

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Волгоградский государственный технический университет
Себряковский филиал

Кафедра математических и естественно-научных дисциплин

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Методические указания к изучению дисциплины
и выполнению контрольной работы
для студентов заочной формы обучения направление **38.03.01**
Экономика

Михайловка, 2020

Методические указания к выполнению заданий контрольной работы

Структура и содержание выполняемой работы:

Контрольная работа по дисциплине «Математический анализ» состоит из титульного листа и основной части.

Основная часть представляет собой четкое, содержательное и подробное решение предложенных задач. В основной части нужно записать задание. Ниже задания указать решение для данного варианта контрольной работы. Следует подробно объяснить, почему выбрано то или иное решение.

Титульный лист контрольной работы (Приложение 1) обязательно должен содержать:

- Полное наименование учебного заведения;
- Наименование дисциплины, вида работ;
- Фамилию и инициалы студента;
- Номер группы;
- Дату сдачи контрольной работы;
- Номер зачетной книжки студента;
- Фамилию и инициалы преподавателя.

Работа выполняется в тетради с полями (10 клеток) для пометок преподавателя.

В начале работы указывается номер варианта и темы выполняемого задания.

Контрольная работа выполняется в установленные сроки. Вариант контрольной работы соответствует последней цифре номера зачетной книжки студента. Студент должен решать задание из каждого раздела (в соответствии с номером своего варианта).

І СПРАВОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ

Тема «Вычисление пределов»

Теоретические положения.

Определение: Число A называется пределом функции $f(x)$ при x стремящемся к числу a , если для всякого положительного числа $\varepsilon > 0$ можно указать такую окрестность точки a , что как только $|x-a| < \delta$ (x не равно a), то $|f(x)-A| < \varepsilon$. Это записывают так: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$.

Особо важную роль в математике играют функции, предел которых равен нулю.

Теорема 1. Предел алгебраической суммы двух или нескольких переменных равен алгебраической сумме пределов слагаемых. Здесь и далее имеется в виду, что такие пределы (слагаемых, сомножителей и т.д.) существуют.

$$\lim(z + y - u) = \lim z + \lim y - \lim u = A + B - C, \text{ где } \lim z = A, \lim y = B, \lim u = C.$$

Теорема 2. Предел произведения двух или нескольких переменных равен произведению пределов отдельных множителей:

$$\lim(z \cdot y \cdot u) = \lim z \cdot \lim y \cdot \lim u = A \cdot B \cdot C.$$

Следствие. Если одна из переменных величин есть постоянная, то $\lim(My) = M \lim y = MB$, так как предел постоянной равен самой постоянной. (Постоянный множитель можно выносить за знак предела).

Пример:

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 3)(3x + 2) = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 3) \cdot \lim_{x \rightarrow 1} (3x + 2) = (\lim_{x \rightarrow 1} x^2 + 3) \cdot (3 \lim_{x \rightarrow 1} x + 2) = (1 + 3)(3 \cdot 1 + 2) = 4 \cdot 5 = 20.$$

Теорема 3. Предел частного двух переменных равен частному пределов делимого и делителя, если предел делителя не равен 0

$$\text{Если } z \rightarrow A, y \rightarrow B, (B \neq 0), \text{ то } \frac{z}{y} \rightarrow \frac{A}{B}, \text{ то, в другой записи: } \lim \frac{z}{y} = \frac{\lim z}{\lim y} = \frac{A}{B}.$$

Пример.
$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 + 3}{x^3 - 1} = \frac{\lim_{x \rightarrow 2} (2x^2 + 3)}{\lim_{x \rightarrow 2} (x^3 - 1)} = \frac{11}{7}.$$

Теорема 4. Предел степени переменной равен той же степени предела основания:
 $\lim(z^n) = (\lim z)^n$.

Примеры:

$$1) \lim_{x \rightarrow 2} x^3 = (\lim_{x \rightarrow 2} x)^3 = 2^3 = 8; \quad 2) \lim_{x \rightarrow 6} \sqrt{2x-3} = \lim_{x \rightarrow 6} (2x-3)^{\frac{1}{2}} = \left(\lim_{x \rightarrow 6} (2x-3) \right)^{\frac{1}{2}} = (2 \cdot 6 - 3)^{\frac{1}{2}} = 3.$$

Теорема 5. Если переменная z заключена между двумя другими переменными u и v , стремящейся к общему пределу, то z стремится к тому же пределу.

Пример 1. Найти $\lim_{x \rightarrow 2} (x^3 - 3x^2 + 8x + 5)$.

Сначала применяем теорему о пределе алгебраической суммы и одновременно выносим постоянные множители за знак предела, потом – теорему о пределе степени

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x^3 - 3x^2 + 8x + 5) = \lim_{x \rightarrow 2} x^3 - 3 \lim_{x \rightarrow 2} x^2 + 8 \lim_{x \rightarrow 2} x + 5 = 2^3 - 3 \cdot 2^2 + 8 \cdot 2 + 5 = 17.$$

Предел в данном случае можно было получить проще, если сразу на место x подставить его предельное значение: $\lim_{x \rightarrow 2} (x^3 - 3x^2 + 8x + 5) = 2^3 - 3 \cdot 2^2 + 8 \cdot 2 + 5 = 17$.

Пример 2. Найти $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$.

Если в этом примере подставим на место x его предел 3, то получим неопределенность: $\frac{3^2 - 9}{3 - 3} = \frac{0}{0}$. что говорит о том, что теорема о пределе частного неприменима (предел знаменателя равен 0), но $\frac{x^2 - 9}{x - 3} = x + 3$. (1)

Равенство (1) имеет место при всяком x неравном 3. В таком случае, считают, что пределы у левой и правой частей должны быть одинаковы: $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} (x + 3) = 6$.

Пример 3. Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{1+3x} - 1}$.

Так как при $x \rightarrow 0$ предел знаменателя оказывается равным 0, то мы не можем применить теорему о пределе частного; преобразуем данную дробь до перехода к пределу:

$$\frac{x}{\sqrt{1+3x} - 1} = \frac{x(\sqrt{1+3x} + 1)}{(\sqrt{1+3x} - 1)(\sqrt{1+3x} + 1)} = \frac{x(\sqrt{1+3x} + 1)}{3x} = \frac{1}{3}(\sqrt{1+3x} + 1).$$

$$\text{Таким образом, } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{1+3x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{3}(\sqrt{1+3x} + 1) = \frac{1}{3}(\sqrt{1+3 \cdot 0} + 1) = \frac{2}{3}.$$

Пример 4. Найти $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 2}{x^2 + x + 1}$.

Так как с символом ∞ нельзя обращаться как с числом, то надо преобразовать данную дробь, поделив числитель и знаменатель дроби на x в наибольшей степени:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 2}{x^2 + x + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{3x^2}{x^2} + \frac{2}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} + \frac{x}{x^2} + \frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{2}{x^2}}{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = \frac{3 + 0}{1 + 0 + 0} = 3.$$

так как $\frac{1}{x} \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$ и $\frac{1}{x^2} \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$.

Тема «Правила вычисления производных»

Теоретические положения

Производная функции $y=f(x)$

Определение. Пусть задана функция $f(x)$, $x \in (a;b)$, и пусть x_0 — некоторая точка интервала $(a;b)$. Предел $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ называется производной функции $f(x)$ в точке x_0 и обозначается $f'(x_0)$.

$$\text{Таким образом, по определению, } f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \quad (1)$$

Функция, имеющая производную в некоторой точке, называется дифференцируемой в этой точке.

Согласно определения предела функции равенство (1) можно записать в следующем

виде: $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) + \alpha(x)$, где $\alpha(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow x_0$.

Следовательно, $f(x) - f(x_0) = (f'(x_0) + \alpha(x))(x - x_0)$, где $\alpha(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow x_0$ (2)

или $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \alpha(x)(x - x_0)$, где $\alpha(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow x_0$ (3)

Часто для обозначения производной используется символ $\frac{df}{dx}$ (читается «де эф по де икс»).

Производная суммы и разности функций.

Теорема. Если функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют производные во всех точках интервала $(a;b)$, то $(u(x) \pm v(x))' = u'(x) \pm v'(x)$ для любого $x \in (a;b)$.

Эту формулу можно записать в сокращенном виде: $(u \pm v)' = u' \pm v'$.

Примеры.

$$1) (x^2 + x + 5)' = (x^2)' + (x + 5)' = 2x + 1;$$

$$2) (x^3 + \sqrt{x})' = (x^3)' + (\sqrt{x})' = 3x^2 + \frac{1}{2\sqrt{x}};$$

$$3) (x^2 + 4x + 15)' = (x^2)' + (4x + 15)' = 2x + 4.$$

Производная произведения функций.

Теорема. Если функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют производные во всех точках интервала $(a;b)$, то $[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$ для любого $x \in (a;b)$.

Данная формула также записывается в следующем виде: $(uv)' = u'v + uv'$.

Примеры.

$$1) ((x + 5)(x - 8))' = (x + 5)'(x - 8) + (x - 8)'(x + 5) = 1 \cdot (x - 8) + 1 \cdot (x + 5) = 2x - 3;$$

$$2) (x^2(2x - 7))' = (x^2)'(2x - 7) + x^2(2x - 7)' = 2x(2x - 7) + x^2 \cdot 2 = 6x^2 - 14x;$$

$$3) (\sqrt{x}(5 - 3x))' = (\sqrt{x})'(5 - 3x) + \sqrt{x}(5 - 3x)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}(5 - 3x) + \sqrt{x}(-3) = \frac{5 - 3x - 6x}{2\sqrt{x}} = \frac{5 - 9x}{2\sqrt{x}}.$$

Следствие. Постоянный множитель можно выносить за знак производной: $(af(x))' = af'(x)$.

Примеры.

$$1) \left(\frac{x^2}{3} \right)' = \frac{1}{3} (x^2)' = \frac{2}{3} x;$$

$$2) \left(\frac{x^3}{3} + 5x \right)' = \left(\frac{x^3}{3} \right)' + (5x)' = \frac{1}{3}(x^3)' + 5(x)' = x^2 + 5.$$

Производная частного двух функций.

Теорема. Если функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют производные во всех точках интервала $(a;b)$, причем $v(x) \neq 0$ для любого $x \in (a;b)$, то

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)} \right)' = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)} \text{ для любого } x \in (a;b).$$

В сокращенном виде формула записывается так: $\left(\frac{u}{v} \right)' = \frac{vu' - uv'}{v^2}.$

Примеры.

$$\begin{aligned} 1. \left(\frac{1+9x}{x+1} \right)' &= \frac{(x+1)(1+9x)' - (1+9x)(x+1)'}{(x+1)^2} = \frac{(x+1) \cdot 9 - (1+9x) \cdot 1}{(x+1)^2} = \\ &= \frac{(x+1) \cdot 9 - (1+9x) \cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{8}{(x+1)^2}; \end{aligned}$$

$$2) \left(\frac{x^3}{4-x} \right)' = \frac{(4-x)(x^3)' - x^3(4-x)'}{(4-x)^2} = \frac{(4-x)3x^2 - x^3(-1)}{(4-x)^2} = \frac{12x^2 - 2x^3}{(4-x)^2}.$$

Таблица производных.

$$1. (c)' = 0 \text{ (} c \text{ — константа).}$$

$$2. (x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}, \text{ где } \alpha \in \mathbb{R}.$$

$$\text{В частности, } (x)' = 1, \quad (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

$$3. (a^x)' = a^x \ln a.$$

$$\text{В частности, } (e^x)' = e^x.$$

$$4. (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}.$$

$$\text{В частности, } (\ln x)' = \frac{1}{x}, \quad (\lg x)' = \frac{1}{x \ln 10}.$$

$$5. (\sin x)' = \cos x.$$

$$6. (\cos x)' = -\sin x.$$

$$7. (tg x)' = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

$$8. (ctg x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

$$9. (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$10. (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

11. $(\arctg)' = \frac{1}{1+x^2}$.
12. $(\operatorname{arccctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$.
13. $(f(x)+g(x))' = f'(x) + g'(x)$.
14. $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.
15. $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$.

Сложная функция. Понятие сложной функции широко используется в математике. Со сложными функциями мы уже неоднократно встречались в курсе математики при рассмотрении различных вопросов.

Пусть заданы две функции $y = g(x)$ и $z = \varphi(y)$, причем область определения функции φ содержит множество значений функции g . Функция, заданная формулой $z = \varphi(g(x))$, называется сложной функцией, составленной из функций g и φ , или суперпозицией функций g и φ .

Например, функция $\omega = 3\lg(1+x^2)$ есть сложная функция, составленная из более простых функций $z = 3\lg u$ и $u = 1+x^2$.

Подобным же образом можно рассматривать сложные функции, являющиеся суперпозицией более чем двух функций. Например, функция $z = \lg(1+\sqrt{x})$ может быть рассмотрена как суперпозиция следующих функций: $z = \lg v$, $v = 1 + y$, $y = \sqrt{x}$.

Производная сложной функции.

Теорема. Пусть функция $y = g(x)$, $x \in (a;b)$, имеет производную в точке $x_0 \in (a;b)$, а функция $z = \varphi(y)$ определена на интервале, содержащем множество значений функции g , и имеет производную в точке $y_0 = g(x_0)$. Тогда сложная функция $f(x_0) = \varphi(g(x_0))$ имеет производную в точке x_0 , которая вычисляется по формуле $f'(x_0) = \varphi'(y_0)g'(x_0)$.

Примеры

$$1. ((x^2+3x+10)^2)' = 2(x^2+3x+10)(x^2+3x+10)' = 2(x^2+3x+10)(2x+3);$$

$$2. \left(\left(\frac{x}{x+1}\right)^3\right)' = 3\left(\frac{x}{x+1}\right)^2\left(\frac{x}{x+1}\right)' = 3\left(\frac{x}{x+1}\right)^2 \frac{x'(x+1) - x(x+1)'}{(x+1)^2} =$$

$$= 3\left(\frac{x}{x+1}\right)^2 \frac{1(x+1) - 1x}{(x+1)^2} = 3\left(\frac{x}{x+1}\right)^2 \frac{1}{(x+1)^2} = 3\frac{x^2}{(x+1)^2} \cdot \frac{1}{(x+1)^2} = 3\frac{x^2}{(x+1)^4} = \frac{3x^2}{(x+1)^4}.$$

$$3. (x^{1/3})' = \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}.$$

$$4. (e^{x^2+1})' = e^{x^2+1}(x^2+1)' = e^{x^2+1} \cdot 2x.$$

$$5. (8^{3x^2+x+1})' = 8^{3x^2+x+1} \ln 8 \cdot (3x^2+x+1)' = 8^{3x^2+x+1} \ln 8 \cdot (6x+1).$$

$$6. ((x^3+4x+16)^{\frac{5}{4}x^2+x+3})' =$$

$$\begin{aligned}
&= (x^3 + 4x + 16)' 4^{\frac{5}{4}x^2 + x + 3} + \left(4^{\frac{5}{4}x^2 + x + 3} \right)' (x^3 + 4x + 16) = \\
&= 4^{\frac{5}{4}x^2 + x + 3} \cdot (3x^2 + 4) + 4^{\frac{5}{4}x^2 + x + 3} \ln 4 \cdot \left(\frac{5}{4}x^2 + x + 3 \right) \cdot (x^3 + 4x + 16) = \\
&= 4^{\frac{5}{4}x^2 + x + 3} (3x^2 + 4 + \ln 4 \cdot \left(\frac{5}{4}x^2 + x + 3 \right) (x^3 + 4x + 16)).
\end{aligned}$$

$$7. (\ln(x^2 + 3x + 9))' = \frac{(x^2 + 3x + 9)'}{x^2 + 3x + 9} = \frac{2x + 3}{x^2 + 3x + 9}.$$

$$8. (\log_2(x^2 + 3x^2 + 4x + 2))' = \frac{(x^3 + 3x^2 + 4x + 2)'}{(x^3 + 3x^2 + 4x + 2) \ln 2} = \frac{3x^2 + 6x + 4}{(x^3 + 3x^2 + 4x + 2) \ln 2}.$$

$$\begin{aligned}
9. ((x^2 + 3) \ln(2x + 1))' &= \\
&= (x^2 + 3)' \ln(2x + 1) + (x^2 + 3)(\ln(2x + 1))' = 2x \ln(2x + 1) + (x^2 + 3) \frac{(2x + 1)'}{2x + 1} = \\
&= 2x \ln(2x + 1) + \frac{2(x^2 + 3)}{2x + 1}.
\end{aligned}$$

$$10. (8^{3x^2 + x + 1})' = 8^{3x^2 + x + 1} \ln 8 \cdot (3x^2 + x + 1)' = 8^{3x^2 + x + 1} \ln 8 \cdot (6x + 1).$$

$$11. (\ln(x^2 + 3x + 9))' = \frac{(x^2 + 3x + 9)'}{x^2 + 3x + 9} = \frac{2x + 3}{x^2 + 3x + 9}.$$

$$12. (\log_2(x^2 + 3x^2 + 4x + 2))' = \frac{(x^3 + 3x^2 + 4x + 2)'}{(x^3 + 3x^2 + 4x + 2) \ln 2} = \frac{3x^2 + 6x + 4}{(x^3 + 3x^2 + 4x + 2) \ln 2}.$$

$$\begin{aligned}
13. ((x^2 + 3) \ln(2x + 1))' &= \\
&= (x^2 + 3)' \ln(2x + 1) + (x^2 + 3)(\ln(2x + 1))' = 2x \ln(2x + 1) + (x^2 + 3) \frac{(2x + 1)'}{2x + 1} = \\
&= 2x \ln(2x + 1) + \frac{2(x^2 + 3)}{2x + 1}.
\end{aligned}$$

$$14. (\sin 5x)' = \cos 5x (5x)' = 5 \cos 5x;$$

$$15. (\sin 3x^2)' = \cos 3x^2 (3x^2)' = 6x \cos 3x^2;$$

$$16. (\sin^3 2x)' = 3 \sin^2 2x (\sin 2x)' = 3 \sin^2 2x \cos 2x (2x)' = 6 \sin^2 2x \cos 2x.$$

$$17. (\cos 3x)' = -\sin 3x (3x)' = -3 \sin 3x;$$

$$18. (\cos 3x)' = -\sin 3x^2 (3x^2)' = -6x \sin 3x^2;$$

$$19. (\cos^2 3x)' = 2 \cos 3x (\cos 3x)' = 2 \cos 3x (-\sin 3x) (3x)' = -3 \sin 6x.$$

$$20. (tg 3x)' = \frac{1}{\cos^2 3x} (3x)' = \frac{3}{\cos^2 3x};$$

$$21. (tg^3 2x)' = 3tg^2 2x (tg 2x)' = 3tg^2 2x \frac{1}{\cos^2 2x} (2x)' = 6 \frac{\sin^2 2x}{\cos^4 2x};$$

$$22. (ctg 4x)' = -\frac{1}{\sin^2 4x} (4x)' = -\frac{4}{\sin^2 4x};$$

Тема «Правила нахождения первообразных»

Теоретические положения.

Определение: Функция $F(x)$ называется первообразной функции $f(x)$ на некотором промежутке, если для всех x из этого промежутка $F'(x) = f(x)$

Замечание: Если функция $F'(x)$ является первообразной функции $f(x)$ на некотором промежутке, то все первообразные функции $f(x)$ записываются в виде $F(x) + C$, где C – произвольная постоянная.

Правила нахождения первообразных.

Задача 1. Найти одну из первообразных функции

$$f(x) = x^2 + 3\cos x$$

- Используя правила интегрирования и таблицу первообразных для функций x^p при $p = 2$ и

$$F(x) = \frac{x^3}{3} + 3\sin x$$

для $\cos x$, находим одну из первообразных данной функции:

Задача 2. Найти все первообразные функции

$$e^{1-x} - 4\sin(2x+3)$$

- По таблице первообразных находим, что одной из первообразных функции e^{1-x} является функция $-e^{1-x}$, а одной из первообразных функций $\sin(2x+3)$ является функция $-\frac{1}{2}\cos(2x+3)$. По правилам интегрирования одна из первообразных данной функции: $-e^{1-x} + 2\cos(2x+3)$.

Ответ $-e^{1-x} + 2\cos(2x+3) + C$.

Таблица первообразных

Функция	Первообразная
$x^p, p \neq -1$	$\frac{x^{p+1}}{p+1} + C$
$\frac{1}{x}, x > 0$	$\ln x + C$
e^x	$e^x + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$
$\cos x$	$\sin x + C$
$(kx+b)^p, p \neq -1, k \neq 0$	$\frac{(kx+b)^{p+1}}{k(p+1)} + C$
$\frac{1}{kx+b}, k \neq 0$	$\frac{1}{k} \ln(kx+b) + C$

$e^{kx+b}, k \neq 0$	$\frac{1}{k} e^{kx+b} + C$
$\sin(kx+b), k \neq 0$	$-\frac{1}{k} \cos(kx+b) + C$
$\cos(kx+b), k \neq 0$	$\frac{1}{k} \sin(kx+b) + C$

Примеры.

Найти одну первообразных функции:

1) $\sqrt{\frac{x}{5}} + 4 \sin(4x+2)$

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{5}} * \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + 4 * \frac{1}{4} * (-\cos(4x+2)) = \frac{2 * \sqrt{x^3}}{3\sqrt{5}} - \cos(4x+2) = \frac{2 * x\sqrt{x}}{3\sqrt{5}} - \cos(4x+2)$$

2) $\frac{4}{\sqrt{3x+1}} - 2 \cos\left(\frac{x}{5} - 1\right)$

$$F(x) = 4 * \frac{(3x+1)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} - 2 * 5 * \sin\left(\frac{x}{5} - 1\right) = 8 * \sqrt{3x+1} - 10 * \sin\left(\frac{x}{5} - 1\right)$$

Тема «Вычисление определенного интеграла по формуле Ньютона – Лейбница»

Теоретические положения

Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[a;b]$. Разобьем отрезок $[a;b]$ на n частей точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$, выберем на каждом элементарном отрезке $[x_{k-1}; x_k]$ произвольную точку ξ_k и обозначим через Δx_k длину каждого такого отрезка. *Интегральной суммой* для функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ называется сумма вида

$$\sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k = f(\xi_1) \Delta x_1 + f(\xi_2) \Delta x_2 + \dots + f(\xi_n) \Delta x_n. \quad (1)$$

Определенным интегралом от функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ называется предел интегральной суммы (1) при условии, что длина наибольшего из элементарных отрезков стремится к нулю:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\max \Delta x_k \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k. \quad (2)$$

Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a;b]$, то предел (2) существует и не зависит от способа разбиения отрезка $[a;b]$ на элементарные отрезки и от выбора точек ξ_k (теорема существования определенного интеграла).

Основные свойства определенного интеграла

1. Определенный интеграл от алгебраической суммы конечного числа функций равен алгебраической сумме определенных интегралов от слагаемых функций:

$$\int_b^a [f_1(x) \pm f_2(x)] dx = \int_b^a f_1(x) dx \pm \int_b^a f_2(x) dx.$$

2. Постоянный множитель можно выносить за знак определенного интеграла:

$$\int_b^a k f(x) dx = k \int_b^a f(x) dx.$$

3. При перестановке пределов интегрирования определенный интеграл меняет знак на противоположный:

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx.$$

4. Определенный интеграл с одинаковыми пределами равен нулю: $\int_a^a f(x) dx = 0.$

5. Отрезок интегрирования можно разбивать на части:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

Для вычисления определенного интеграла от функции $f(x)$ в том случае, когда можно найти соответствующий неопределенный интеграл $F(x)$, служит формула Ньютона — Лейбница:

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a) \quad (3)$$

т. е. определенный интеграл равен разности значений первообразной при верхнем и нижнем пределах интегрирования.

Пример 1. Вычислить интеграл $\int_0^4 (3x - e^{x/4}) dx.$

Решение. На основании формулы (3) находим

$$\int_0^4 (3x - e^{x/4}) dx = \left[\frac{3x^2}{2} - 4e^{x/4} \right]_0^4 = (24 - 4e) - (0 - 4) = 28 - 4e.$$

Пример 2. Вычислить интеграл $\int_{-1}^2 (x^2 - 3x + 7) dx.$

Решение.

$$\begin{aligned} \int_{-1}^2 (x^2 - 3x + 7) dx &= \left(\frac{1}{3} x^3 - \frac{3}{2} x^2 + 7x \right) \Big|_{-1}^2 = \left(\frac{1}{3} \cdot 2^3 - \frac{3}{2} \cdot 2^2 + 7 \cdot 2 \right) - \left(\frac{1}{3} (-1)^3 - \frac{3}{2} (-1)^2 + 7(-1) \right) = \\ &= \frac{8}{3} - 6 + 14 + \frac{1}{3} + \frac{3}{2} + 7 = 19,5. \end{aligned}$$

Пример 3. Вычислить интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{e^{2x}}.$

Решение. $\int_0^1 \frac{dx}{e^{2x}} = \int_0^1 e^{-2x} dx = -\frac{1}{2} e^{-2x} \Big|_0^1 = -\frac{1}{2} (e^{-2} - e^0) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{e^2} \right).$

Пример 4.

$$\begin{aligned}\int_1^4 2\sqrt{x} * \left(2 - \frac{3}{x}\right) dx &= \int_1^4 \left(4\sqrt{x} - 6\frac{\sqrt{x}}{x}\right) dx = \int_1^4 \left(4x^{\frac{1}{2}} - 6 * x^{-\frac{1}{2}}\right) dx = \left(\frac{4x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{6 * x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right) \Big|_1^4 \\&= \left(4 * \frac{2}{3} \sqrt{x^3} - 6 * 2\sqrt{x}\right) \Big|_1^4 = \left(\frac{8}{3} \sqrt{x^3} - 12\sqrt{x}\right) \Big|_1^4 = \left(\frac{8}{3} \sqrt{4^3} - 12\sqrt{4}\right) - \left(\frac{8}{3} * \sqrt{1^3} - 12 * \sqrt{1}\right) = \\&= \left(\frac{8}{3} * 8 - 12 * 2\right) - \left(\frac{8}{3} - 12\right) = \frac{64}{3} - 24 - \frac{8}{3} + 12 = \frac{56}{3} - 12 = \frac{56 - 36}{3} = \frac{20}{3} = 6\frac{2}{3}\end{aligned}$$

II ЗАДАНИЯ К КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЕ

1. Предел и непрерывность функции

1 вариант

Вычислить предел функции

1. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 8x + 15}$

2. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x + 5}{3x - 6}$

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 17x}{12x}$

2 вариант

Вычислить предел функции

1. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 + x - 20}{x^2 - 16}$

2. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x + 5}{2x - 4}$

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{13x}$

3 вариант

Вычислить предел функции

1. $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{x^2 - 49}{x^2 - 5x - 14}$

2. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 4}{2x - 6}$

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 9x}{4x}$

4 вариант

Вычислить предел функции

1. $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 12x + 35}{x^2 - 25}$

2. $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 1}{2x - 10}$

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 8x}{19x}$

5 вариант

Вычислить предел функции

1. $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{x^2 - 3x - 18}{x^2 - 36}$

2. $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{2x - 3}{3x - 12}$

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{14x}$

6 вариант

Вычислить предел функции

1. $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{x^2 - 81}{x^2 - 11x + 18}$

2. $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{3x - 5}{2x - 12}$

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 19x}{3x}$

7 вариант

Вычислить предел функции

1. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 3x^2 + 2x}{x^2 - x - 6}$

2. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x - 5}{4x - 12}$

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{x}$

8 вариант

Вычислить предел функции

1. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$

2. $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{2x - 11}{-3x + 18}$

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 9x}{3x}$

9 вариант

Вычислить предел функции

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 - 81}{3x^2 - 11x + 6}$

2. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 5}{x - 1}$

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{3x}$

10 вариант

Вычислить предел функции

1. $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{x^2 - 49}{x^2 - 11x + 18}$

2. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{4x - 15}{2 + x}$

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{3x}$

2. Дифференциальное исчисление

1 вариант

1. Найти производную функции $y = \sin^6(4x^2 - 2)$.
2. Найти производную третьего порядка функции $y = 3x^4 + \cos 5x$.

2 вариант

1. Найти производную функции $y = \operatorname{tg}^5(3x^4 - 13)$.
2. Найти производную третьего порядка функции $y = 4x^2 - e^{5x}$.

3 вариант

1. Найти производную функции $y = \operatorname{ctg}^4(5x^2 + 6)$.
2. Найти производную третьего порядка функции $y = 5x^4 + \cos 4x$.

4 вариант

1. Найти производную функции $y = \cos^4(6x^2 + 9)$.
2. Найти производную третьего порядка функции $y = 2x^5 - \sin 3x$.

5 вариант

1. Найти производную функции $y = \arcsin^3(7x^2)$.
2. Найти производную третьего порядка функции $y = 4x^4 + \sin 2x$.

6 вариант

1. Найти производную функции $y = \operatorname{arctg}^6(5x^4)$.
2. Найти производную третьего порядка функции $y = 6x^5 + e^{4x}$.

7 вариант

1. Найти производную функции $y = \operatorname{tg}^6(\ln x)$.

2. Найти производную третьего порядка функции $y = 11x^4 - e^{4x} - x^2$.

8 вариант

1. Найти производную функции $y = \ln^6(\cos 2x)$.
2. Найти производную третьего порядка функции $y = 11x^4 + e^{2x} - \cos 2x$.

9 вариант

1. Найти производную функции $y = \sin^6\left(\frac{\cos 1}{x}\right)$.
2. Найти производную третьего порядка функции $y = -x^5 - e^{3x} - \ln x$.

10 вариант

1. Найти производную функции $y = \cos^3(2\ln(x^2 + 2))$.
2. Найти производную третьего порядка функции $y = 11x^4 - e^{4x} - x^2$.

3. Найти неопределенные интегралы.

1 вариант

- а) $\int \operatorname{ctg}(2x-3) dx$;
- б) $\int x \cdot \operatorname{tg}^2 x dx$;
- в) $\int (6x^3 - 7x^2 - 3x) dx$.

2 вариант

- а) $\int \operatorname{tg}(5x + 3) dx$;
- б) $\int \ln(x^2 + 1) dx$;
- в) $\int (x^3 - 1)(4x^3 - x) dx$.

3 вариант

- а) $\int \operatorname{ctg}(2x-3) dx$;
- б) $\int \ln^2 x dx$;
- в) $\int x^2(x^3 + 5x^2 + 8x + 4) dx$.

4 вариант

- а) $\int x - 1 \cos^2(1 + \ln x) dx$;
- б) $\int \arcsin 2x dx$;
- в) $\int (x^3 + 1)(x^3 - x^2) dx$.

5 вариант

- а) $\int \cos 4x \sin 2x dx$;
- б) $\int x^2 \operatorname{arctg} x dx$;
- в) $\int (x^3 + x^2 - x - 1) dx$.

6 вариант

- а) $\int x(3x + 2) dx$;
- б) $\int x - 2 \ln 3x dx$;
- в) $\int (x^4 + 1)(x^3 - x^2 + x - 1) dx$

7 вариант

а) $\int x(3x + 2) - 1 \, dx$;

б) $\int (1 - x) - 1/2 \arcsin x \, dx$;

в) $\int (x^3 - 3x + 2) \, dx$

8 вариант

а) $\int (e^2 x + 4) - 1 \, dx$;

б) $\int x \ln(1 + x) \, dx$;

в) $\int x(x^3 - 1) - 1 \, dx$.

9 вариант

а) $\int e - x(e^2 x - 1) \, dx$;

б) $\int x - \ln 2x \, dx$;

в) $\int (4x^2 - 16x + 15) \, dx$

10 вариант

а) $\int (3x - 1)(x^2 + 9) - 1 \, dx$;

б) $\int e\sqrt{x} \, dx$;

в) $\int (x^3 + x^2 + x + 1) \, dx$

4. Вычислить значение определенного интеграла.**1
вариант**

$$\int_3^8 \frac{3x \, dx}{\sqrt{x+1}}$$

**6
вариант**

$$\int_0^1 x \cdot e^{-2x} \, dx$$

**2
вариант**

$$\int_1^9 \frac{6x \, dx}{\sqrt{2x+7}}$$

**7
вариант**

$$\int_0^{\pi/2} x \cdot \cos 2x \, dx$$

**3
вариант**

$$\int_{-1}^1 \frac{24x \, dx}{\sqrt{4x+5}}$$

**8
вариант**

$$\int_1^e x \cdot \ln x \, dx$$

**4
вариант**

$$\int_0^5 \frac{x \, dx}{\sqrt{3x+1}}$$

**9
вариант**

$$\int_0^{\pi} x \cdot \sin \frac{x}{2} \, dx$$

**5
вариант**

$$\int_{-1}^3 \frac{3x \, dx}{\sqrt{2x+3}}$$

**10
вариант**

$$\int_{-1}^0 x \cdot e^{-x} \, dx$$

III ПРИМЕР РЕШЕНИЯ 0 ВАРИАНТА КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

1. Предел функции.

Вычислить предел

$$1. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 4x + 1}{-11x + 2} = \frac{8 - 8 + 1}{-22 + 2} = \frac{1}{-20} = -\frac{1}{20}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{4x^2 - 1}{4 + 2x} = \frac{16 - 1}{0} = \frac{15}{0} = \infty$$

3.

2. Дифференциальное исчисление

1. Найти производную функции $y = \cos^2(2x^5 - 1)$.

$$y' = 2\cos^1(2x^5 - 1) \cdot (-\sin(2x^5 - 1)) \cdot (10x^4) = -20x^4 \cos(2x^5 - 1) \cdot \sin(2x^5 - 1)$$

2. Найти производную третьего порядка функции $y = 3x^4 + \cos 5x$.

$$y' = 12x^3 - 5\sin 5x$$

$$y'' = 36x^2 - 25\cos 5x$$

$$y''' = 72x + 125\sin 5x$$

4. Вычислить значение определенного интеграла.

Пример 1. Вычислить интеграл $\int_0^4 (3x - e^{x/4}) dx$.

Решение. На основании формулы находим

$$\int_0^4 (3x - e^{x/4}) dx = \left[\frac{3x^2}{2} - 4e^{x/4} \right]_0^4 = (24 - 4e) - (0 - 4) = 28 - 4e.$$

Пример 2. Вычислить интеграл $\int_{-1}^2 (x^2 - 3x + 7) dx$.

Решение.

$$\begin{aligned} \int_{-1}^2 (x^2 - 3x + 7) dx &= \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 7x \right)_{-1}^2 = \left(\frac{1}{3} \cdot 2^3 - \frac{3}{2} \cdot 2^2 + 7 \cdot 2 \right) - \left(\frac{1}{3}(-1)^3 - \frac{3}{2}(-1)^2 + 7(-1) \right) = \\ &= \frac{8}{3} - 6 + 14 + \frac{1}{3} + \frac{3}{2} + 7 = 19,5. \end{aligned}$$

Оформление титульного листа контрольной работы
Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Волгоградский государственный технический университет
Себряковский филиал

Кафедра математических и естественно-научных дисциплин

Контрольная работа
по дисциплине
Математический анализ

Выполнил: _____
(Фамилия И.О.)

студент _____ курса _____ направление _____

группа _____ № зачетной книжки _____

Подпись: _____

Принял: _____ к.т.н., доцент А.А. Крутилин
(Фамилия И.О.)

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Таблица производных основных элементарных функций:

Степенная функция	Показательная и логарифмическая	Тригонометрические функции	Обратные тригонометрические функции
$C' = 0$; C — число $x' = 1$	$(e^x)' = e^x$	$(\sin x)' = \cos x$	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(x^m)' = m \cdot x^{m-1}$	$(a^x)' = a^x \ln a$	$(\cos x)' = -\sin x$	$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$
$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$	$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$	$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$(\operatorname{arcc} \operatorname{tg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

Для сложных функций с промежуточным аргументом u соответствующая таблица будет иметь вид:

Степенная функция	Показательная и логарифмическая	Тригонометрические функции	Обратные тригонометрические функции
$(u)^m = m \cdot u^{m-1} \cdot u'$	$(e^u)' = e^u \cdot u'$	$(\sin u)' = \cos u \cdot u'$	$(\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$(a^u)' = a^u \ln a \cdot u'$	$(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$	$(\arccos u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$	$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$	$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$	$(\operatorname{arctg} u)' = \frac{u'}{1+u^2}$
	$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a}$	$(\operatorname{ctg} u)' = -\frac{u'}{\sin^2 u}$	$(\operatorname{arcc} \operatorname{tg} u)' = -\frac{u'}{1+u^2}$

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

Таблица интегралов для случая замены переменных

Степенные и показательные функции		Тригонометрические функции		Функции, содержащие квадратный двучлен в знаменателе	
1	$\int t^n dt = \frac{t^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1$	8	$\int \sin t dt = -\cos t + C$	14	$\int \frac{dt}{1+t^2} = \arctg t + C$
2	$\int dt = t + C$	9	$\int \cos t dt = \sin t + C$	15	$\int \frac{dt}{a^2 + t^2} = \frac{1}{a} \arctg \frac{t}{a} + C$
3	$\int t dt = \frac{t^2}{2} + C$	10	$\int \frac{1}{\cos^2 t} dt = \tg t + C$	16	$\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t + C$
4	$\int \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{t} + C$	11	$\int \frac{1}{\sin^2 t} dt = -ctg t + C$	17	$\int \frac{dt}{\sqrt{a^2 - t^2}} = \arcsin \frac{t}{a} + C$
5	$\int \frac{dt}{t} = \ln t + C$	12	$\int ctg t dt = \ln \sin t + C$	18	$\int \frac{dt}{t^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{t-a}{t+a} \right + C$
6	$\int a^t dt = \frac{a^t}{\ln a} + C$	13	$\int tg t dt = -\ln \cos t + C$	19	$\int \frac{dt}{a^2 - t^2} = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{a+t}{a-t} \right + C$
7	$\int e^t dt = e^t + C$			20	$\int \frac{dt}{\sqrt{t^2 \pm a^2}} = \ln \left t + \sqrt{t^2 \pm a^2} \right + C$