

Ю. Г. ГАЛИЧ

МАТЕМАТИКА

ЧАСТЬ 2

ОМСК 2016

Министерство транспорта Российской Федерации
Федеральное агентство железнодорожного транспорта
Омский государственный университет путей сообщения

Ю. Г. Галич

МАТЕМАТИКА

Часть 2

Утверждено методическим советом университета
в качестве практикума для студентов заочного факультета
всех специальностей и направлений подготовки

Омск 2016

УДК 51(075.8)
ББК 22.1я73
Г15

Математика. Часть 2: Практикум для студентов заочного факультета всех специальностей и направлений подготовки / Ю. Г. Галич; Омский гос. ун-т путей сообщения. Омск, 2016. 32 с.

Практикум содержит варианты контрольных заданий по трем разделам дисциплины «Математика»: «Функции двух переменных», «Неопределенный и определенный интегралы», «Дифференциальные уравнения», а также основные формулы по каждому из разделов и подробно разобранные примеры решения типовых задач.

Предназначен для студентов заочного факультета всех специальностей и направлений подготовки.

Библиогр.: 4 назв. Рис. 4.

Рецензенты: канд. физ.-мат. наук, доцент С. Н. Крохин;
канд. пед. наук, доцент Т. П. Фисенко.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	5
1. Варианты индивидуальных контрольных заданий	6
1.1. Контрольная работа 4. Функции двух переменных.....	6
1.2. Контрольная работа 5. Неопределенный и определенный интегралы ..	9
1.3. Контрольная работа 6. Дифференциальные уравнения	14
2. Формулы и примеры решения задач	16
2.1. Формулы и примеры решения задач контрольной работы 4	16
2.2. Формулы и примеры решения задач контрольной работы 5	20
2.3. Формулы и примеры решения задач контрольной работы 6	26
Библиографический список	30

ВВЕДЕНИЕ

При изучении дисциплины «Математика» для лучшего усвоения теоретического материала большое значение имеют практические занятия по решению задач.

Цель настоящего практикума – оказать помощь студентам в освоении методики решения типовых задач.

Теоретические сведения, необходимые для решения задач, приведены в данном практикуме и в работах [1 – 4].

Для выбора варианта контрольной работы необходимо пронумеровать буквы в записи своих фамилии, имени и отчества. Номера букв соответствуют номерам вариантов контрольных работ. Например:

И	В	А	Н	О	В	О	Л	Е	Г	П	Е	Т	Р	О	В	И	Ч
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

Из этой записи следует: вариант четвертой контрольной работы будет определяться буквой Н, пятой – буквой О, шестой – буквой В. При этом используется приведенная ниже таблица.

Буква	А	Б	В	Г	Д	Е	Ё	Ж	З	И	Й	К	Л	М	Н	О
Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16

Буква	П	Р	С	Т	У	Ф	Х	Ц	Ч	Ш	Щ	Ъ	Ы	Э	Ю	Я
Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16

Итак, четвертой контрольной работе соответствует буква Н, по которой определяем для этой контрольной работы пятнадцатый вариант. Для пятой контрольной работы по букве О выбираем задачи шестнадцатого варианта. Для шестой контрольной работы по букве В выбираем задачи третьего варианта.

В первом разделе практикума приведены условия задач, во втором разделе по номеру задачи размещен материал, который поможет при ее решении.

1. ВАРИАНТЫ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ КОНТРОЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ

1.1. Контрольная работа 4

Функции двух переменных

З а д а ч а 1. Заданы функции: $z = f(x; y)$; $z = \varphi(x; y)$; $z = g(x; y)$. Требуется:

а) найти $\frac{\partial f}{\partial x}$; $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$; $\frac{\partial f}{\partial y}$; $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$; б) найти $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$; $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$; в) показать, что $\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}$.

1.

$$z = f(x; y) = 5 - 2x^3 + x^3y^5 + \sin(xy);$$

$$z = \varphi(x; y) = \cos x \cdot \sin(x^2y^3);$$

$$z = g(x; y) = \ln(x^4y^5).$$

2.

$$z = f(x; y) = 7 + y^5 - 5x^3y^4 + e^{-xy};$$

$$z = \varphi(x; y) = 3x^2 \operatorname{tg}(x + 2y);$$

$$z = g(x; y) = x \sin(x^2y).$$

3.

$$z = f(x; y) = 4 + 5x^2 - 3xy^4 + \cos(xy);$$

$$z = \varphi(x; y) = x^2e^{-xy};$$

$$z = g(x; y) = \sin(xy^3).$$

4.

$$z = f(x; y) = 4 - 2x^5 + y^3x^2 + y \ln x;$$

$$z = \varphi(x; y) = x^2 \sin(x^2y);$$

$$z = g(x; y) = y^2 \ln(x^2y^3).$$

5.

$$z = f(x; y) = 7 - y^2 + x^3y^4 + e^{x(1+y)};$$

$$z = \varphi(x; y) = y^2 \cos(xy);$$

$$z = g(x; y) = e^{-xy^4}.$$

6.

$$z = f(x; y) = 4 - x^5 - 7x^2y^7 + e^{x^3y};$$

$$z = \varphi(x; y) = x^3 \operatorname{ctg}(3xy);$$

$$z = g(x; y) = x y \sin(x^4y).$$

7.

$$z = f(x; y) = 2 + y^2 - 4x^3y^5 + \cos(xy^5);$$

$$z = \varphi(x; y) = \ln(1 + x^5y^2);$$

$$z = g(x; y) = \sin(x^5y).$$

8.

$$z = f(x; y) = 5 + xy^2 - y^3 + e^{x^2+y};$$

$$z = \varphi(x; y) = x^3 \ln(x - y^2);$$

$$z = g(x; y) = y \cos(x^2y).$$

9.

$$z = f(x; y) = 5 - 2x^2 + x^3y^4 - \ln(xy);$$

$$z = \varphi(x; y) = x^2 \cos(xy);$$

$$z = g(x; y) = e^{x^3y}.$$

11.

$$z = f(x; y) = 3 - 2y^3 + x^2y^3 - \operatorname{tg}(x^2y);$$

$$z = \varphi(x; y) = x^2 \ln(x - y^3);$$

$$z = g(x; y) = y^2 \sin(xy^3).$$

13.

$$z = f(x; y) = 5 - 3x^2 - 2x^2y^3 + e^{x(1+y)};$$

$$z = \varphi(x; y) = x^3 \ln(x^2 + y);$$

$$z = g(x; y) = \cos(x^2y^6).$$

15.

$$z = f(x; y) = 2 - 4y^3 + x^2y^5 + \sin(x^2y);$$

$$z = \varphi(x; y) = x^5y^2 \ln(xy);$$

$$z = g(x; y) = e^{-x^5y}.$$

10.

$$z = f(x; y) = 15 - 3y^2 + 5x^5y^3 + 2^{xy};$$

$$z = \varphi(x; y) = x^3y \operatorname{ctg}(xy);$$

$$z = g(x; y) = x \cos(x^6y).$$

12.

$$z = f(x; y) = y - x^2 + 6x^3y^3 + 5^{-xy};$$

$$z = \varphi(x; y) = \operatorname{tg}(x^2 - y^5);$$

$$z = g(x; y) = y \log_2(x^2y^6).$$

14.

$$z = f(x; y) = 7 + 3x^4 - 2x^5y^3 + \log_3(xy);$$

$$z = \varphi(x; y) = y^3 \cos(x - y);$$

$$z = g(x; y) = ye^{x^2y^6}.$$

16.

$$z = f(x; y) = 2 + 3xy^2 - 4y^5 + \cos(x^3y^5);$$

$$z = \varphi(x; y) = \ln(x^5 - y^2);$$

$$z = g(x; y) = \sin(x^5y^3).$$

З а д а ч а 2. Даны функция $z = f(x; y)$ и точки $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$. Вычислить: а) точные значения $z_A = f(x_A; y_A)$ и $z_B = f(x_B; y_B)$; б) полный дифференциал в точке A ; в) приближенное значение $\tilde{z}_B$ функции $f(x; y)$ в точке B , заменив приращение функции дифференциалом при переходе от точки A к точке B ; г) абсолютную и относительную ошибки.

1. $z = f(x; y) = x^2y - 2x^2 + 20;$
 $A(-2; 1); B(-1, 9; 0, 9).$

2. $z = f(x; y) = x^2y^2 - 3xy + 2;$
 $A(-1; -2); B(-1, 1; -1, 8).$

3. $z = f(x; y) = xy^2 - 2y^2 - 10;$
 $A(3; -1); B(2, 8; -0, 9).$

4. $z = f(x; y) = 5xy - x^3 - 15;$
 $A(1; 4); B(0, 9; 4, 2).$

- | | | | |
|-----|---|-----|--|
| 5. | $z = f(x, y) = xy - 3x^2 + 14;$
$A(-1; -2); B(-0, 9; -1, 8).$ | 6. | $z = f(x, y) = x^2y - 5y^2 - 10;$
$A(-3; -1); B(-2, 9; -1, 1).$ |
| 7. | $z = f(x, y) = y^3 + 2x^2y - 13;$
$A(3; -1); B(2, 9; -1, 2).$ | 8. | $z = f(x, y) = 2y^2 + 3x^3y + 12;$
$A(1; -4); B(1, 1; -3, 9).$ |
| 9. | $z = f(x, y) = xy^2 + y^3 + 15;$
$A(2; -3); B(1, 8; -3, 1).$ | 10. | $z = f(x, y) = x^3 - x^2y - 13;$
$A(3; 2); B(2, 9; 2, 2).$ |
| 11. | $z = f(x, y) = 2x^2 + 3xy^3 - 10;$
$A(2; -2); B(2, 1; -1, 9).$ | 12. | $z = f(x, y) = y^3 - x^2y - 3;$
$A(-3; -2); B(-2, 9; -2, 2).$ |
| 13. | $z = f(x, y) = y^2 - 4xy + 15;$
$A(1; 3); B(0, 9; 3, 1).$ | 14. | $z = f(x, y) = xy^2 + x^2y + 20;$
$A(2; 2); B(2, 1; 1, 8).$ |
| 15. | $z = f(x, y) = x^3 + xy^2 + 20;$
$A(-2; 3); B(-1, 9; 3, 1).$ | 16. | $z = f(x, y) = x^3 + xy + 15;$
$A(-4; 2); B(-3, 9; 2, 2).$ |

З а д а ч а 3. Не подставляя промежуточные аргументы, найти $\frac{\partial z}{\partial t}$ сложной функции $z = f(x, y)$, заданной цепочкой функций.

- | | | | |
|-----|---|-----|---|
| 1. | $z = e^{x-3y}; x = \sin t; y = t^2.$ | 2. | $z = \operatorname{tg}(3x - y); x = \frac{1}{t}; y = \sqrt{t}.$ |
| 3. | $z = \frac{x}{y}; x = e^t; y = 1 - e^{2t}.$ | 4. | $z = \arccos(xy); x = 4 - t^2; y = 2t^3.$ |
| 5. | $z = \arcsin(x - y); x = 4t^2; y = t^3.$ | 6. | $z = \ln(e^x - e^y); x = t^2; y = 2t + 5.$ |
| 7. | $z = e^{x^2+y^2}; x = 2\cos t; y = 2\sin t.$ | 8. | $z = y^3 \ln x; x = t^5; y = \frac{3}{t}.$ |
| 9. | $z = \ln \frac{x}{y}; x = \operatorname{tg}^2 t; y = \operatorname{ctg}^2 t.$ | 10. | $z = \frac{y}{x^2}; x = 2e^t; y = e^{-2t}.$ |
| 11. | $z = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}; x = \sin 2t; y = \cos 2t.$ | 12. | $z = e^{2x-y}; x = \sin 2t; y = t^3.$ |
| 13. | $z = x^2 + y^2 + xy; x = \sin t; y = e^t.$ | 14. | $z = \sin \sqrt{x/y}; x = t^2; y = t^3.$ |
| 15. | $z = x^2 \ln y; x = \frac{t}{2}; y = 3t^2.$ | 16. | $z = \sqrt{\frac{1+x}{1+y}}; x = -\cos t; y = \cos t.$ |

З а д а ч а 4. Получены пять экспериментальных значений функции $y = f(x)$. Методом наименьших квадратов найти линейное приближение функции $y = f(x)$ в виде $y = ax + b$. Сделать чертеж.

1.

x_i	1	2	3	4	5
y_i	2,1	5	4,9	6	8,3

2.

x_i	1	2	3	4	5
y_i	7	5,9	5	2,5	3,1

3.

x_i	1	2	3	4	5
y_i	8	6,1	5,9	3	3,2

4.

x_i	1	2	3	4	5
y_i	6	4,1	4,3	2	2,5

5.

x_i	1	2	3	4	5
y_i	1,9	3	2,7	5	6,3

6.

x_i	1	2	3	4	5
y_i	2,5	4	4,1	6	7,3

7.

x_i	1	2	3	4	5
y_i	6	4,5	3,9	3	2,1

8.

x_i	1	2	3	4	5
y_i	0,5	2	3,6	6	4,8

9.

x_i	1	2	3	4	5
y_i	2,1	4	4,3	6	7,1

10.

x_i	1	2	3	4	5
y_i	1,9	4	4,5	6	7,1

11.

x_i	1	2	3	4	5
y_i	5,1	4	3,3	2,3	2,5

12.

x_i	1	2	3	4	5
y_i	0,9	2,4	4,2	5,6	7

13.

x_i	1	2	3	4	5
y_i	3,1	4,5	4,3	5,2	6,1

14.

x_i	1	2	3	4	5
y_i	8	7,2	5,5	3,6	1,1

15.

x_i	1	2	3	4	5
y_i	6,7	5,3	4,5	3	2,1

16.

x_i	1	2	3	4	5
y_i	3,2	4	4,9	5,8	6,1

1.2. Контрольная работа 5

Неопределенный и определенный интегралы

З а д а ч а 1. Найти неопределенные интегралы с использованием таблицы интегралов, основных правил интегрирования и правила о линейной замене.

1. $\int \left(5 + 3x - 4x^5 + \frac{3}{\sqrt{x}} + 2^x + \sin x + \frac{4}{x^2 + 25} \right) dx, \quad \int \operatorname{tg}(3x - 5) dx,$
 $\int e^{-x} dx, \quad \int \frac{5dx}{1-3x}, \quad \int \frac{dx}{(1-3x)^3}.$

2. $\int \left(5 - x + 3x^5 - \frac{4}{x^5} + 5^x + \frac{3}{\sin^2 x} - \frac{4}{49 + x^2} \right) dx, \quad \int \sin(2 - 5x) dx,$
 $\int \cos 4x dx, \quad \int \frac{4dx}{1 - 3x}, \quad \int \frac{3dx}{(5x + 7)^6}.$
3. $\int \left(4 + 4x + x^4 + \frac{5}{x^4} - 4^x + 3 \sin x + \frac{7}{x^2 - 4} \right) dx, \quad \int \frac{dx}{\cos^2(3 - x)},$
 $\int \operatorname{ctg} 3x dx, \quad \int \frac{5dx}{1 + 2x}, \quad \int \frac{7dx}{(1 + 3x)^4}.$
4. $\int \left(1 - 2x - 7x^3 + \frac{3}{\sqrt[3]{x}} + 5^x + \operatorname{tg} x + \frac{4}{x^2 + 49} \right) dx, \quad \int \cos(4 - x) dx,$
 $\int 2^{5x} dx, \quad \int \frac{4dx}{3 + 2x}, \quad \int \frac{dx}{(5 - x)^5}.$
5. $\int \left(9 + x + x^3 + \frac{9}{x} - e^x + 3 \cos x + \frac{7}{x^2 - 36} \right) dx, \quad \int \frac{dx}{\sin^2(1 + 4x)},$
 $\int \operatorname{tg} 7x dx, \quad \int \frac{2dx}{3 - 5x}, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1 + 4x}}.$
6. $\int \left(2 + 5x - x^3 + \frac{4}{x^3} + 3^x + \operatorname{ctg} x + \frac{2}{x^2 + 9} \right) dx, \quad \int \cos(5x - 3) dx,$
 $\int e^{2x} dx, \quad \int \frac{5dx}{1 - x}, \quad \int \frac{dx}{(2 + 7x)^4}.$
7. $\int \left(2 - 5x - x^3 + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} + 6^x + \sin x - \frac{4}{\sqrt{9 - x^2}} \right) dx, \quad \int \operatorname{ctg}(2 + 4x) dx,$
 $\int e^{1 - 5x} dx, \quad \int \frac{5dx}{3x - 4}, \quad \int (5 - x)^4 dx.$
8. $\int \left(3 - x + \frac{3}{\sqrt[3]{x^4}} + 7^x - 6 \cos x + \frac{3}{\sin^2 x} + \frac{5}{x^2 + 4} \right) dx, \quad \int \operatorname{tg}(5 + 7x) dx,$
 $\int 3^{2x - 3} dx, \quad \int \frac{dx}{1 + 5x}, \quad \int \frac{7dx}{(2 - 4x)^2}.$

9. $\int \left(1 + 5x + \sqrt{x^3} + \frac{5}{x} - e^x + 4\cos x + \frac{2}{x^2 - 1} \right) dx, \quad \int \frac{dx}{\sin^2(1 - 3x)},$
 $\int \operatorname{tg} 8x dx, \quad \int \frac{9dx}{(3 - 5x)^3}, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{3 - 2x}}.$
10. $\int \left(4 + 3x - \frac{5}{x^2} + 5^x - \cos x + \operatorname{tg} x - \frac{3}{\sqrt{4 - x^2}} \right) dx, \quad \int \sin(3x - 6) dx,$
 $\int \cos 5x dx, \quad \int \frac{2dx}{1 - 3x}, \quad \int (3 + 4x)^5 dx.$
11. $\int \left(3 + 4\sqrt{x} + x^2 + \frac{6}{x^6} - 3^x + 3e^x + \frac{7}{x^2 + 81} \right) dx, \quad \int \frac{dx}{\cos^2(1 + 4x)},$
 $\int \operatorname{ctg} 7x dx, \quad \int \frac{4dx}{3 - 5x}, \quad \int \frac{6dx}{(1 - x)^2}.$
12. $\int \left(7 + 7x - x^7 + \frac{5}{x^7} + 7^x + \frac{4}{\sin^2 x} - \frac{3}{x^2 - 16} \right) dx, \quad \int \cos(3 + 5x) dx,$
 $\int e^{-3x} dx, \quad \int \frac{3dx}{4 + 5x}, \quad \int (2 - 3x)^4 dx.$
13. $\int \left(7 + 5x - x^2 + \frac{3}{x^2} + 2^x + e^x - \frac{5}{\sqrt{25 - x^2}} \right) dx, \quad \int \operatorname{ctg}(1 - 3x) dx,$
 $\int e^{1-x} dx, \quad \int \frac{3dx}{x - 4}, \quad \int (5 + 3x)^5 dx.$
14. $\int \left(8 - x^4 + \frac{5}{x^4} + 4^x - 2\sin x + \frac{3}{\cos^2 x} - \frac{5}{x^2 + 36} \right) dx, \quad \int \operatorname{tg}(5 - x) dx,$
 $\int 5^{2-x} dx, \quad \int \frac{5dx}{2 + 3x}, \quad \int \frac{dx}{(2 + 3x)^5}.$
15. $\int \left(3 - 2x^3 + \frac{2}{x^3} + 3^x - 5\sin x - 4e^x - \frac{5}{x^2 - 25} \right) dx, \quad \int \cos(2 - 5x) dx,$
 $\int \operatorname{tg} 3x dx, \quad \int \frac{3dx}{1 + 4x}, \quad \int \frac{dx}{(5 + 2x)^3}.$
16. $\int \left(3 + 5x + x^9 - \frac{6}{x^3} + 3^x + \operatorname{tg} x - \frac{5}{x^2 - 36} \right) dx, \quad \int e^{3x-5} dx,$
 $\int \sin 2x dx, \quad \int \frac{6dx}{1 - x}, \quad \int (2 + 5x)^4 dx.$

З а д а ч а 2. Найти неопределенные интегралы методом замены переменной или интегрирования по частям.

1. $\int \frac{e^x dx}{2-3e^x}, \int \cos^4 5x \sin 5x dx, \int (1-x) \sin 2x dx.$
2. $\int \frac{5x^2 dx}{\sqrt{4-x^3}}, \int \frac{\sin 3x}{1-4\cos 3x} dx, \int (2-x) \cos 5x dx.$
3. $\int \frac{\arccos^3 x dx}{\sqrt{1-x^2}}, \int \sqrt{2-3\sin 2x} \cos 2x dx, \int x e^{2-x} dx.$
4. $\int \frac{e^{4-3\sqrt{x}} dx}{\sqrt{x}}, \int \frac{\cos 5x}{2+3\sin 5x} dx, \int (2x-3) \sin 5x dx.$
5. $\int x^2 \sqrt[4]{3-x^3} dx, \int (1-5\cos^4 3x) \sin 3x dx, \int (2+x) e^{-x} dx.$
6. $\int \frac{\sqrt{\operatorname{arctg} x} dx}{1+x^2}, \int \cos 5x (2+3\sin^2 5x) dx, \int e^{3x} x dx.$
7. $\int \frac{3-\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx, \int \sqrt{1+\cos 3x} \sin 3x dx, \int (1+2x) e^{-x} dx.$
8. $\int \frac{\ln^5 x dx}{2x}, \int \sin^5 3x \cos 3x dx, \int (1-x) \cos 3x dx.$
9. $\int \frac{x dx}{\sqrt[3]{1-4x^2}}, \int \cos^3 4x \sin 4x dx, \int (2+x) \sin 3x dx.$
10. $\int \frac{(2-3\ln x) dx}{x}, \int \frac{\sin 5x}{1+\cos^2 5x} dx, \int (1-3x) e^{5x} dx.$
11. $\int \frac{1+\operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx, \int \sqrt{1+\sin 2x} \cos 2x dx, \int (1+5x) 2^{-x} dx.$
12. $\int \frac{x dx}{(1+3x^2)^2}, \int \sin^3 2x \cos 2x dx, \int (2-3x) 5^x dx.$
13. $\int \frac{\cos \sqrt{x} dx}{\sqrt{x}}, \int \frac{e^x dx}{2+5e^x}, \int (x-4) \sin 6x dx.$
14. $\int x^3 \sqrt[5]{2+x^4} dx, \int (1+2\cos^3 5x) \sin 5x dx, \int (2+4x) e^{3x} dx.$

$$15. \int \frac{x^5 dx}{\sqrt{1-2x^6}}, \quad \int \frac{\cos 2x}{5-\sin 2x} dx, \quad \int (3-2x)\cos 4x dx.$$

$$16. \int \frac{\operatorname{arccotg}^3 x}{1+x^2} dx, \quad \int \frac{\cos 4x dx}{\sin^2 4x+1}, \quad \int (1-x)\cos 3x dx.$$

З а д а ч а 3. Найти неопределенный интеграл от рациональной дроби.

$$1. \int \frac{x^2-3x+1}{x^3-9x} dx. \quad 2. \int \frac{2x+5}{x^3-x^2-2x} dx. \quad 3. \int \frac{x^2-x+2}{x^3+4x^2+3x} dx.$$

$$4. \int \frac{x^2-3x+1}{x^3-16x} dx. \quad 5. \int \frac{6-2x}{x^3-5x^2+6x} dx. \quad 6. \int \frac{x+1}{x^3-25x} dx.$$

$$7. \int \frac{2-5x}{x^3-x^2-6x} dx. \quad 8. \int \frac{x^2+x-1}{x^3-4x} dx. \quad 9. \int \frac{x^2+2x+4}{x^3+6x^2+5x} dx.$$

$$10. \int \frac{x^2-2x+3}{x^3+x^2-2x} dx. \quad 11. \int \frac{x-3}{x^3-3x^2-4x} dx. \quad 12. \int \frac{3x+2}{x^3+5x^2+4x} dx.$$

$$13. \int \frac{x^2+2}{x^3-5x^2+4x} dx. \quad 14. \int \frac{x^2+2x-1}{x^3-3x^2-4x} dx. \quad 15. \int \frac{x^2+1}{x^3+3x^2-4x} dx.$$

$$16. \int \frac{5x-1}{x^3-36x} dx.$$

З а д а ч а 4. Найти площадь фигуры, ограниченной заданными линиями.

$$1. y=x, y=x^2-2x, x \leq 2.$$

$$2. y=x, y=5x^2-4, x \geq 0.$$

$$3. y=-x, y=4-5x^2, x \geq 0.$$

$$4. y=2x, y=x^2-4x, x \leq 4.$$

$$5. y=4, y=(x-2)^2.$$

$$6. y=-x, y=4x-x^2, x \leq 2.$$

$$7. y=-x, y=2x-x^2, x \leq 2.$$

$$8. y=0, y=x^2-4x.$$

$$9. y=-2x, y=-x^2+2x, x \leq 2.$$

$$10. y=3x, y=x^2-6x, x \leq 1.$$

$$11. y=-x, y=6x-x^2, x \leq 3.$$

$$12. y=0, y=1-(x-2)^2.$$

$$13. y=-3, y=1-x^2, x \leq 1.$$

$$14. y=2, y=x^2-2, x \geq -1.$$

$$15. y=2x, y=x^2-2x, x \leq 1.$$

$$16. y=x, y=x^2-4x, x \leq 2.$$

1.3. Контрольная работа 6

Дифференциальные уравнения

З а д а ч а 1. Найти общее решение дифференциального уравнения.

- | | | |
|---------------------------------------|---------------------------------------|-------------------------------------|
| 1. $y' - \frac{x^3}{y^2} = 0.$ | 2. $y' \operatorname{ctg} x = 3 + y.$ | 3. $(x^2 + 1)y' = 2y + 1.$ |
| 4. $y' + \frac{x^2}{y} = 0.$ | 5. $y' = \frac{2y + 5}{2x - 1}.$ | 6. $y' = \frac{2x + 4}{3y - 1}.$ |
| 7. $(2 - 3y)y' = 2x$ | 8. $(2 + 3x)y' = 3y - 5.$ | 9. $\frac{y'}{y^3} - x + 1 = 0.$ |
| 10. $y' - x^2y = 0.$ | 11. $y' = \frac{1 + x}{y}.$ | 12. $y' = 2xe^{2y}.$ |
| 13. $\frac{y'}{x^3} - y = 0.$ | 14. $y' - \frac{2 - x}{y^2} = 0.$ | 15. $y' = \frac{1 + y^2}{1 + x^2}.$ |
| 16. $y' \operatorname{tg} x = y - 2.$ | | |

З а д а ч а 2. Найти общие решения однородных дифференциальных уравнений.

- | | | |
|--|---|---|
| 1. $y'' - 3y' - 4y = 0;$
$y'' - 6y' + 9y = 0.$ | 2. $y'' - 5y' - 6y = 0;$
$y'' - 10y' + 25y = 0.$ | 3. $y'' - 5y' + 4y = 0;$
$y'' - 14y' + 49y = 0.$ |
| 4. $y'' - y' - 2y = 0;$
$y'' + 6y' + 9y = 0.$ | 5. $y'' + 5y' - 6y = 0;$
$y'' - 12y' + 36y = 0.$ | 6. $y'' - y' - 12y = 0;$
$y'' + 8y' + 16y = 0.$ |
| 7. $y'' + 3y' + 2y = 0;$
$y'' - 4y' + 4y = 0.$ | 8. $y'' - 4y' = 0;$
$y'' + 8y' + 16y = 0.$ | 9. $y'' + 2y' - 24y = 0;$
$y'' + 16y' + 64y = 0.$ |
| 10. $y'' + y' - 2y = 0;$
$y'' + 4y' + 4y = 0.$ | 11. $y'' - 5y' - 14y = 0;$
$y'' + 14y' + 49y = 0.$ | 12. $y'' - 2y' - 15y = 0;$
$y'' - 18y' + 81y = 0.$ |
| 13. $y'' - 4y' - 5y = 0;$
$y'' + 10y' + 25y = 0.$ | 14. $y'' + y' - 20y = 0;$
$y'' - 16y' + 64y = 0.$ | 15. $y'' - 4y = 0;$
$y'' - 8y' + 16y = 0.$ |
| 16. $y'' + 4y' - 5y = 0;$
$y'' + 12y' + 36y = 0.$ | | |

З а д а ч а 3. Решить задачу Коши.

- | | | |
|--|---|--|
| 1. $y'' + 2y' + 2y = 0;$
$y(0) = 3; y'(0) = 0.$ | 2. $y'' + 4y' + 5y = 0;$
$y(0) = 2; y'(0) = 3.$ | 3. $y'' - 2y' + 17y = 0;$
$y(0) = 3; y'(0) = 1.$ |
| 4. $y'' + 4y = 0;$
$y(0) = 2; y'(0) = 1.$ | 5. $y'' + 4y' + 8y = 0;$
$y(0) = -1; y'(0) = 0.$ | 6. $y'' + 2y' + 10y = 0;$
$y(0) = -1; y'(0) = 0.$ |
| 7. $y'' + 2y' + 5y = 0;$
$y(0) = 2; y'(0) = 0.$ | 8. $y'' - 2y' + 2y = 0;$
$y(0) = 1; y'(0) = 3.$ | 9. $y'' + 25y = 0;$
$y(0) = -2; y'(0) = 2.$ |
| 10. $y'' - 2y' + 10y = 0;$
$y(0) = 1; y'(0) = 2.$ | 11. $y'' + 9y = 0;$
$y(0) = 1; y'(0) = 2.$ | 12. $y'' - 2y' + 5y = 0;$
$y(0) = 1; y'(0) = 3.$ |
| 13. $y'' + 36y = 0;$
$y(0) = 2; y'(0) = 1.$ | 14. $y'' - 4y' + 5y = 0;$
$y(0) = 3; y'(0) = 0.$ | 15. $y'' + 16y = 0;$
$y(0) = 3; y'(0) = 2.$ |
| 16. $y'' - 4y' + 8y = 0;$
$y(0) = 1; y'(0) = 1.$ | | |

З а д а ч а 4. Найти общее решение неоднородного линейного дифференциального уравнения второго порядка.

- | | |
|-------------------------------------|--|
| 1. $y'' - 5y' + 4y = (x-1)e^{2x}.$ | 2. $y'' + 5y' - 6y = (2x+1)e^{-2x}.$ |
| 3. $y'' - y' - 2y = x^2 - 3x + 1.$ | 4. $y'' - 8y' + 15y = 3x^2 - x + 1.$ |
| 5. $y'' + 3y' + 2y = x^2 + x - 2.$ | 6. $y'' + 6y' + 8y = xe^{3x}.$ |
| 7. $y'' - 4y = x^2 + 3x - 1.$ | 8. $y'' - 4y' + 4y = x^2 - 5.$ |
| 9. $y'' + y' - 2y = 2x^2 + x + 2.$ | 10. $y'' - 4y' + 3y = (3x+2)e^{-x}.$ |
| 11. $y'' - 4y' - 5y = (2x+3)e^x.$ | 12. $y'' + 3y' + 2y = 4x^2 - 5x + 9.$ |
| 13. $y'' - 5y' - 6y = x^2 - x - 3.$ | 14. $y'' - 6y' + 9y = 4x^2 - 11x + 3.$ |
| 15. $y'' + 4y' - 5y = (x+4)e^{2x}.$ | 16. $y'' - 3y' - 4y = (2x-3)e^{3x}.$ |

2. ФОРМУЛЫ И ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

2.1. Формулы и примеры решения задач контрольной работы 4

З а д а ч а 1. Заданы функции двух переменных:

$$z = f(x; y) = 5x^2 - 3y^5x^4 + 7 + e^{xy}; \quad z = \varphi(x; y) = \operatorname{tg} x \cdot \ln(x^2 y); \quad z = g(x; y) = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}.$$

Требуется: а) найти $\frac{\partial f}{\partial x}$; $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$; $\frac{\partial f}{\partial y}$; $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$; б) найти $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$; $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$; в) показать,

что $\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}$.

Р е ш е н и е.

При вычислении производной по x с величиной y обращаемся как с константой. Соответственно при дифференцировании по y $x = \text{const}$.

Остальные правила определения частных производных те же, что и правила дифференцирования, приведенные в контрольной работе 3.

а) $z = f(x; y) = 5x^2 - 3y^5x^4 + 7 + e^{xy}$;

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \{y - \text{const}\} = 5 \cdot 2x - 3y^5 \cdot 4x^3 + 0 + e^{xy} \cdot y \cdot 1 = 10x - 12y^5x^3 + y \cdot e^{xy};$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \{y - \text{const}\} = 10 - 12y^5 \cdot 3x^2 + y \cdot e^{xy} \cdot y \cdot 1;$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \{x - \text{const}\} = 0 - 3x^4 \cdot 5y^4 + 0 + e^{xy} \cdot x \cdot 1 = -15x^4y^4 + xe^{xy};$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \{x - \text{const}\} = -15x^4 \cdot 4y^3 + x \cdot e^{xy} \cdot x \cdot 1 = -60x^4y^3 + x^2e^{xy}.$$

б) $z = \varphi(x; y) = \operatorname{tg} x \cdot \ln(x^2 y)$;

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \{y - \text{const}\} = (\operatorname{tg} x)'_x \cdot \ln(x^2 y) + \operatorname{tg} x \cdot (\ln(x^2 y))'_x = \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \ln(x^2 y) + \operatorname{tg} x \cdot \frac{1}{x^2 y} \cdot y \cdot 2x =$$

$$= \frac{\ln x^2 y}{\cos^2 x} + \frac{2 \operatorname{tg} x}{x};$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \{x - \text{const}\} = \operatorname{tg} x \cdot \frac{1}{x^2 y} \cdot x^2 \cdot 1 = \frac{\operatorname{tg} x}{y}.$$

$$\text{в) } z = g(x; y) = \operatorname{arctg} \frac{x}{y};$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2} \cdot \frac{1}{y} \cdot 1 = \frac{y}{x^2 + y^2};$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial g}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{x^2 + y^2} \right) = \frac{y'_y (x^2 + y^2) - y (x^2 + y^2)'_y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{(x^2 + y^2) - y(2 \cdot y)}{(x^2 + y^2)^2} = \\ &= \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}; \end{aligned}$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2} \cdot x \cdot \left(-\frac{1}{y^2} \right) = -\frac{x}{x^2 + y^2};$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial g}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{x}{x^2 + y^2} \right) = -\frac{x'_x (x^2 + y^2) - x (x^2 + y^2)'_x}{(x^2 + y^2)^2} = -\frac{1 \cdot (x^2 + y^2) - x(2x)}{(x^2 + y^2)^2} = \\ &= -\frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}. \end{aligned}$$

$$\text{Итак, } \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

З а д а ч а 2. Даны функция $z = f(x; y) = 3x^2 - 5y^2 + 1$ и точки $A(-1; 2)$, $B(-0,9; 1,8)$. Вычислить: а) точные значения $z_A = f(x_A; y_A)$ и $z_B = f(x_B; y_B)$; б) полный дифференциал в точке A ; в) приближенное значение $\tilde{z}_B$ функции $f(x; y)$ в точке B , заменив приращение функции дифференциалом при переходе от точки A к точке B ; г) абсолютную и относительную ошибки.

Р е ш е н и е.

а) Найдем точные значения функции в точках A и B :

$$z_A = f(x_A; y_A) = f(-1; 2) = 3 \cdot (-1)^2 - 5 \cdot 2^2 + 1 = -16;$$

$$z_B = f(x_B; y_B) = f(-0,9; 1,8) = 3 \cdot (-0,9)^2 - 5 \cdot (1,8)^2 = -13,77.$$

б) Найдем частные производные: $\frac{\partial f}{\partial x} = 6x$; $\frac{\partial f}{\partial y} = -10y$.

В точке A : $\frac{\partial f(A)}{\partial x} = 6 \cdot (-1) = -6$; $\frac{\partial f(A)}{\partial y} = -10 \cdot 2 = -20$.

$\Delta x = x_B - x_A = -0.9 - (-1) = 0,1$ – приращение x .

$\Delta y = y_B - y_A = 1.8 - 2 = -0,2$ – приращение y .

Полный дифференциал функции $f(x; y)$ имеет вид:

$$df(x; y) = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot dy = \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y.$$

Полный дифференциал в точке A :

$$df(A) = -6 \cdot 0,1 + (-20)(-0,2) = 3,4.$$

в) $z_B = f(B) = f(A) + \Delta f$, а $\tilde{z}_B = f(A) + df(A) = -16 + 3,4 = -12,6$.

г) Абсолютная ошибка $\varepsilon = |\tilde{z}_B - z_B| = |-12,6 - (-13,77)| = 1,17$.

Относительная ошибка $\delta = \frac{|\tilde{z}_B - z_B|}{|z_B|} \cdot 100 \% = \frac{1,17}{13,77} \cdot 100 \% \approx 8,5 \%$.

З а д а ч а 3. Не подставляя промежуточные аргументы, найти $\frac{\partial z}{\partial t}$ слож-

ной функции $z = f(x; y)$, заданной цепочкой функций:

$$z = \cos(x^2 - 3y^3); x = e^{3t}; y = 1 - t^2.$$

Р е ш е н и е.

Построим схему зависимости функции от своих аргументов (рис. 1).

Запись $z \rightarrow x$ означает дифференцирование z по x ,

т. е. $\frac{\partial z}{\partial x}$. Аналогично $z \rightarrow y$, $x \rightarrow t$, $y \rightarrow t$.

Чтобы найти производную $\frac{\partial z}{\partial t}$, нужно «спуститься»

по двум траекториям: $z \rightarrow x \rightarrow t$, что означает $\frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt}$ и

$z \rightarrow y \rightarrow t$, значит $\frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt}$.

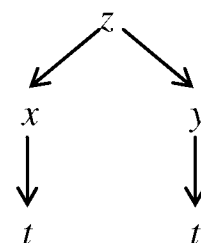


Рис. 1

Таким образом, $\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt}$.

Находим производные:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \{y - \text{const}\} = -\sin(x^2 - 3y^3) \cdot (x^2 - 3y^3)'_x = -2x \sin(x^2 - 3y^3);$$

$$\frac{dx}{dt} = (e^{3t})'_t = 3e^{3t};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \{x - \text{const}\} = -\sin(x^2 - 3y^3) \cdot (x^2 - 3y^3)'_y = 9y^2 \sin(x^2 - 3y^3);$$

$$\frac{dy}{dt} = (1 - t^2)'_t = -2t.$$

$$\text{Итак, } \frac{\partial z}{\partial t} = -2x \sin(x^2 - 3y^3) 3e^{3t} + y^2 \sin(x^2 - 3y^3) (-2t).$$

З а д а ч а 4. Получены пять экспериментальных значений функции $y = f(x)$. Методом наименьших квадратов найти линейное приближение функции $y = f(x)$ в виде $y = ax + b$. Сделать чертеж.

x_i	1	2	3	4	5
y_i	6,0	6,1	4,2	3,0	1,9

Р е ш е н и е.

Коэффициенты линейной функции $y = ax + b$ по методу наименьших

квадратов определяются из системы:
$$\begin{cases} a \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n y_i x_i; \\ a \sum_{i=1}^n x_i + b n = \sum_{i=1}^n y_i, \end{cases}$$

где i – номер точки; n – число точек.

Вычислим все необходимые суммы:

$$\sum_{i=1}^5 x_i = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15; \quad \sum_{i=1}^5 y_i = 6,0 + 6,1 + 4,2 + 3,0 + 1,9 = 21,2;$$

$$\sum_{i=1}^5 x_i y_i = 1 \cdot 6 + 2 \cdot 6,1 + 3 \cdot 4,2 + 4 \cdot 3 + 5 \cdot 1,9 = 52,3; \quad \sum_{i=1}^5 x_i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 55.$$

Решаем систему уравнений:

$$\begin{cases} 55a + 15b = 52,3; \\ 15a + 5b = 21,2; \end{cases} \cdot (-3) \quad \begin{cases} 55a + 15b = 52,3; \\ -45a - 15b = -63,6. \end{cases}$$

Складываем уравнения: $10a = -11,3$; $a = -1,13$.

Из второго уравнения находим: $5b = 21,2 - 15a$; $b = 7,63$.

Таким образом, $y = -1,13x + 7,63$.

При $x = 0$ $y = 7,63$; при $x = 5$ $y = 1,98$.

Чертеж приведен на рис. 2.

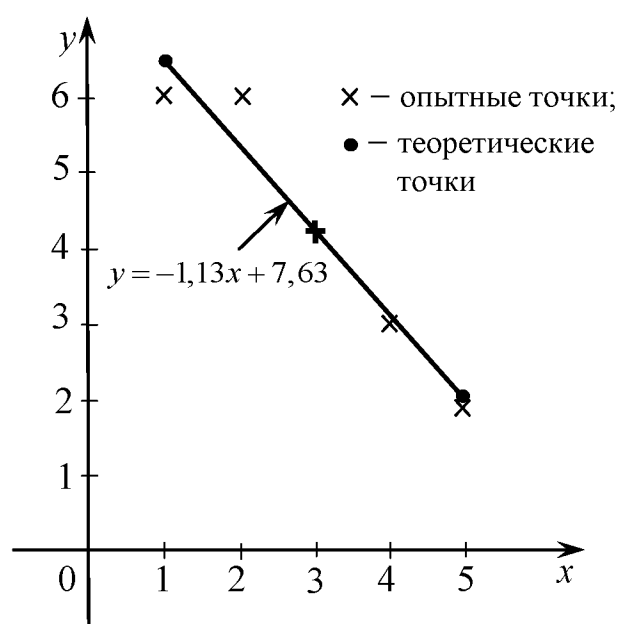


Рис. 2

2.2. Формулы и примеры решения задач контрольной работы 5

З а д а ч а 1. Найти неопределенные интегралы.

$$I_1 = \int \left(7 - 8x + \frac{5}{x^3} + x^3 - 5\sin x + \frac{3}{x^2 - 49} - \frac{2}{x^2 + 49} + \frac{1}{\sqrt{2 - x^2}} \right) dx;$$

$$I_2 = \int \sin 5x dx;$$

$$I_3 = \int \cos \frac{x}{5} dx;$$

$$I_4 = \int e^{2x-1} dx;$$

$$I_5 = \int \frac{7dx}{1-x};$$

$$I_6 = \int \frac{3dx}{(5+2x)^7}.$$

Р е ш е н и е.

Основные табличные интегралы и правила интегрирования.

1. $\int dx = x + c.$
2. $\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \quad (\alpha \neq -1).$
3. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c.$
4. $\int \sin x dx = -\cos x + c.$
5. $\int \cos x dx = \sin x + c.$
6. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + c.$
7. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + c.$
8. $\int \operatorname{tg} x dx = -\ln|\cos x| + c.$
9. $\int \operatorname{ctg} x dx = \ln|\sin x| + c.$
10. $\int e^x dx = e^x + c.$
11. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c.$
12. $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + c.$
13. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c.$
14. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + c.$
15. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + c.$
16. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + c.$
17. $\int cf(x) dx = c \int f(x) dx, \quad c - \text{const.}$
18. $\int (f(x) + g(x) - \varphi(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx - \int \varphi(x) dx.$
19. Если $\int f(x) dx = F(x) + c$, то $\int f(kx+b) dx = \frac{1}{k} F(kx+b) + c.$

1) При вычислении интеграла I_1 сначала применяем правила 17, 18, затем приводим третье, седьмое, восьмое и девятое слагаемые исходного интеграла к табличному виду и используем табличные интегралы 1 – 16.

$$\begin{aligned}
 I_1 &= 7 \int dx - 8 \int x dx + 5 \int x^{-3} dx + \int x^3 dx - 5 \int \sin x dx - 3 \int \frac{dx}{x^2 - 7^2} - 2 \int \frac{dx}{x^2 + 7^2} + \\
 &\quad + \int \frac{dx}{\sqrt{(\sqrt{2})^2 - x^2}} = 7x - \frac{8x^{1+1}}{1+1} + \frac{5x^{-3+1}}{-3+1} + \frac{x^{3+1}}{3+1} - 5(-\cos x) - \\
 &\quad - \frac{3}{2 \cdot 7} \ln \left| \frac{7+x}{7-x} \right| - \frac{2}{7} \operatorname{arctg} \frac{x}{7} + \arcsin \frac{x}{\sqrt{2}} + c = 7x - 4x^2 - \frac{5}{2x^2} + \frac{x^4}{4} + \\
 &\quad + 5 \cos x - \frac{3}{14} \ln \left| \frac{7+x}{7-x} \right| - \frac{2}{7} \operatorname{arctg} \frac{x}{7} + \arcsin \frac{x}{\sqrt{2}} + c.
 \end{aligned}$$

Заданные интегралы 2 – 6 вычисляем с использованием правила 19 и табличных интегралов 4, 5, 10, 3 и 2 соответственно:

$$2) I_2 = \int \sin(5x+0) dx = -\frac{1}{5} \cos(5x+0) + c = -\frac{1}{5} \cos 5x + c;$$

$$3) I_3 = \int \cos\left(\frac{1}{5}x+0\right) dx = \frac{1}{\frac{1}{5}} \sin\left(\frac{1}{5}x+0\right) + c = 5 \sin \frac{x}{5} + c;$$

$$4) I_4 = \int e^{2x+1} dx = \frac{1}{2} e^{2x+1} + c;$$

$$5) I_5 = 7 \int \frac{dx}{-1 \cdot x+1} = 7 \cdot \frac{1}{-1} \ln|-x+1| + c = -7 \ln|1-x| + c;$$

$$\begin{aligned}
 6) I_6 &= 3 \int \frac{dx}{(2x+5)^7} = 3 \int (2x+5)^{-7} dx = 3 \cdot \frac{1}{2} \frac{(2x+5)^{-7+1}}{-7+1} + c = \\
 &= \frac{3}{2 \cdot (-6)} (2x+5)^{-6} + c = \frac{-1}{4(2x+5)^6} + c.
 \end{aligned}$$

З а д а ч а 2. Найти интегралы методом замены или интегрирования по частям.

$$1) \int x^2 \sqrt{2+5x^3} dx, \quad 2) \int \frac{5 \sin x dx}{2+3 \cos x}, \quad 3) \int (1-2x) e^{3x} dx.$$

Р е ш е н и е.

Рассмотрим примеры интегрирования с использованием метода замены. Для этого используем формулу $\int f(x) dx = \int f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt$.

$$1) \int x^2 \sqrt{2+5x^3} dx = \int \sqrt{2+5x^3} \cdot x^2 dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{введем новую} \\ \text{переменную} \\ t = 2+5x^3 \\ dt = (2+5x^3)' dx \\ dt = 15x^2 dx \\ x^2 dx = dt / 15 \end{array} \right\} = \int \sqrt{t} \cdot \frac{dt}{15} = \frac{1}{15} \int t^{\frac{1}{2}} dt =$$

$$= \frac{1}{15} \cdot \frac{t^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + c = \frac{2}{45} \sqrt{t^3} + c = \left\{ \begin{array}{l} \text{возвращаемся} \\ \text{к старой переменной} \end{array} \right\} = \frac{2}{45} \sqrt{(2+5x^3)^3} + c.$$

$$2) \int \frac{5 \sin x dx}{2+3 \cos x} = \left\{ \begin{array}{l} t = 2+3 \cos x \\ dt = (2+3 \cos x)' dx \\ dt = -3 \sin x dx \\ 5 \sin x dx = -\frac{5}{3} dt \end{array} \right\} = -\frac{5}{3} \int \frac{dt}{t} = -\frac{5}{3} \ln|t| + c = -\frac{5}{3} \ln|2+3 \cos x| + c.$$

Рассмотрим пример вычисления интеграла с использованием метода интегрирования по частям. Для этого используем формулу:

$$\int u(x) dv(x) = u(x)v(x) - \int v(x) du(x).$$

$$3) \int (1-2x) e^{3x} dx = \left\{ \begin{array}{l} u = 1-2x \Rightarrow du = (1-2x)' dx \Rightarrow du = -2 dx \\ dv = e^{3x} dx \Rightarrow v = \int e^{3x} dx \Rightarrow v = \frac{1}{3} e^{3x} \end{array} \right\} = uv - \int v du =$$

$$= (1-2x) \cdot \frac{1}{3} e^{3x} - \int \frac{1}{3} e^{3x} \cdot (-2dx) = \frac{1}{3} (1-2x) e^{3x} + \frac{2}{3} \int e^{3x} dx = \frac{1}{3} (1-2x) e^{3x} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} e^{3x} + c = \frac{1}{3} (1-2x) e^{3x} + \frac{2}{9} e^{3x} + c.$$

З а д а ч а 3. Найти интеграл от рациональной дроби $\int \frac{3x^2 + 5}{x^3 + 6x^2 - 7x} dx$.

Р е ш е н и е.

В числителе записан многочлен второй степени, а в знаменателе – третьей, значит, дробь правильная.

Решаем уравнение $x^3 + 6x^2 - 7x = 0$. Получаем: $x(x^2 + 6x - 7) = 0$; $x_1 = 0$; $x_2 = 1$; $x_3 = -7$. Корни знаменателя простые действительные, следовательно, подынтегральную дробь можно представить в виде:

$$\frac{3x^2 + 5}{x^3 + 6x^2 - 7x} = \frac{A}{x-0} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+7}. \quad (1)$$

Приведем правую часть равенства (1) к общему знаменателю:

$$\frac{3x^2 + 5}{x^3 + 6x^2 - 7x} = \frac{A(x-1)(x+7) + Bx(x+7) + Cx(x-1)}{x(x-1)(x+7)}.$$

Так как равны между собой дроби и их знаменатели, то равны между собой и числители этих дробей:

$$3x^2 + 5 = A(x-1)(x+7) + Bx(x+7) + Cx(x-1) \text{ или}$$

$$3x^2 + 0x + 5 = (A+B+C)x^2 + (6A+7B-C)x + (-7A).$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях переменной x и

свободные члены, получаем систему:
$$\begin{cases} A+B+C=3; \\ 6A+7B-C=0; \\ -7A=5. \end{cases}$$

Решаем систему: $A = -5/7$; $\begin{cases} B+C=3+5/7; \\ 7B-C=6 \cdot 5/7; \end{cases}$ После

сложения двух последних уравнений находим: $8B = 56/7 = 8$; $B = 1$; $C = 26/7 - 1 = 19/7$. Итак, $A = -5/7$; $B = 1$; $C = 19/7$. Выполните проверку.

С учетом равенства (1) получаем:

$$\int \frac{3x^2 + 5}{x^3 + 6x^2 - 7x} dx = \int \frac{-5/7}{x} dx + \int \frac{1}{x-1} dx + \int \frac{19/7}{x+7} dx = -\frac{5}{7} \ln|x| + \ln|x-1| + \frac{19}{7} \ln|x+7| + c.$$

З а д а ч а 4. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 - 6x$, $y = x$, $x \leq 6$.

Если $f(x) \geq g(x)$ на отрезке $[a; b]$ (рис. 3), то площадь фигуры, ограни-

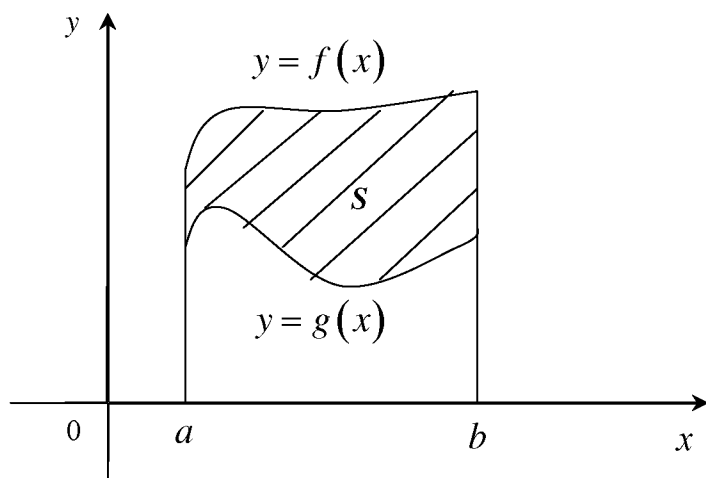


Рис. 3

ченной линиями $y = f(x)$;

$y = g(x)$; $x = a$; $x = b$, вычис-

ляется по формуле:

$$S = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx.$$

Определенный интеграл вычисляется по формуле Ньютона – Лейбница:

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

где $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$.

Р е ш е н и е.

Строим чертеж (рис. 4).

$y = x$, $x = 6$ – прямые линии, $y = x^2 - 6x$ – парабола.

Так как $x \geq x^2 - 6x$ на отрезке $[0; 6]$, значит, площадь полученной фигуры вычисляем по формуле:

$$S = \int_0^6 [x - (x^2 - 6x)] dx = \int_0^6 [7x - x^2] dx = \left(7 \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^6 =$$

$$= \left(\frac{7}{2} \cdot 6^2 - \frac{1}{3} \cdot 6^3 \right) - \left(\frac{7}{2} \cdot 0^2 - \frac{0^3}{3} \right) = \frac{7 \cdot 36}{2} - \frac{216}{3} = 126 - 72 = 54 \text{ кв. ед.}$$

Выполните проверку по чертежу.

$$y = x$$

x	y
0	0
6	6

$$y = x^2 - 6x$$

x	y
0	0
1	-5
3	-9
5	-5
6	0

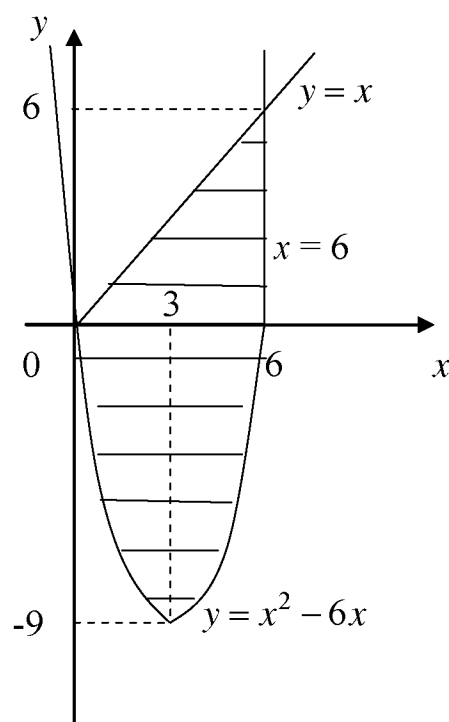


Рис. 4

2.3. Формулы и примеры решения задач контрольной работы 6

Задача 1. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y' + \frac{x^4}{y^3} = 0.$$

Решение.

Задано дифференциальное уравнение первого порядка. Приведем его к уравнению вида $f_1(x)dx = f_2(y)dy$. Для этого заменим y' на $\frac{dy}{dx}$. Получим:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x^4}{y^3}, \text{ умножим обе части этого уравнения на } y^3 dx. \text{ Тогда имеем уравне-}$$

ние вида: $y^3 dy = -x^4 dx$. В одной его части находится только переменная y , в другой – только x . При этом говорят, что удалось разделить переменные или получить уравнение с разделенными переменными. Интегрируем последнее

уравнение: $\int y^3 dy = -\int x^4 dx$; $\frac{y^4}{4} = -\frac{x^5}{5} + c$; $y^4 = -\frac{4}{5}x^5 + 4c$.

Получили общее решение: $y = \pm \sqrt[4]{-\frac{4}{5}x^5 + 4c}$.

З а д а ч а 2. Найти общие решения однородных дифференциальных уравнений $y'' + 6y' - 7y = 0$ и $y'' + 14y' + 49y = 0$.

Р е ш е н и е.

Уравнение вида $y'' + py' + qy = 0$ называют однородным линейным дифференциальным уравнением второго порядка. Его общее решение содержит две произвольные постоянные.

Т е о р е м а 1. О структуре общего решения однородного линейного дифференциального уравнения.

Если функции $y_{1ч.о}$ и $y_{2ч.о}$ – два каких-либо частных линейно независимых решения однородного уравнения, то $y_{о.о} = c_1 y_{1ч.о} + c_2 y_{2ч.о}$ есть общее решение этого уравнения, где c_1 и c_2 – произвольные постоянные.

Для решения однородного дифференциального уравнения составляем характеристическое уравнение $k^2 + pk + q = 0$.

Т е о р е м а 2. О частных решениях однородного линейного дифференциального уравнения.

Если k_1 и k_2 – два различных действительных корня характеристического уравнения, то функции $y_{1ч.о} = e^{k_1 x}$, $y_{2ч.о} = e^{k_2 x}$ являются частными линейно независимыми решениями уравнения;

если действительные корни равны друг другу, т. е. $k_1 = k_2 = k$, то $y_{1ч.о} = e^{kx}$; $y_{2ч.о} = xe^{kx}$;

если $k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ – пара сопряженных комплексных корней, то $y_{1ч.о} = e^{\alpha x} \cos \beta x$, $y_{2ч.о} = e^{\alpha x} \sin \beta x$.

З а м е ч а н и е. Решения $y_{1ч.о}$ и $y_{2ч.о}$ называют линейно независимыми, если их отношение не является постоянным, т. е. $\frac{y_{1ч.о}}{y_{2ч.о}} \neq \text{const}$.

$$1) y'' + 6y' - 7y = 0.$$

Составляем характеристическое уравнение: $k^2 + 6k - 7 = 0$.

$k_1 = 1$; $k_2 = -7$ – его действительные различные корни. По теоремам 1 и 2 получаем: $y_{1\text{ч.о}} = e^x$; $y_{2\text{ч.о}} = e^{-7x}$.

Таким образом, общее решение имеет вид $y_{\text{о.о}} = c_1 e^x + c_2 e^{-7x}$.

$$2) y'' + 14y' + 49y = 0.$$

Составим характеристическое уравнение: $k^2 + 14k + 49 = 0$.

$k_1 = k_2 = -7$ – его равные действительные корни. По теоремам 1 и 2 получаем: $y_{1\text{ч.о}} = e^{-7x}$; $y_{2\text{ч.о}} = x e^{-7x}$.

Таким образом, общее решение имеет вид: $y_{\text{о.о}} = c_1 e^{-7x} + c_2 x e^{-7x}$.

З а д а ч а 3. Решить задачу Коши: $y'' + 6y' + 25 \cdot y = 0$; $y(0) = 6$; $y'(0) = 0$.

Р е ш е н и е.

Найдем общее решение уравнения.

Составим характеристическое уравнение: $k^2 + 6k + 25 = 0$,

$k_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 25}}{2} = \frac{-6 \pm 8i}{2} = 3 \pm 4i$ – пара комплексных сопряженных корней. Напомним, что $i = \sqrt{-1}$ – мнимая единица. По теоремам 1 и 2 получаем общее решение исходного уравнения $y(x) = y_{\text{о.о}} = e^{-3x} (c_1 \cos 4x + c_2 \sin 4x)$.

Из общего решения найдем частное, удовлетворяющее начальным условиям: $y(0) = 6$; $y'(0) = 0$. Для этого находим:

$$y'(x) = -3e^{-3x} (c_1 \cos 4x + c_2 \sin 4x) + e^{-3x} (-4c_1 \sin 4x + 4c_2 \cos 4x).$$

Подставляем $x = 0$, $y = 6$ и $y' = 0$ в равенства $y(x)$ и $y'(x)$ и получаем:

$$\begin{cases} 6 = e^{-3 \cdot 0} (c_1 \cos(4 \cdot 0) + c_2 \sin(4 \cdot 0)), \\ 0 = -3e^{-3 \cdot 0} (c_1 \cos(4 \cdot 0) + c_2 \sin(4 \cdot 0)) + e^{-3 \cdot 0} (-4c_1 \sin(4 \cdot 0) + 4c_2 \cos(4 \cdot 0)). \end{cases}$$

$$\text{Так как } e^0 = 1; \cos 0 = 1; \sin 0 = 0, \text{ то } \begin{cases} 6 = c_1; \\ 0 = -3c_1 + 4c_2; \end{cases} \quad \begin{cases} c_1 = 6; \\ c_2 = \frac{3c_1}{4} = \frac{3 \cdot 6}{4} = \frac{9}{2}. \end{cases}$$

Тогда решением задачи Коши будет $y(x) = e^{-3x} \left(6 \cos 4x + \frac{9}{2} \sin 4x \right)$.

Задача 4. Найти общее решение уравнения $y'' + 6y' - 7y = e^{-2x}(3x + 4)$.

Решение.

Составим соответствующее однородное уравнение $y'' + 6y' - 7y = 0$ и его характеристическое уравнение: $k^2 + 6k - 7 = 0$. Корни характеристического уравнения $k_1 = 1$ и $k_2 = -7$ действительные различные. По теоремам 1, 2 получим общее решение однородного уравнения: $y_{о.о} = c_1 e^x + c_2 e^{-7x}$.

Если правая часть неоднородного уравнения имеет вид: $f(x) = e^{\alpha x} P_n(x)$, где $P_n(x)$ – многочлен n -й степени, и ни один из действительных корней характеристического уравнения (k_1 и k_2) не равен заданному числу α , то частное решение неоднородного линейного дифференциального уравнения следует искать в виде $y_{ч.н} = e^{\alpha x} Q_n(x)$, где $Q_n(x)$ – многочлен n -й степени с неизвестными коэффициентами.

В данной задаче $f(x) = e^{-2x}(3x + 4) = e^{-2x} P_1(x)$, значит, $\alpha = -2$; $n = 1$. Причем $k_1 = 1 \neq \alpha$ и $k_2 = -7 \neq \alpha$. Тогда частное решение необходимо искать в виде $y_{ч.н} = e^{\alpha x} Q_1(x) = e^{-2x}(Ax + B)$.

Найдем коэффициенты A и B многочлена $Q_1(x)$:

$$y'_{ч.н} = -2e^{-2x}(Ax + B) + e^{-2x}A = e^{-2x}(-2Ax - 2B + A),$$

$$y''_{ч.н} = -2e^{-2x}(-2Ax - 2B + A) + e^{-2x}(-2A) = e^{-2x}(4Ax + 4B - 4A).$$

Подставим $y_{ч.н}$, $y'_{ч.н}$, $y''_{ч.н}$ в исходное уравнение и получим:

$$e^{-2x}(4Ax + 4B - 4A) + 6e^{-2x}(-2Ax - 2B + A) - 7e^{-2x}(Ax + B) = e^{-2x}(3x + 4),$$

сократим последнее уравнение на e^{-2x} и приведем подобные члены:

$$\begin{aligned} 4Ax - 12Ax - 7Ax + 4B - 4A - 12B + 6A - 7B &= 3x + 4, \\ -15Ax + 2A - 15B &= 3x + 4. \end{aligned}$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и пра-

вой частях равенства:

$$\begin{cases} -15A = 3, \\ 2A - 15B = 4; \end{cases} \quad \begin{cases} A = -\frac{1}{5}, \\ B = \frac{1}{15}(2A - 4) = \frac{1}{15}\left(-\frac{2}{5} - \frac{20}{5}\right) = -\frac{22}{75}. \end{cases}$$

Таким образом, частное решение уравнения имеет вид:

$$y_{\text{ч.н}} = e^{-2x} \left(-\frac{1}{5}x - \frac{22}{75} \right) = -\frac{1}{5}e^{-2x} \left(x + \frac{22}{15} \right).$$

Т е о р е м а 3. О структуре общего решения неоднородного линейного дифференциального уравнения второго порядка.

Если $y_{\text{o.o}}$ – общее решение однородного уравнения, $y_{\text{ч.н}}$ – какое-либо частное решение неоднородного уравнения, то общее решение неоднородного уравнения будет иметь вид: $y_{\text{o.н}} = y_{\text{o.o}} + y_{\text{ч.н}}$.

По теореме 3 получаем искомое общее решение неоднородного линейного дифференциального уравнения:

$$y_{\text{o.н}} = y_{\text{o.o}} + y_{\text{ч.н}} = c_1 e^x + c_2 e^{-7x} - \frac{1}{5} e^{-2x} \left(x + \frac{22}{15} \right).$$

З а м е ч а н и е. В некоторых вариантах этой задачи правая часть уравнений имеет вид: $f(x) = e^{0 \cdot x} P_n(x)$ и корни k_1 и k_2 характеристического уравнения не равны нулю. Значит, частное решение неоднородного уравнения следует искать в виде $y_{\text{ч.н}} = e^{0 \cdot x} Q_2(x) = Ax^2 + Bx + C$, где A, B, C – коэффициенты, подлежащие определению.

Библиографический список

1. П и с ь м е н н ы й Д. Т. Конспект лекций по высшей математике. Полный курс / Д. Т. П и с ь м е н н ы й . М.: Айрис-пресс, 2008. 287 с.
2. В ы г о д с к и й М. Я. Справочник по высшей математике / М. Я. В ы г о д с к и й. М.: Астрель; АСТ, 2005. 991 с.

3. А р т ю х о в В. Я. Высшая математика / В. Я. А р т ю х о в, Л. В. А в и л о в а, Ю. Г. Г а л и ч / Омский гос. ун-т путей сообщения. Омск, 2010. Ч. 1. 58 с.

4. Высшая математика / В. Я. А р т ю х о в, Л. В. А в и л о в а и др. / Омский гос. ун-т путей сообщения. Омск, 2010. Ч. 2. 45 с.

Учебное издание

ГАЛИЧ Юлия Геннадьевна

МАТЕМАТИКА

Часть 2

Практикум

Редактор Н. А. Майорова

* * *

Подписано в печать 18.01.2017. Формат $60 \times 84^{1/16}$.
Офсетная печать. Бумага офсетная. Усл. печ. л. 2,0. Уч.-изд. л. 2,3.
Тираж 500 экз. Заказ .

* *

Редакционно-издательский отдел ОмГУПСа
Типография ОмГУПСа

*

644046, г. Омск, пр. Маркса, 35