3. Найти общие решения дифференциальных уравнений:

а) $y' + \frac{3}{x}y = 0$, б) $(1 - x^2)dy - xydx = 0$.

4. Решить линейное неоднородное дифференциальное уравнение

$y' - \frac{1+2x}{x+x^2}y = \frac{1+2x}{x+x^2}$ при начальном условии $y(1) = 1$.

5. Найти общее решение уравнения: $y'' = 2y' - 10$.

6. Решить уравнение $y'' - 4y' + 4y = 3e^{2x}$.

7. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{3}{4}\right)^n$.

8. Найти область сходимости степенных рядов

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2n+3} x^n$, б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(x-2)^n}{n+1}$.

9. Разложить функцию $f(x) = \sin 2x$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0 = \frac{\pi}{4}$ и указать область сходимости полученного ряда.

Вариант № 10

1. Найти неопределенные интегралы:

а) $\int \frac{x\sqrt{x} - x^3 + 1}{x^2} dx$, б) $\int (3x+1) \cos 2x dx$,
 в) $\int \frac{\cos x dx}{\sin^2 x - 6 \sin x + 12}$, г) $\int \frac{3x-4}{x^2+8x+15} dx$.

2. Вычислить определенные интегралы

а) $\int_0^1 (\sqrt{x} - 1) dx$, б) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x^2 \cos 2x dx$,
 в) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x dx$, г) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{(\sin x + \cos x)^2}$.

3. Найти общие решения дифференциальных уравнений:

а) $xy' = -y$, б) $(1+x^2)y' - 2xy = 0$.

4. Решить линейное неоднородное дифференциальное уравнение $y' - y \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}$ при начальном условии $y(0) = 0$.

5. Найти общее решение уравнения $y'' = -2y'$.
6. Решить уравнение $y'' - y' = 2(1 - x)$.
7. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^3}{(3n)!}$.
8. Найти область сходимости степенных рядов:
 а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$, б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+8)^n}{3n+2}$.
9. Разложить функцию $y = \cos^2 x$ в ряд Маклорена и указать область сходимости полученного ряда.

Вариант № 11

1. Найти неопределенные интегралы:
 а) $\int 2 \cos^2 \frac{x}{2} dx$, б) $\int e^{2x} (2x^2 + 1) dx$,
 в) $\int \frac{x + (\arccos 2x)^2}{\sqrt{1-4x^2}} dx$, г) $\int \frac{2x-6}{x^2-5x+6} dx$.
2. Вычислить определенные интегралы:
 а) $\int_0^8 (\sqrt{2x} + \sqrt[3]{x}) dx$, б) $\int_0^{\pi} x^3 \sin x dx$,
 в) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x} \sin x dx$, г) $\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{dx}{2 \sin x + \sin 2x}$.
3. Найти общие решения дифференциальных уравнений:
 а) $y' = 2 + y$, б) $\sqrt{y} dx + x^2 dy = 0$.
4. Решить линейное неоднородное дифференциальное уравнение
 $y' + y \cos x = \sin x \cdot \cos x$ при условии $y(0) = 1$.
5. Найти общее решение уравнения: $\frac{d^2 y}{dy'^2} = \frac{1}{2} y'^2$.
6. Решить уравнение $y'' - 8y' + 16y = (1-x)e^{4x}$.
7. Исследовать на сходимость ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$.

8. Найти область сходимости степенных рядов:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (2n+1)^2 x^n$, б) $\sum_{n=1}^{\infty} (3n+1) \left(\frac{x-2}{4}\right)^n$.

9. Разложить функцию $y = xe^{-x^2}$ в ряд Маклорена и указать область сходимости полученного ряда.